πολ. γεωργιακακης
μαν. γεωργιακακης

ΑΛΓΕΒΡΑ 1

- πινακες
- οριζουσες
- συστηματα
- στατιστικη
- συναρτησεις
- ορια
- συνεχεια
- παραγωγοι

μαθηματικα

4ης δεσμης

*** 1500 ασκησεις**

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΑΡΚΑΔΙ"
Μαυροκορδάτου 3 τηλ. 36 36 063
10678 - ΑΘΗΝΑ

1985

πολ. γεωργιακακης
μαν. γεωργιακακης

ΑΛΓΕΒΡΑ 1

- πινακες
- οριζουσες
- συστηματα
- στατιστικη
- συναρτησεις
- ορια
- συνεχεια
- παραγωγοι

μαθηματικα

4ης δεσμης

*1500 ασκησεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΑΡΚΑΔΙ"
Μαυροκορδάτου 3 τηλ. 36.36.063
10678 - ΑΘΗΝΑ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή ενός από τους συγγραφείς

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το βιβλίο αυτό σκοπό του έχει να βοηθήσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τους μαθητές και υποψήφιους της 4ης δέσμης.

Προσπαθήσαμε σε όσο λιγότερο χώρο γίνεται και με όσο μεγαλύτερη ακρίβεια και σαφήνεια μπορούμε να καλύψουμε κάθε πτυχή των θεμάτων που πρέπει ο καθένας να γνωρίζει για να πετύχει στις εισαγωγικές εξετάσεις.

Στο βιβλίο αυτό περιέχονται:

1. Πίνακες
2. Γραμμικά συστήματα
4. Στατιστική
5. Συναρτήσεις
6. 'Ορια συναρτήσεων
7. Συνέχεια συναρτήσεως
8. Παράγωγος συναρτήσεως
9. 700 Λυμένα παραδείγματα
10. 800 Αλυτες ασκήσεις.

Μέσα σ'αυτές τις σελίδες περιέχεται συνοπτική θεωρία, πολλά παραδείγματα μεθοδικά λυμένα και πολλές άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση.

Το αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου, αποτέλεσε βάση για την ανάπτυξη της ύλης, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι ασκήσεις και τα παραδείγματα περιορίζονται στα πλαίσια του σχολικού προγράμματος. Προσπαθήσαμε να μην ξεφύγουμε πολύ από τα όρια του σχολείου, οδηγώντας έτσι τον μαθητή και τον υποψήφιο σε θέματα που πιθανώς θα αντιμετωπίσει στις εξετάσεις. Ελπίζουμε ότι το βιβλίο μας αυτό θα αποτελέσει ένα μεγάλο βοήθημα για σας, ακόμη και για τον καθηγητή

Οι συγγραφείς
Μανώλης Π. Γεωργιακάκης
Πολύδωρος Π. Γεωργιακάκης

Απρίλιος '85

κεφαλαιο 1

πινακες οριζουσες γραμμικα συστηματα

1.1 Ορισμός: Κάθε σύμβολο της μορφής:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & a_{\mu 3} & \dots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad ή \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & a_{\mu 3} & \dots & a_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad ή \ A = [a_{ij}],\ i = 1,2,\dots,\nu,\ j = 1,2,\dots,\mu$$

ονομάζεται πίνακας με **μ γραμμές και ν στήλες** ή απλά **Πίνακας μxν**
Οι αριθμοί που αποτελούν ένα πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα.
Π.χ το στοιχείο a_{ij} βρίσκεται στην i - **γραμμή** και j - **στήλη**. Οι φυσικοί αριθμοί μ,ν λέγονται **διαστάσεις** του Πίνακα.

1.2 Είδη πινάκων.

1. **Τετραγωνικός πίνακας** λέγεται εκείνος που έχει το ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών, δηλ. (μ = ν). Οι παρακάτω πίνακες είναι τετραγωνικής διάστασης 2x2, 2x2, 3x3 αντίστοιχα.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία a_{11}, a_{22} ή x, φ, ή a_{11}, a_{22}, a_{33} που βρίσκονται πάνω στην πρώτη διαγώνιο του τετραγωνικού πίνακα λέγονται **πρωτεύοντα στοιχεία** και η διαγώνιος **πρωτεύουσα ή κυρία διαγώνιος.**

2. **Πίνακας γραμμή** λέγεται ο πίνακας που έχει μόνο μια γραμμή δηλ. μ = 1
Π.χ οι πίνακες $(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1\nu})$, $(1\ \ 2\ \ 3)$, $[-1\ \ 0\ \ 4\ \ 8]$ είναι πίνακες γραμμή.

3. **Πίνακας στήλη** λέγεται ο πίνακας που έχει μόνο μια στήλη, δηλ. ν = 1.

Π.χ Οι πίνακες: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{\mu 1} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

είναι πίνακες στήλη.

4. **Πίνακας στοιχείο** λέγεται ο πίνακας που έχει ένα μόνο στοιχείο δηλ. μ = ν = 1. Π.χ οι πίνακες $[a_{11}]$, $[-3]$, $[2]$ είναι πίνακες στοιχείο.

5. **Διαγώνιος πίνακας** λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία που βρίσκονται έξω από την κυρία διαγώνιο, είναι μηδέν δηλ. $a_{ij} = 0$ με $i \neq j$.

6. **Τριγωνικός άνω** λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν δηλ. $a_{ij} = 0$ με $i < j$

7. **Τριγ. κάτω** λέγεται ο τετ. πίνακας που όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν δηλ. $a_{ij} = 0$ με $i > j$.

8. **Κλιμακωτός άνω** λέγεται ο πίνακας για τον οποίο είναι $a_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$. Π.χ οι πίνακες:

$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \delta & \zeta & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι κλιμακωτοί άνω.

9. **Κλιμακωτός κάτω** λέγεται ο πίνακας για τον οποίο είναι $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Π.χ οι πίνακες:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ είναι κλιμακωτοί κάτω.

10. **Μηδενικός πίνακας** λέγεται εκείνος που όλα τα στοιχεία του είναι μηδενικά. Π.χ οι πίνακες

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μηδενικοί.

11. **Μοναδιαίος πίνακας** λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας που τα στοιχεία της κύριας διαγώνιας είναι μονάδες και τα υπόλοιπα μηδέν.

Π.χ οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μοναδιαίοι.

12. **Συμμετρικός πίνακας** λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία τα συμμετρικά με την κύρια διαγώνιο είναι ίσα δηλ. $a_{ij} = a_{ji}$, $i \neq j$

Π.χ οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & x \\ x & 4 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικοί.

13. **Αντισυμμετρικός πίνακας** λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας που έχει αντίθετα τα στοιχεία που είναι συμμετρικά με την κύρια διαγώνιο δηλ.
$a_{ij} = -a_{ji}$. Π.χ οι πίνακες:

$\begin{bmatrix} 0 & x & -y \\ -x & 0 & \omega \\ y & -\omega & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικοί.

14. **Αντίθετος του πίνακα A** λέγεται ο πίνακας -A που τα στοιχεία του είναι αντίθετα των στοιχείων του A.

Π.χ του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ αντίθετος είναι ο $A' = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

του πίνακα $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ αντίθετος είναι ο $B' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

15. **Ανάστροφος του πίνακα A** λέγεται ο πίνακας A' που προκύπτει από τον A αν οι γραμμές του A γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές με την τάξη που είναι γραμμένες.

Π.χ του πίνακα $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$ ανάστροφος είναι ο πίνακας

$A'_{3\times2} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \\ \gamma & \gamma_1 \end{pmatrix}$

1.3 Πράξεις με πίνακες

1. **Η ισότητα στους πίνακες** ορίζεται όταν οι πίνακες έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Ορισμός: Δύο πίνακες $A_{\mu\times\nu} = [\alpha_{\kappa\lambda}]$ και $B_{\mu\times\nu} = [\beta_{\kappa\lambda}]$ με ν γραμμές και μ στήλες είναι ίσοι τότε και μόνο τότε όταν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, δηλ. $A_{\mu\times\nu} = B_{\mu\times\nu} \Leftrightarrow \alpha_{\kappa\lambda} = \beta_{\kappa\lambda}$ για κάθε $\kappa = 1,2,\dots,\nu$ και $\lambda = 1,2,\dots,\mu$.

Π.χ οι πίνακες $A_{2\times3} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$ και $B_{2\times3} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$

είναι ίσοι αν: $\begin{cases} \alpha = x,\ \beta = y,\ \gamma = z \\ \alpha_1 = x_1,\ \beta_1 = y_1,\ \gamma_1 = z_1 \\ \alpha_2 = x_2,\ \beta_2 = y_2,\ \gamma_2 = z_2 \end{cases}$

2. Η πρόσθεση στους πίνακες ορίζεται όταν οι πίνακες έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Ορισμός: Άθροισμα των πινάκων $A_{\mu\times\nu} = [\alpha_{ij}]$ και $B_{\mu\times\nu} = [\beta_{ij}]$ λέγεται ο πίνακας $\Gamma_{\mu\times\nu} = [\gamma_{ij}]$ του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ij} είναι το άθροισμα των αντιστοίχων στοιχείων του A και B, δηλ.

$A_{\mu\times\nu} + B_{\mu\times\nu} = \Gamma_{\mu\times\nu} \longleftrightarrow [\alpha_{ij}]+[\beta_{ij}] = [\gamma_{ij}]\ \forall\ i,j$

Π.χ το άθροισμα των πινάκων $A_{2\times1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $B_{2\times1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

είναι: $A+B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+(-2) \\ -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Επίσης: $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+x & \beta+y \\ \gamma+\omega & \delta+\varphi \end{bmatrix}$

3. Ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων.

Ισχύουν οι ιδιότητες:

α) Αντιμεταθετική: $A+B = B+A$

β) Προσεταιριστική: $A+(B+\Gamma) = (A+B)+\Gamma$

γ) Ουδέτερο στοιχείο ο πίνακας 0: $\mathbf{0}+A = A+\mathbf{0} = A$

δ) Αντίθετος του πίνακα A: $A+A' = A'+A = 0$

Τον αντίθετο του πίνακα A τον συμβολίζουμε με $-A$

Παρατηρήσεις: 1. Ο αντίθετος του πίνακα $-A$ είναι ο A δηλ. $-(-A) = A$

2. Ο αντίθετος του μηδενικού πίνακα **0** είναι ο ίδιος

3. Το άθροισμα $A+(-B)$ γράφεται $A-B$ και ονομάζεται **διαφορά** του B από τον A.

Π.χ $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & -y \\ -\omega & -\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-x & \beta-y \\ \alpha_1-\omega & \beta_1-\varphi \end{bmatrix}$

4. Ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής στους πίνακες με ίδιες διαστάσεις, δηλ. $A+\Gamma = B+\Gamma \rightarrow A = B$ και $\Gamma+A = \Gamma+B \rightarrow A = B$.

5. Ισχύει η ιδιότητα: $A_1+A_2+\ldots+A_\nu = (A_1+A_2+\ldots+A_{\nu-1})+A_\nu\ \ \forall\ \nu \geq 3$.

1.4 Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με πίνακα.

Ορισμός: Ονομάζεται γινόμενο του $\lambda \in \mathbb{R}$ με τον πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ ο πίνακας $B = [\beta_{ij}]$ του οποίου κάθε στοιχείο β_{ij} είναι γινόμενο του αντίστοιχου στοιχείου του A με το λ. Δηλαδή $\lambda[\alpha_{ij}] = [\lambda\alpha_{ij}] = [\beta_{ij}]$ $\forall$ i,j

Π.χ είναι

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1 & \lambda\gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$-2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες της παραπάνω πράξεως

1. $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
4. $1.A = A$

1.5 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ορισμός: Ονομάζουμε γινόμενο του πίνακα $A_{\nu\times\mu} = [\alpha_{ij}]$ με τον πίνακα $B_{\mu\times\rho} = [\beta_{jk}]$ τον πίνακα $\Gamma_{\nu\times\rho} = [\gamma_{ik}]$ του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ik} είναι το άθροισμα των γινομένων των μ στοιχείων της i - **γραμμής του A με τα αντίστοιχα μ στοιχεία της κ - στήλης του B.**

Δηλ. $\gamma_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{i\mu}\beta_{\mu k}$ $\forall$ i,κ

Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$

$$\text{τότε } AB = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x+\beta x_1+\gamma x_2 & \alpha y+ \beta y_1+\gamma y_2 \\ \alpha_1 x+\beta_1 x_1+\gamma_1 x_2 & \alpha_1 y+\beta_1 y_1+\gamma_1 y_2 \end{bmatrix}$$

Όμοια:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3(-1) \\ 0.1+(-1)1 \\ (-1)1+4(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

1.6 Πίνακες αντιστρέψιμοι.

Θα λέμε ότι ο νxν πίνακας A είναι **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει πίνακας A' νxν τέτοιος ώστε $AA' = A'A = I$, (I, μοναδιαίος).Είναι δε ο A' μοναδικός

και συμβολίζεται με A^{-1}.

Ο αντίστροφος ενός πίνακα ορίζεται μόνο για τετραγωνικούς πίνακες.

Αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $A.B = A.\Gamma \rightarrow B = \Gamma$ και $B\cdot A = \Gamma\cdot A \rightarrow B = \Gamma$

Π.χ του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 2x2 υπάρχει αντίστροφος $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

γιατί αν $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

τότε έχουμε: $\begin{pmatrix} \alpha-\gamma & \beta-\delta \\ 2\alpha & 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2\beta & -\alpha \\ \gamma+2\delta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα έχουμε να λύσουμε τα συστήματα:

$\Sigma_1: \begin{cases} \alpha-\gamma = 1 \\ \beta-\delta = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 1 \end{cases}$ και $\Sigma_2: \begin{cases} \alpha+2\beta = 1 \\ -\alpha = 0 \\ \gamma+2\delta = 0 \\ -\gamma = 1 \end{cases}$

Τα οποία δίνουν την ίδια λύση $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = -1$, $\delta = 1/2$.

επομένως ο αντίστροφος του A είναι ο $A' = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Επίσης ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ 2x2 δεν έχει αντίστροφο γιατί αν υποθέσουμε ότι είχε αντίστροφο τον $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{pmatrix}$ 2x2 θα είχαμε $AA' = A'A = I \leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3\omega & y+3\varphi \\ 2x+6\omega & 2y+6\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ που είναι ισοδύναμη με το σύστημα: $\begin{cases} x+3\omega = 1 \\ y+3\varphi = 0 \\ 2x+6\omega = 0 \\ 2y+6\varphi = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+3\omega = 1 \\ y+3\varphi = 0 \\ x+3\omega = 0 \\ y+3\varphi = 1/2 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Επομένως ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο.

Παρατήρηση: 1. Για να είναι δυνατός ο πολλαπλασιασμός των πινάκων Α και Β πρέπει ο αριθμός των στηλών του Α να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του Β.

2. Ο πίνακας $A_{\nu\times\mu} \cdot B_{\mu\times\rho} = \Gamma$ θα είναι διάστασης $\nu\times\rho$.

3. Αν Π_ν είναι το σύνολο όλων των τετραγωνικών πινάκων $\nu\times\nu$, τότε ο πολλαπλασιασμός είναι δυνατός μεταξύ τους και ο πίνακας γινόμενο έχει διάσταση $\nu\times\nu$.

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού.

α) $(A\cdot B)\cdot\Gamma = A\cdot(B\cdot\Gamma)$ **(προσεταιριστική)**

β) $A\cdot(B+\Gamma) = AB+A\Gamma$, $(B+\Gamma)A = BA+\Gamma A$ **(επιμεριστική)**

γ) $A\cdot I_\nu = I_\nu A = A$ **(μοναδιαίος πίνακας)**

δ) $A\cdot 0 = 0\cdot A = 0$ **(μηδενικός πίνακας)**

ε) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Σημείωση: 1. Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό γενικά, δηλ. $A\cdot B \neq B\cdot A$. Αν είναι $AB = BA$ οι πίνακες Α,Β λέγονται εναλλακτικοί.

2. Αν $A\cdot B = 0$ **δεν συνεπάγεται** $A = 0$ ή $B = 0$.

3. Αν $A\cdot\Gamma = B\cdot\Gamma$ δεν συνεπάγεται $A = B$

4. Στο σύνολο των πινάκων $\nu\times\nu$ ορίζεται η δύναμις ως εξής:

$A^0 = 1$, $A^1 = A$, ..., $A^{\nu+1} = A^\nu A$

5. Ισχύουν οι ιδιότητες: $(A^\nu)^\mu = A^{\nu\mu}$, $A^\mu A^\nu = A^{\mu+\nu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

1. Να βρεθούν τα x,y,z,ω αν: $\begin{pmatrix} x+3y & y-3z \\ y & x-2\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι για να είναι δύο πίνακες ίσοι πρέπει τα ομοθέσια στοιχεία τους να είναι ίσα επομένως έχουμε για λύση το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x+3y &= 0 \\ y-3z &= 1 \\ y &= 2 \\ x-2\omega &= -1 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -6 \\ z &= \frac{1}{3} \\ y &= 2 \\ \omega &= -\frac{5}{2} \end{aligned}\right.$$

2. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

Δείξετε ότι $2A-B-2\Gamma-\Delta = 0$.

Λύση: Είναι $2A-B-2\Gamma-\Delta = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1-1-2 & 4-4+6-6 \\ -2-3+12-7 & 3-7+0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & \mu+2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & \mu^2+4 & -2 \end{bmatrix}$. **Να βρεθεί ο $\mu \in R$ έτσι ώστε ο Α να είναι συμμετρικός.**

Λύση: Για να είναι ο Α συμμετρικός πρέπει:

$$\left.\begin{matrix} \mu+2 = 0 \\ \mu^2+4 = 8 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{matrix} \mu = -2 \\ \mu^2 = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \mu = -2 \\ \mu = \pm 2 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \mu = -2$$

4. Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & -3 \\ -\lambda & \lambda+3 & \lambda+5 \\ +3 & 5\lambda+13 & 0 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί ο λ ώστε ο πίνακας Α να είναι αντισυμμετρικός.

Λύση: Για να είναι ο Α αντισυμμετρικός πρέπει η κύρια διαγώνιος να έχει όλα τα στοιχεία μηδέν και τα συμμετρικά προς αυτήν στοιχεία να είναι αντίθετα. Δηλ.: $(\lambda+3 = 0 \wedge 5\lambda+13 = -\lambda-5) \leftrightarrow (\lambda = -3 \wedge 6\lambda = -18) \leftrightarrow \lambda = -3$
Άρα αν το $\lambda = -3$ τότε ο πίνακας Α είναι αντισυμμετρικός.

5. Να λυθεί η εξίσωση: $2\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 5 \\ -1 & \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ z+\omega & 1 \end{bmatrix} = 0$ **(1)**

Λύση: Η (1) $\leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & -5 \\ 1 & -\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -x-y \\ -z-\omega & -1 \end{bmatrix} = 0$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x-x-2 & 2y-5-x-y \\ 2z+1-z-\omega & 2\omega-\omega-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-2 = 0 \\ y-x-5 = 0 \\ z-\omega+1 = 0 \\ \omega-1 = 0 \end{matrix}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 7 \\ z = 0 \\ \omega = 1 \end{matrix}\right.$$

Άρα λύση της εξίσωσης είναι η τετράδα $(x,y,z,\omega) = (2,7,0,1)$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $-1\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+2 & 0 \\ 2y+1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

β) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Λύση: Η (α) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+2 & 0 \\ 2y+1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+4 & -4 \\ 2y+4 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x+4 = 1 \\ 2y+4 = 0 \\ y-1 = -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -2 \end{array} \right.$

β) Αν υποθέσουμε ότι λύση της εξίσωσης είναι ο πίνακας $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

τότε η (β) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2+\alpha & -3+\beta \\ 8+\gamma & -1+\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha+2 = -2 \\ \beta-3 = -1 \\ \gamma+8 = 0 \\ \delta-1 = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha = -4 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -8 \\ \delta = 4 \end{array} \right.$

Άρα λύση της εξίσωσης (β) είναι ο πίνακας $X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

7. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2\lambda+1 & 2 & \lambda^2+7 \\ 2 & -8\lambda & 3 \end{pmatrix}$

Να οριστεί ο λ ώστε ο Α να είναι συμμετρικός.

Λύση: Πρέπει και αρκεί να ισχύει: $\left. \begin{array}{l} 2\lambda+1 = \lambda \\ \lambda^2+7 = -8\lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda^2+8\lambda+7 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$\left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ (\lambda+1)(\lambda+7) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = -7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda = -1$

8. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1+2y \\ 2z+1 & 2 \end{pmatrix}$

Λύση: Έχουμε: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3+2y \\ 2z+4 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 4 \ , \ y = 3+2y \\ z = 2z+4 \ , \ \omega = 6 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 4 \ , \ y = -3 \\ z = -4 \ , \ \omega = 6 \end{array} \right| \Leftrightarrow (x,y,z) = (4,-3,-4,6)$

9. Έστω οι πίνακες: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **και** $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Να δειχτεί ότι: i. AB = BA, ii. $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$

Λύση: i. Έχουμε: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot(-4) & 1\cdot 4+2\cdot 3 \\ -2\cdot 3+1(-4) & -2\cdot 4+1\cdot 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$, $B\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1+4(-2) & 3\cdot 2+4\cdot 1 \\ -4\cdot 1+3(-2) & -4\cdot 2+3\cdot 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow A\cdot B = B\cdot A$

ii. $A^2-B^2 = A\cdot A-B\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -20 \\ 20 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+12 & -8-12 \\ 12+8 & 12-8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \ldots$ ή $(A+B)(A-B) = A^2-AB+BA-B^2 = A^2-B^2$.

10. Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν

i. Το $A+B$ iii. Το $(A+B)(A-B)$

ii. Το $A-B$ iv. Το A^2-B^2.

Λύση: $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3+3 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 2-1 \\ 3-3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot 1 \\ 6\cdot 1+(-1)\,0 & 6\cdot 1+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

iii. $A^2-B^2 = AA-BB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 0 \\ 3\cdot 1+0\cdot 3 & 3\cdot 2+0\cdot 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 3 & 0\cdot 1+1\cdot(-1) \\ 3\cdot 0+(-1)3 & 3\cdot 1+(-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} -$

$- \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3 & 2+1 \\ 3+3 & 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \neq (A+B)(A-B)$.

11. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Να οριστεί ο B, ώστε το γινόμενο A.B, να είναι διαγώνιος πίνακας.

Λύση: Επειδή ο διαγώνιος πίνακας θάναι τετραγωνικός θα πρέπει να έχει τη μορφή: $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}$ οπότε: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3z & y+3\omega \\ 2x+4z & 2y+4\omega \end{pmatrix}$

που για να είναι διαγώνιος θα πρέπει: $2x+4z = 0$, $y+3\omega = 0 \iff x = -2z$, $y = -3\omega$, οπότε έχουμε: $B = \begin{pmatrix} -2z & -3\omega \\ z & \omega \end{pmatrix}$

12. Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

i. Να υπολογιστεί το A·B

ii. Να υπολογιστεί το B·A

Λύση: Έχουμε $A \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & -\alpha\beta+\alpha\beta \\ -\alpha^2+\beta^2 & \alpha\beta+\alpha\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ \beta^2-\alpha^2 & 2\alpha\beta \end{pmatrix}$

ii. Για το γινόμενο $B \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+\alpha\beta & \alpha\beta-\beta^2 \\ \alpha\beta-\alpha^2 & \beta^2+\alpha\beta \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι εν γένει έχουμε $AB \neq BA$.

13. Θεωρούμε τον πίνακα: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Να υπολογιστούν οι i)** A^2 **και ii)** A^3.

Λύση: Έχουμε:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+1\cdot1+0\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+1\cdot1 \\ 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii. $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. Αν $M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$ **δείξετε ότι: i)** $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha+\beta)$

ii) $M(\alpha)M(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **iii)** $M^\nu(\alpha) = M(\nu\alpha)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

Λύση: i) Είναι $M(\alpha) \cdot M(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ \alpha+\beta & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha+\beta & 1 \end{pmatrix} =$

$= M(\alpha+\beta)$.

ii) $M(\alpha)M(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ή και αν στην (i) θέσουμε όπου β το $-\alpha$ έχουμε $M(\alpha+\beta) = M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) Θα αποδείξουμε επαγωγικά την σχέση. Για $\nu = 1$ ισχύει γιατί $M(\alpha) = M(\alpha)$. Έστω ότι για $\nu = \kappa$ ισχύει $M^{\kappa}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}^{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa\alpha & 1 \end{pmatrix} = M(\kappa\alpha)$ (1), και θα αποδείξουμε ότι για $\nu = \kappa+1$ ισχύει:

$$M^{\kappa+1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}^{\kappa+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\kappa+1)\alpha & 1 \end{pmatrix} = M((\kappa+1)\alpha)$$

Από την (1) και την $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ με πολλαπλασιασμό παίρνουμε

$$M^{\kappa}(\alpha)M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa\alpha+\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\kappa+1)\alpha & 1 \end{pmatrix} =$$

$= M((\kappa+1)\alpha)$. Δηλαδή $M^{\kappa+1}(\alpha) = M((\kappa+1)\alpha)$.

15. Θεωρούμε τους πίνακες: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2x+1 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 3y+1 \end{pmatrix}$

Να βρεθούν τα x,y ώστε $B+2A = 0$

Λύση: Έχουμε: $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 3y+1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2x+1 & y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 3y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4x+2 & 2y \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow 4x+6 = 0,\ 5y+1 = 0 \leftrightarrow$$

$\leftrightarrow x = -3/2,\ y = -1/5 \leftrightarrow (x,y) = (-3/2, -1/5)$

16. Θεωρούμε τους πίνακες: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστεί ο $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta \end{pmatrix}$ ώστε $A+2B-\Gamma = 0$

Λύση: Έχουμε $A+2B-\Gamma = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} = 0$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-\alpha & \beta \\ 6-\gamma & 3-\delta \\ 12-\varepsilon & 3-\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 5-\alpha = 0 & & \beta = 0 \\ 6-\gamma = 0 & \wedge & 3-\delta = 0 \\ 12-\varepsilon = 0 & & 3-\zeta = 0 \end{array} \right. \leftrightarrow$$

$\leftrightarrow \alpha = 5,\ \beta = 0,\ \gamma = 6,\ \delta = 3,\ \varepsilon = 12,\ \zeta = 3 \leftrightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 3 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

17. Να βρεθούν οι τετραγωνικοί πίνακες τάξης (2x2) που πληρούν το σύστημα: Σ: $\begin{cases} 2X+3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ X+Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Λύση: Το (Σ) $\leftrightarrow \begin{cases} 2X+3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ -2X-2Y = -2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\ X+Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} Y = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

18. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

Λύση: Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το συμμετρικό του $\frac{1}{2}$ που είναι το 2 και έχουμε:

$$2(\tfrac{1}{2}X) = 2\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$$

19. Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Να δειχτεί ότι ισχύει: AB = BA.

Λύση: Έχουμε: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ και όμοια

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow AB = BA \ (1)$$

Σημείωση: Οι πίνακες που πληρούν την (1), λέγονται **εναλλακτικοί**, και γι'

αυτούς ισχύουν γνωστές αλγεβρικές ταυτότητες.

20. Να δειχτεί ότι οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι εναλλακτικοί.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι AB = BA.

Όμως $AB = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+\alpha\cdot0 & 1\cdot\beta+\alpha\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot\beta+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και

$BA = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+\beta\cdot0 & 1\cdot\alpha+\beta\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot\alpha+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow AB = BA$

21. Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$

Να δειχτεί ότι οι A,B είναι εναλλακτικοί.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι AB = BA

Έχουμε $AB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x+\beta y & \alpha y+\beta x \\ \beta x+\alpha y & \beta y+\alpha x \end{pmatrix}$ και

$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\alpha+y\beta & x\beta+y\alpha \\ y\alpha+x\beta & y\beta+x\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \ldots$

22. Να λυθεί η εξίσωση: E: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Λύση: Η (E) $\leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+z \\ -x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x+y+z = 9 \\ 2x-y+z = 4 \\ -x-y+z = 1 \end{array} \right. \leftrightarrow x = 1,\ y = 3,$ $z = 5$.

23. Αν $M(\theta) = \begin{pmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{pmatrix}$ Δείξετε ότι: i) $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha+\beta)$

ii) $M(\alpha)M(\alpha) = M(2\alpha)$, iii) $M^{\nu}(\alpha) = M(\nu\alpha)$

Λύση: i) Είναι $M(\alpha)M(\beta) = \begin{pmatrix} \text{συν}\alpha & -\text{ημ}\alpha \\ \text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{συν}\beta & -\text{ημ}\beta \\ \text{ημ}\beta & \text{συν}\beta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \text{συν}\alpha\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\text{ημ}\beta & -\text{συν}\alpha\text{ημ}\beta-\text{συν}\beta\text{ημ}\alpha \\ \text{ημ}\alpha\text{συν}\beta+\text{συν}\alpha\text{ημ}\beta & -\text{ημ}\alpha\text{ημ}\beta+\text{συν}\alpha\text{συν}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}(\alpha+\beta) & -\text{ημ}(\alpha+\beta) \\ \text{ημ}(\alpha+\beta) & \text{συν}(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$

$= M(\alpha+\beta)$

ii) Θέτουμε στην (i) όπου β το α και έχουμε:

$$M(\alpha)M(\alpha) = M^2(\alpha) = \begin{pmatrix} \text{συν}2\alpha & -\text{ημ}2\alpha \\ \text{ημ}2\alpha & \text{συν}2\alpha \end{pmatrix} = M(2\alpha)$$

iii) Αποδείχνουμε επαγωγικά τη σχέση και έχουμε για ν = 2 ισχύει λόγω της (ii).

Έστω ότι για ν = κ ισχύει $M^{\kappa}(\alpha) = \begin{pmatrix} \text{συν}(\kappa\alpha) & -\text{ημ}(\kappa\alpha) \\ \text{ημ}(\kappa\alpha) & \text{συν}(\kappa\alpha) \end{pmatrix} = M(\kappa\alpha)$ (1)

και θα δείξουμε ότι για ν = κ+1 ισχύει:

$$M^{\kappa+1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \text{συν}(\kappa+1)\alpha & -\text{ημ}(\kappa+1)\alpha \\ \text{ημ}(\kappa+1)\alpha & \text{συν}(\kappa+1)\alpha \end{pmatrix} = M((\kappa+1)\alpha)$$

Θεωρώ το γινόμενο $M^{\kappa}(\alpha)M(\alpha) = \begin{pmatrix} \text{συν}(\kappa\alpha) & -\text{ημ}(\kappa\alpha) \\ \text{ημ}(\kappa\alpha) & \text{συν}(\kappa\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{συν}\alpha & -\text{ημ}\alpha \\ \text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \text{συν}(\kappa\alpha)\text{συν}\alpha-\text{ημ}(\kappa\alpha)\text{ημ}\alpha & -(\text{ημ}(\kappa\alpha)\text{συν}\alpha-\text{συν}(\kappa\alpha)\text{ημ}\alpha) \\ \text{ημ}(\kappa\alpha)\text{συν}\alpha+\text{συν}(\kappa\alpha)\text{ημ}\alpha & \text{συν}(\kappa\alpha)\text{συν}\alpha-\text{ημ}(\kappa\alpha)\text{ημ}\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{συν}(\kappa+1)\alpha & -\text{ημ}(\kappa+1)\alpha \\ \text{ημ}(\kappa+1)\alpha & \text{συν}(\kappa+1)\alpha \end{pmatrix} = M((\kappa+1)\alpha)$$

24. Να βρεθούν οι τετραγωνικοί πίνακες τάξης (2x2) που πληρούν το σύστημα: Σ:

$$\begin{cases} 2x+3y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ x+y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Λύση: Το (Σ) $\longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ -2x-2y=-2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\ x+y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} y = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \\ x = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \\ y = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

25. Αν για τον τετραγωνικό πίνακα $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}$ ισχύει

$||A|| = |x|+|y|+|z|+|\omega|$ δείξετε ότι: $||A+B|| \le ||A||+||B||$ όπου B 2x2 πίνακας.

Λύση: Αν $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ είναι $A+B = \begin{pmatrix} x+\alpha & y+\beta \\ z+\gamma & \omega+\delta \end{pmatrix}$

Άρα $||A+B|| = |x+\alpha|+|y+\beta|+|z+\gamma|+|\omega+\delta|$ και επειδή $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$ $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ είναι: $||A+B|| \le |x|+|\alpha|+|y|+|\beta|+|z|+|\gamma|+|\omega|+|\delta| = ||A||+||B||$

Άρα είναι $||A+B|| \le ||A||+||B||$.

26. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Όπου X,Y πίνακες τάξης (2×1).

Λύση: Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix}$ τότε το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} \end{matrix}\right. \iff \begin{matrix} \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z+\omega \\ 3z+2\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 4x-2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4z-3\omega \\ z+\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\iff \left|\begin{matrix} x+y+z+\omega = 0 \\ 2x-y+3z+2\omega = -8 \\ 3x-2y-4z-3\omega = 10 \\ 4x-2y+z+\omega = -3 \end{matrix}\right. \iff \dots \iff$$

27. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ και I_2,0 είναι ο μοναδιαίος 2x2 και ο μηδενικός 2x2

Δείξετε ότι: $A^2+2A-11I_2 = 0$ (1)

Λύση: Το πρώτο μέλος της (1) γίνεται:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^2 +2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} -11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2-11 & -4+4+0 \\ -8+8+0 & 17-6-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

28. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ και $X = \begin{pmatrix} 1 & y \\ z & \omega \end{pmatrix}$, να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πίνακες X τέτοιοι ώστε AX = XA.

Λύση: Η σχέση AX = XA $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ z & \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & y\\ z & \omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-2z & y-2\omega\\ -3+4z & -3y+4\omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-3y & -2+4y\\ z-3\omega & -2z+4\omega\end{pmatrix} \Leftrightarrow$ με το σύστημα

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}1-2z = 1-3y\\ y-2\omega = 4y-2\\ 4z-3 = z-3\omega\\ 4\omega-3y = 4\omega-2z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}3y-2z = 0\\ 3y+2\omega = 2\\ 3z+3\omega = 3\\ 3y-2z = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}3y-2z = 0\\ z+\omega = 1\\ 3y+2\omega = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}z+\omega = 1\\ 3y-2z = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\omega = 1-z\\ y = \frac{2}{3}z\end{array}\right. \quad z = \text{τυχαίος}$$

'Αρα για κάθε z υπάρχουν ω, y και επομένως οι πίνακες X που επαληθεύουν την AX = XB είναι άπειροι.

29. Αν A και B πίνακες 2x2 και $A^2 = A$, $B^2 = B$ δείξετε ότι $(A+B)^2 = A+B$ $\Leftrightarrow$ AB = BA = 0.

Λύση: Αν AB = BA = 0 $\Rightarrow (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 =$ $= A^2+B^2 = A+B$. 'Εστω τώρα $(A+B)^2 = A+B \Leftrightarrow (A+B)(A+B) = A+B$ $\Leftrightarrow A^2+AB+BA+B^2 = A+B \Leftrightarrow A+AB+BA+B = A+B \Leftrightarrow AB+BA = 0$ (1)
Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) από δεξιά και αριστερά με A και έχουμε: $A^2B+ABA = 0$ (2) και $ABA+BA^2 = 0$ (3).
Η (2) και (3) γίνονται $AB+ABA = 0$ και $ABA+BA = 0 \Rightarrow AB = BA$ (4).
Από την (4) και (1) παίρνουμε AB = 0 = BA.

30. Δείξετε ότι για κάθε πίνακα $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ 2x2 ισχύει η σχέση: $A^2-(\alpha+\delta)A+(\alpha\delta-\beta\gamma)I = 0$ (1).
Σε συνέχεια αν $A = \begin{pmatrix}-5 & -7\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ δείξετε ότι: $A^\nu+A^{\nu-1}+A^{\nu-2} = 0$, $\nu \geq 2$ (2)

Λύση: Η (1) αν αντικαταστήσουμε τον πίνακα A και κάνουμε τις πράξεις είναι φανερή.

Είναι: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^2 - (\alpha+\delta)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} + (\alpha\delta-\beta\gamma)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha^2+\alpha\delta & \alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\delta\gamma & \alpha\delta+\delta^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\delta-\beta\gamma & 0\\ 0 & \alpha\delta-\beta\gamma\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \beta\gamma+\delta^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha^2+\alpha\delta & \alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\delta\gamma & \alpha\delta+\delta^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\delta-\beta\gamma & 0\\ 0 & \alpha\delta-\beta\gamma\end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta\gamma-\alpha^2-\alpha\delta+\alpha\delta-\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta-\alpha\beta-\beta\delta \\ \alpha\gamma+\gamma\delta-\alpha\gamma-\delta\gamma & \beta\gamma+\delta^2-\alpha\delta-\delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν στην (1) θέσουμε $\alpha = -5$, $\beta = -7$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$ παίρνουμε την $A^2+A+I = 0$ και αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της με τον πίνακα $A^{\nu-2}$ έχουμε: $A^{\nu-2}(A^2+A+I) = 0 \rightarrow A^{\nu}+A^{\nu-1}+A^{\nu-2} = 0$

30α. **Έστω οι πίνακες $H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu x & \eta\mu x \\ \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \end{pmatrix}$, $\Sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu x & -\eta\mu x \\ -\eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbb{R}$. Δείξετε ότι: i) $H^2(x)+\Sigma^2(x) = I$, ii) Να λυθεί η εξίσωση: $\Sigma^2(x)-H^2(x) = 0$.**

Λύση: i) Είναι $H^2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu x & \eta\mu x \\ \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu x & \eta\mu x \\ \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x & 2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x \\ 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x & \eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \eta\mu 2x \\ \eta\mu 2x & 1 \end{pmatrix}$$

και $\Sigma^2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu x & -\eta\mu x \\ -\eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu x & -\eta\mu x \\ -\eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x & -2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \\ -2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x & \eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\eta\mu 2x \\ -\eta\mu 2x & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα $H^2(x)+\Sigma^2(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

ii) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\eta\mu 2x \\ -\eta\mu 2x & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \eta\mu 2x \\ \eta\mu 2x & 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2\eta\mu 2x \\ -2\eta\mu 2x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \eta\mu 2x = 0 \leftrightarrow 2x = \kappa\pi,\ \kappa \in Z$$

$$\leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa \in Z.$$

30β. **Αν οι πίνακες A,B 2x2 ικανοποιούν τις σχέσεις $AB = A$ και $BA = B$ δείξετε ότι $A^2 = A$ και $B^2 = B$.**

Λύση: Από την σχέση $AB = A \rightarrow (AB)A = AA \rightarrow A(BA) = A^2 \rightarrow A = A^2$

Όμοια από την σχέση $BA = B \rightarrow (BA)B = B^2 \rightarrow B(AB) = B^2 \rightarrow B = B^2$.

30γ. **Δείξετε ότι αν οι 3x3 πίνακες A,B επαληθεύουν την σχέση: $(A-\lambda I_3)(B-\lambda I_3) = (B-\lambda I_3)(A-\lambda I_3) \rightarrow AB = BA$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και I_3 ο μοναδιαίος 3x3.**

Λύση: Έχουμε $(A-\lambda I_3)(B-\lambda I_3) = (B-\lambda I_3)(A-\lambda I_3) \Rightarrow$
$\Rightarrow AB-A\lambda I_3-\lambda I_3B+\lambda^2 I_3 = BA-B\lambda I_3-\lambda I_3A+\lambda^2 I_3 \Rightarrow AB = BA.$

31. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο A^ν.

Λύση: Έχουμε: $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3\cdot A$$

$$A^3 = A^2A = 3^?\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^?\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^2\cdot A$$

Έστω $A^k = 3^{k-1}A \Rightarrow A^{k+1} = 3^{k-1}3A = 3^kA$ δηλ. ισχύει για $\nu = \kappa+1 \Rightarrow \ldots$

32. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστεί ο A^ν.

Λύση: Έχουμε $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A$

Έστω $A^k = A \Rightarrow A^{k+1} = A^kA = A^2 = A$ δηλ. ισχύει για $\nu = \kappa+1 \Rightarrow A^\nu = A$.

33. Θεωρούμε τους πίνακες: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
και $B = A-I$.

i. Να υπολογιστεί ο B^ν, $\nu\in\mathbb{N}$
ii. Να υπολογιστεί ο A^ν, $\nu\in\mathbb{N}$

Λύση: $B^0 = I$ και $B^1 = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = BB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \forall\ \nu \geq 3,\ B^{\nu} = 0.$

ii. Έχουμε $A^{\nu} = (B+I)^{\nu} = I^{\nu} + \binom{\nu}{1} I^{\nu-1}B + \binom{\nu}{2} I^{\nu-2}B^2 = I + \nu B + \frac{\nu(\nu-1)}{2} B^2$

$$\Rightarrow A^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \nu & \frac{\nu(\nu-1)}{2} \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

34. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Δείξετε ότι:

i) $A^{\nu} = 2^{\nu-1}A$, ii) $B^{\nu} = 2^{\nu-1}\alpha^{\nu}A$.

Λύση: Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της επαγωγής (i) για ν = 1 είναι $A^1 = 2^0 A$ $\Rightarrow A = A$ ισχύει. Έστω ότι για ν = κ ισχύει $A^{k} = 2^{k-1}A$ (1) και θα αποδείξουμε ότι για ν = κ+1 ισχύει $A^{k+1} = 2^{k}A$ (2). Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με A και έχουμε: $A^{k}A = A^{k+1} = 2^{k-1}A^2$ (3).

Αλλά $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$ και η (3) γίνεται:

$A^{k+1} = 2^{k-1}2A = 2^{k}A$ επομένως η (1) ισχύει $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$.

ii) Όμοια για ν = 1 ισχύει γιατί είναι $B = \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = B$

Έστω ότι για ν = κ ισχύει $B^{k} = 2^{k-1}\alpha^{k}A$ και θα δείξουμε ότι για ν = κ+1 ισχύει $B^{k+1} = 2^{k}\alpha^{k+1}A$.

Είναι όμως $B^{k+1} = B^{k}B = 2^{k-1}\alpha^{k}AB = 2^{k-1}\alpha^{k}A\alpha A = 2^{k-1}\alpha^{k+1}A^2 = 2^{k-1}\alpha^{k+1}2A =$ $= 2^{k}\alpha^{k+1}A$. Επομένως η (ii) ισχύει $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$.

35. Αν A ένας πίνακας 2x2 και $A^2 = 0$ δείξετε ότι:

(1) $A(I_2+A)^{\nu} = A$ (I_2 = μοναδιαίος 2x2), $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση: Για ν = 1 είναι $A(I_2+A) = AI_2 + A^2 = AI_2 + 0 = A$ και η (1) ισχύει.

Έστω ότι για ν = κ ισχύει $A(I_2+A)^{k} = A$ (2).

Θα δείξουμε ότι για ν = κ+1 ισχύει $A(I_2+A)^{k+1} = A$ (3).

Η (2) γίνεται $A(I_2+A)^{k}(I_2+A) = A(I_2+A) \Leftrightarrow A(I_2+A)^{k+1} = AI_2 + A^2$ $\Leftrightarrow A(I_2+A)^{k+1} = AI_2 + 0 = AI_2 = A.$

Άρα η (3) ισχύει επομένως η (1) ισχύει για κάθε φυσικό ν.

36. Αν A ένας πίνακας νxμ δείξετε ότι:

i) $0 \cdot A = 0$ iii) $(-1)A = -A$

ii) $\lambda \cdot 0 = 0$ iv) $(-\lambda)A = \lambda(-A)$

Λύση: i) Ισχύει $(\lambda-\lambda) = 0 \rightarrow (\lambda-\lambda)A = 0A \rightarrow \lambda A + (-\lambda A) = 0A \rightarrow 0 = 0A$ γιατί οι πίνακες λA και $(-\lambda A)$ είναι αντίθετοι.

ii) Ισχύει $A+0 = A \rightarrow \lambda(A+0) = \lambda A \rightarrow \lambda A + \lambda 0 = \lambda A \rightarrow (-\lambda A)+(\lambda A+\lambda 0) =$
$= (-\lambda A)+(\lambda A) \rightarrow [(-\lambda A)+\lambda A]+\lambda 0 = -[(\lambda A)+\lambda A] \rightarrow 0+\lambda 0 = 0 \rightarrow \lambda 0 = 0$

iii) Είναι $0A = 0 \rightarrow [(-1)+1]A = 0 \rightarrow (-1)A+A = 0 \rightarrow$
$\rightarrow [(-1)A+A]+(-A) = 0-A \rightarrow (-1)A[A+(-A)] = -A \rightarrow (-1)A+0 = -A$
$\rightarrow (-1)A = -A$.

iv) Γνωρίζουμε ότι $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ισχύει $\mu(\lambda A) = (\mu\lambda)A$ οπότε με $\mu = -1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ παίρνουμε: $((-1)\lambda)A \qquad = \lambda(-1)A = \lambda[(-1)A] = \lambda(-A)$.

37. Αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι τότε:

i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **ii)** $(A^{-1})^{-1} = A$

Λύση: i) Ισχύει $(AB)\cdot(AB)^{-1} = I$ και λόγω της (i) αρκεί να δείξουμε ότι $(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = I$ και λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας αρκεί να δείξουμε ότι: $[(AB)B^{-1}]A^{-1} = I \rightarrow [A(BB^{-1})]A^{-1} = I \rightarrow (AI)A^{-1} = I \rightarrow AA^{-1} = I$ που είναι αληθινό.

Άρα ο αντίστροφος του πίνακα AB είναι ο πίνακας $B^{-1}A^{-1}$.

Γενικότερα ισχύει: $(A_1A_2\ldots A_\nu)^{-1} = A_\nu^{-1}A_{\nu-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

ii) Επειδή ισχύει $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ τότε συμπεραίνουμε ότι ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και ότι ο αντίστροφός του είναι ο A δηλαδή $(A^{-1})^{-1} = A$.

38. Αν A,B,Γ πίνακες κxν και ο Γ είναι αντιστρέψιμος δείξετε ότι:

i) $A\Gamma = B\Gamma \rightarrow A = B$

ii) $\Gamma\cdot A = \Gamma\cdot B \rightarrow A = B$ **(ιδιότητα διαγραφής).**

Λύση: i) Αφού ο Γ είναι αντιστρέψιμος υπάρχει ο Γ^{-1}. Έτσι αν πολλαπλασιάσουμε από δεξιά τα μέλη της (i) με Γ^{-1} έχουμε:
$(A\Gamma)\Gamma^{-1} = (B\Gamma)\Gamma^{-1} \rightarrow A(\Gamma\Gamma^{-1}) = B(\Gamma\Gamma^{-1}) \rightarrow AI_\nu = BI_\nu \rightarrow A = B$

ii) Είναι $\Gamma A = \Gamma B \rightarrow \Gamma^{-1}(\Gamma A) = \Gamma^{-1}(\Gamma B) \rightarrow (\Gamma^{-1}\Gamma)A = (\Gamma^{-1}\Gamma)B \rightarrow I_\nu A = I_\nu B$
$\rightarrow A = B$.

39. Αν X πίνακας 2x2 αντιστρέψιμος και αν $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **Να βρείτε τον πίνακα X.**

Λύση: Επειδή ο πίνακας X είναι αντιστρέψιμος ισχύει
$$(X^{-1})^{-1} = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = X$$

Αρκεί επομένως να βρούμε τον αντίστροφο του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ που θα είναι ο πίνακας X.

Ας υποθέσουμε ότι ο αντίστροφος του $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας

$X' = \begin{pmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{pmatrix}$ τότε θα είναι:

$$X' \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = I \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x-y & 3x+2y \\ \omega-\varphi & 3\omega+2\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \text{ με το σύστημα}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x-y = 1 \\ 3x+2y = 0 \\ \omega-\varphi = 0 \\ 3\omega+2\varphi = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ 5y = -3 \\ \omega = \varphi \\ 5\omega = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \\ \varphi = \frac{1}{5} \\ \omega = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Άρα ο πίνακας $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

40. Αν $D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ και ο 2x2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος τότε ισχύει: $A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ όπου $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

Η D ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα Α.

Λύση: Έστω $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{pmatrix}$ ο αντίστροφος του A τότε ισχύει: $A'A = AA' = I$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x+\gamma y & \beta x+\delta y \\ \alpha\omega+\gamma\varphi & \beta\omega+\delta\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x+\gamma y = 1 \\ \beta x+\delta y = 0 \\ \alpha\omega+\gamma\varphi = 0 \\ \beta\omega+\delta\varphi = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} |\alpha|+|\gamma| \neq 0 \\ x = \frac{1-\gamma y}{\alpha} \\ \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta\gamma y}{\alpha} + \delta y = 0 \\ \omega = -\frac{\gamma\varphi}{\alpha} \\ -\frac{\gamma\beta\varphi}{\alpha} + \delta\varphi = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} |\alpha|+|\gamma| \neq 0 \\ y(\alpha\delta-\beta\gamma) = -\beta \\ x = \frac{1-\gamma y}{\alpha} \\ \omega = -\frac{\gamma\varphi}{\alpha} \\ \varphi(\alpha\delta-\beta\gamma) = \alpha \end{cases} \longleftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} |\alpha|+|\gamma| \neq 0, D \neq 0 \\ y = \dfrac{-\beta}{D} \\ x = \dfrac{1-\gamma\dfrac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}{\alpha} \\ \varphi = \dfrac{\alpha}{D} \\ \omega = -\dfrac{\gamma\dfrac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}}{\alpha} \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} |\alpha|+|\gamma| \neq 0, D \neq 0 \\ y = \dfrac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma} \\ x = \dfrac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma} \\ \varphi = \dfrac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma} \\ \omega = -\dfrac{\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma} \end{array}\right.$$

Άρα υπάρχει ο αντίστροφος του A και είναι ο

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{D} & \dfrac{-\beta}{D} \\ \dfrac{-\gamma}{D} & \dfrac{\alpha}{D} \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

Εύκολο είναι να αποδείξουμε ότι ο πίνακας A^{-1} επαληθεύει την σχέση: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

41. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $X\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} x & y \\ \omega & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

Λύση: 1. 1ος τρόπος: Υποθέτουμε ότι ο X είναι ο πίνακας $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 2x2 οπότε έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -\alpha+2\gamma & -\beta+2\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} -\alpha+2\gamma = 2 \\ -\beta+2\delta = 1 \\ \gamma = 0, \delta = 3 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \\ \gamma = 0, \delta = 3 \end{array}\right.$$

Άρα ο πίνακας $X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2ος τρόπος: Με τον αντίστροφο πίνακα.

Αν θέσουμε $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ τότε η (1) γίνεται:

(α) $AX = B$ και επειδή η ορίζουσα του A είναι $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

υπάρχει ο αντίστροφος του A και είναι $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα η εξίσωση (α) $\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. **1ος τρόπος:** Με την αλγεβρική μέθοδο αναζητώντας ένα πίνακα 2×2.

2ος τρόπος: Ο πίνακας $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος γιατί η ορίζουσα του

$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2+4 = 2 \neq 0$

και η (2) $\Leftrightarrow X\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$\Leftrightarrow XI = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -2-1 \\ 1+\frac{3}{2} & -4-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \frac{5}{2} & -7 \end{pmatrix}$

3. **1ος τρόπος:** με την αλγεβρική μέθοδο.

2ος τρόπος: Αν θέσουμε: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

τότε η εξίσωση γράφεται $AXB = \Gamma$ (1).

Επειδή δε οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι και είναι:

$A^{-1} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Η (1) $\Leftrightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}\Gamma B^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1}A)XBB^{-1} = A^{-1}\Gamma B^{-1}$

$\Leftrightarrow IXBB^{-1} = A^{-1}\Gamma B^{-1} \Leftrightarrow IXI = A^{-1}\Gamma B^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}IB^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{14}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

4. **1ος τρόπος:** Η εξίσωση ισοδυναμεί με την $\begin{pmatrix} 7x+6z & 7y+6\omega \\ 6x+7z & 6y+7\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 7x+6z = 1 \\ 7y+6\omega = 0 \\ 6x+7z = 0 \\ 6y+7\omega = 1 \end{array} \right. \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z = -\frac{6}{13} \\ y = -\frac{6\omega}{7} \\ x = -\frac{7z}{6} \\ \omega = \frac{7}{13} \end{array} \right. \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z = -\frac{6}{13} \\ y = -\frac{6}{13} \\ x = \frac{7}{13} \\ \omega = \frac{7}{13} \end{array} \right.$$

Άρα λύση της εξίσωσης είναι ο πίνακας:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

2ος τρόπος: Επειδή $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = I$ ο πίνακας $\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}$ είναι ο αντίστροφος του $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ που υπάρχει γιατί η ορίζουσα τού είναι $\neq 0$, είναι δε $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}$

5. **1ος τρόπος:** Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό και υπολογίζουμε τα x,y,z,ω από την λύση του συστήματος (το οποίο είναι αδύνατο). Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

2ος τρόπος: Με τον αντίστροφο πίνακα:

Επειδή ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ δεν αντιστρέφεται γιατί η ορίζουσα του είναι 0 η εξίσωση είναι αδύνατη ή αόριστη και επειδή ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

6. **1ος τρόπος:** Με την αλγεβρική μέθοδο

Κάνουμε τις πράξεις και η (6) $\leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \leftrightarrow$ με το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} x-5y = -6 \\ x+y = 6 \end{array} \right. \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -6y = -12 \\ x+y = 6 \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

Άρα λύση της εξίσωσης είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

2ος τρόπος: Με τον αντίστροφο πίνακα:

Επειδή η ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

υπάρχει ο αντίστροφός του και είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

και η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. **1ος τρόπος:** Επειδή το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι ένας πίνακας 2x1 θα πρέπει και το πρώτο μέλος να είναι ένας πίνακας 2x1. Επομένως θα πρέπει ο πίνακας X αν υπάρχει να είναι 2x1 και έστω ότι είναι ο

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ τότε η (7) $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow$ με το σύστημα

$$\left.\begin{matrix} 2x+3y = 5 \\ 3x+y = 4 \end{matrix}\right| \leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = \frac{5-3y}{2} \\ 3\,\frac{5-3y}{2} + y = 4 \end{matrix}\right| \leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

Άρα λύση της εξίσωσης είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2ος τρόπος: Επειδή ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος γιατί έχει ορίζουσα $D \neq 0$ και είναι $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow IX = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

42. Να δειχτεί ότι οι πίνακες: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

και $B = \begin{pmatrix} 13/48 & -1/48 & 5/48 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/48 & 11/48 & -7/48 \end{pmatrix}$ **είναι αντίστροφοι.**

Λύση: Αρκεί να δείξουμε $A \cdot B = I$.

'Ομως $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/48 & -1/48 & 5/48 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/48 & 11/48 & -7/48 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 39/48+1/6+1/48 & -3/48-1/6+11/48 & 15/48-1/6-7/48 \\ 13/48-2/6+3/48 & -1/48+2/6+33/48 & 5/48+2/6-21/48 \\ 26/48-3/6-2/48 & -2/48+3/6-22/48 & 10/48+3/6+14/48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= I_3$.

43. Να δειχτεί ότι οι πίνακες: $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}$ $\quad B = \frac{1}{x\omega - yz} \begin{pmatrix} \omega & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$

είναι αντίστροφοι.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε $AB = I_2$.

'Ομως $AB = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{x\omega-yz} & -\frac{y}{x\omega-yz} \\ -\frac{z}{x\omega-yz} & \frac{x}{x\omega-yz} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{x\omega}{x\omega-yz} - \frac{yz}{x\omega-yz} & -\frac{xy}{x\omega-yz} + \frac{xy}{x\omega-yz} \\ \frac{z\omega}{x\omega-yz} - \frac{\omega z}{x\omega-yz} & -\frac{yz}{x\omega-yz} + \frac{x\omega}{x\omega-yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

44. Αν $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ **και** $|\alpha| > |\beta|$, $|\delta| > |\gamma|$ **τότε ο X είναι αντιστρέψιμος.**

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι η ορίζουσα $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ του X είναι $\neq 0$.
'Εστω $D = 0 \Longleftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \Longrightarrow |\alpha\delta| = |\beta\gamma| \Longleftrightarrow |\alpha||\delta| = |\beta||\gamma|$ (1) αλλά από τα δοσμένα με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε: $|\alpha||\delta| > |\beta||\gamma|$ (2). Από την (1) και (2) έχουμε το άτοπο. Επομένως είναι $D \neq 0$ και ο πίνακας X είναι αντιστρέψιμος.

45. Να δειχτεί ότι οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και } B = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$ **είναι αντίστροφοι.**

Λύση: Αρκεί να δείξουμε $A\cdot B = I$.

$$\text{'Ομως } A\cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5/3+8/3+0 & -10/3+4-2/3 & 0+4/3-4/3 \\ 4/3-4/3+0 & 8/3-2+1/3 & 0-2/3+2/3 \\ -2/3+2/3+0 & -4/3+1+1/3 & 0+1/3+2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

46. Δείξετε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} συνθ+ημθ & 2ημθ \\ -ημθ & συνθ-ημθ \end{pmatrix}$ **είναι αντιστρέψιμος.**

Λύση: Για να είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος πρέπει η ορίζουσα του A να είναι διάφορη από το μηδέν.

$$\text{Είναι: } \begin{vmatrix} συνθ+ημθ & 2ημθ \\ -ημθ & συνθ-ημθ \end{vmatrix} = συν^2θ-ημ^2θ+2ημ^2θ = συν^2θ+ημ^2θ = 1 \neq 0$$

'Αρα ο πίνακας A αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του είναι

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} συνθ-ημθ & -2ημθ \\ ημθ & συνθ+ημθ \end{pmatrix}$$

47. Να λυθεί με την μέθοδο των πινάκων το σύστημα: $\begin{cases} 2x+3y = -11 \\ x-y = 7 \end{cases}$

Λύση: Το σύστημα γράφεται: $\begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

και αν θέσουμε: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix}$ το σύστημα γράφεται:

$AX = B$ (1). Επειδή δε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος η εξίσωση (1) γράφεται $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \leftrightarrow X = A^{-1}B$ (2)

$$\text{είναι δε } A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Επομένως η (2) δίνει: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{10}{5} \\ -\frac{25}{5} \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Άρα λύση του συστήματος είναι η $x = 2$, $y = -5$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & +8 \end{bmatrix}$ Απ. α: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

β) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ β : $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$

γ) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ γ: Δεν γίνεται.

δ) $2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ δ: $\begin{bmatrix} -3 & 13 & 2 \\ 0 & -8 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

2. Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\Pi = A - 3B + 2\Gamma - 4\Delta$ Απ. $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$

3. Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν οι δυνάμεις A^2, A^3, A^4 Απ. $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 27 & 37 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 81 & 175 \\ 0 & 256 \end{bmatrix}$

4. Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Να δείξετε ότι $A^\nu = \alpha^\nu \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2\mu+3 & 1 \\ 3\mu-2 & 5 & 5\mu \\ 1 & \mu^2 & 2 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο μ, ώστε ο Α να είναι συμμετρικός. Απ. $\mu = 5$

6. Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & \lambda^2-16 & 10 \\ -5 & \lambda-6 & 0 \end{bmatrix}$. Να προσδιοριστεί ο λ έτσι ώστε ο Α να

είναι αντισυμμετρικός. **Απ.** $\lambda = -4$

7. Αν $\begin{bmatrix} 2x & -4y \\ 2z & -\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & -4 \\ -3 & 4\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x+2y \\ z-\omega & 10 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν τα x,y,z,ω **Απ.** $(x,y,z,\omega) = (4,0,-1,-2)$

8. Αν $A = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 2x+10 & 4y \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -2 & +\frac{8}{3} \\ -x-2y & +2 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν τα x,y έτσι ώστε $A-3B = 0$ **Απ.** $(x,y) = (-\frac{19}{5}, \frac{3}{2})$

9. Αν $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} + X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Να βρεθεί ο πίνακας X. **Απ.** $X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

10. Αν $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ δείξετε ότι $AB \neq BA$

Απ. $\exists AB$, $\nexists BA$

11. Αν οι τετραγωνικοί πίνακες A και B επαληθεύουν τις σχέσεις

$2A+3B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ και $A-B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν οι πίνακες A και B

Απ. $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,

$B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

12. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3x^4-4x^2+2 & 4x^2+7x & 3x^2+8x \\ 7x^3-12+4x & 3 & -5x^4+2x \\ 4x^2 & 6x+12 & x^4-6x^3+1 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν οι πίνακες A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 έτσι ώστε:

$A = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4$.

Απ. Είναι $A = \begin{bmatrix} 3x^4+0x^3-4x^2+2 & 4x^2+7x & 3x^2+8x \\ 0x^4+7x^3+4x^2-12 & 3 & -5x^4+2x \\ 0x^4+0x^3+4x^2+0 & 6x+12 & x^4-6x^3+1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $X+\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$ Απ. 1: $X=[-27]$

2. $X\begin{bmatrix}1 & -1\\-2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$ 2: $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\10 & 3\end{bmatrix}$

3. $X\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ 3: $\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & -4\\0 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\end{bmatrix}$ 4: Αδύνατη

5. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-2 & 3 & 2\\1 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\4\end{bmatrix}$ 5: $\frac{1}{11}\begin{bmatrix}21\\10\\-5\end{bmatrix}$

6. $X(-1\ \ 3)=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot(-1\ \ 4)$ 6: Αδύνατη

7. $\begin{bmatrix}2 & -1\\-6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\z & \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 7: $\begin{bmatrix}2 & 1/2\\3 & 1\end{bmatrix}$

8. $2\begin{bmatrix}1 & -2 & +2\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}+4X=\begin{bmatrix}0 & -1 & 6\\2 & 4 & +1\\6 & 3 & 0\end{bmatrix}$ 8: Αδύνατη.

14. Αν $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\\frac{1}{2} & 0 & 2\\\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$ και I_3, 0 είναι ο μοναδιαίος και μηδενικός πίνακας 3×3. Να προσδιοριστούν τα x και y έτσι ώστε:

$(A-xI)(A-yI)=0$ Απ.: $(x,y)=(2,-1)$, $(x,y)=(-1,2)$

15. Αν $\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}X=X\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας X. Απ.: $X=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

16. Αν $A+B=I$ δείξετε ότι $AB=0 \Longleftrightarrow A^2=A$ και $B^2=B$

17. Αν $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\0 & \alpha\end{bmatrix}$ δείξετε ότι $A^\nu=\alpha^\nu\begin{bmatrix}1 & \nu\beta\\0 & 1\end{bmatrix}$

18. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Απ.: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

19. Να λυθεί η εξίσωση $A+X = XA$ αν ισχύει $A^2 = 2A$. **Απ.:** $X = A$

20. Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} \alpha\gamma+\delta & \beta\gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \alpha\varepsilon+\zeta & \beta\varepsilon \\ \varepsilon & \zeta \end{bmatrix}$ δείξετε ότι:

i) $AB = BA$, ii) $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$, iii) $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$

21. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ -\eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix}$ να υπολογιστεί το άθροισμα

$\Sigma_\nu = A^1+A^2+\dots+A^\nu$

Απ.: $\Sigma = \dfrac{1}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \cdot \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\frac{(\nu+1)\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\alpha}{2} & \eta\mu\frac{(\nu+1)\alpha}{2}\cdot\eta\mu\frac{\alpha}{2} \\ -\eta\mu\frac{(\nu+1)\alpha}{2}\cdot\eta\mu\frac{\alpha}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{(\nu+1)\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\alpha}{2} \end{bmatrix}$

22. Δίνεται ο 2x2 πίνακας A τέτοιος ώστε $A^2+A+I_2 = 0$

i) Δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμος

ii) Δείξετε ότι $A^{22}+A^{11}+I = 0$

23. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ο πίνακας $A^{-1}B^{-1}$

Απ.: $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} +6 & -3 \\ -3 & +6 \end{bmatrix}$

24. Αν $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ να βρεθούν τα x,y έτσι ώστε: $A^2 = I$

Απ.: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

25. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας $X = A(A+B)-2B$

Απ.: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

26. Για ποιές τιμές των x,y,ω,φ οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \omega & 1 \\ 1 & \varphi \end{bmatrix}$ αντιμετατίθενται. **Απ.:** $x = y = 0$, ω,φ τυχαία, $x = y = \omega = \varphi$

27. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, δείξετε ότι ικανοποιεί την σχέση: $A^2-A-2.I = 0$

28. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \lambda^2-2\lambda & \lambda+1 \\ 3\lambda-2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Απ.: $\lambda \neq \frac{-3\pm\sqrt{21}}{4}$

29. Αν ο πίνακας A τάξεως 2x2 ικανοποιεί την σχέση $A^3 = A^2+I$ τότε είναι αντιστρέψιμος.
Απ.: Είναι $A(A^2-A) = I$

30. Να λυθεί το σύστημα:

$$X+\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X-\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Απ.: Αδύνατο

31. Αν A,B αντιστρέψιμοι και είναι $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και $A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί ο πίνακας B.
Απ. B: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

32. Να επιλυθεί η εξίσωση: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{1988}$
Απ.: $3^{1986}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

33. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{1984} \cdot X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{1986}$
Απ.: $X = 3^{1986}\begin{bmatrix} 1 & -1984 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

34. Αν $M(\lambda) = \begin{bmatrix} 2^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ δείξετε ότι $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha+\beta)$
και ότι ο $M(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος.

35. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ δείξετε: i) $A^{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \nu\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
ii) $A^1+A^2+\ldots+A^{2\nu+1} = (2\nu+1)A^{\nu+1}$

36. Δείξετε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ επαληθεύει την σχέση $A^{2\nu+1}+2^{2\nu}A = 0$
όπου $\nu = 2\rho+1, \rho \in \mathbb{N}^*$

37. Αν AB = BA και $A^2-B^2 = I$ δείξετε ότι ο πίνακας A-B είναι αντιστρέψιμος.
Απ.: $(A-B)(A+B) = I$

38. Αν $f(x) = x^2+2x-11$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$,δείξετε ότι $f(A) = 0$

39. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ x & y \end{bmatrix}$ τότε να προσδιοριστούν τα x,y ώστε:

i) $AB = BA$, ii) $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$ είναι $A^{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 3\nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $A^5-2A^4+A^3 = 0$

Απ.: $x = 0,\ y = 3$

40. Αν οι τετραγωνικοί πίνακες 2x2 Α,Β,Γ και ικανοποιούν τις σχέσεις (1) $AB = BA$ και $BA = \Gamma^2$ (2) και είναι και αντιστρέψιμοι. Δείξετε ότι $\Gamma^2 = (A^{-1}\Gamma A)^2$.

γραμμικα συστηματα

1.7. <u>Γραμμική εξίσωση με ένα άγνωστο</u> λέγεται η εξίσωση της μορφής:

$$\alpha x = \beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\beta}{\alpha}$

Αν $\alpha = 0$ και $\begin{cases} \beta \neq 0 & \text{η εξίσωση είναι αδύνατη} \\ \beta = 0 & \text{η εξίσωση είναι αόριστη} \end{cases}$

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_\nu x_\nu = \beta$ λέγεται **γραμμική εξίσωση** με ν άγνωστους.

Το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1\mu}x_\mu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_2+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2\mu}x_\mu = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1+\alpha_{\nu2}x_2+\ldots+\alpha_{\nu\mu}x_\mu = \beta_\nu \end{array}$$

ονομάζεται σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους. Λύση του συστήματος (1) ονομάζεται κάθε μ-άδα $(x_1,x_2,\ldots,x_\mu)$ που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις, και αν S το σύνολο των λύσεων ενός συστήματος τότε:

i) Αν $S = \emptyset$ το σύστημα λέγεται **αδύνατο**

ii) Αν $S \neq \emptyset$ το σύστημα έχει μια τουλάχιστο λύση και λέγεται **συμβιβαστό**.

iii) Αν δύο συστήματα έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων λέγονται **ισοδύναμα**

iv) Αν $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = 0$ το σύστημα λέγεται **ομογενές** και έχει πάντοτε την λύση $(0,0,\ldots,0)$.

v) Αν $\alpha_{\nu1} = \alpha_{\nu2} = \ldots = \alpha_{\nu\mu} = 0$ και $\beta_\nu \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

1.8. Μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών.

Θεωρούμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \end{array}\right\}$ (A)

Το σύστημα (A) γράφεται σαν εξίσωση πινάκων $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$

Όμοια το σύστημα: $\begin{array}{l} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=\delta_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\delta_2 \\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z=\delta_3 \end{array}$ (B) μπορεί να γραφτεί:

$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$ κ.λ.π. Μπορούμε αντί να δουλεύουμε στο αρχικό σύστημα, να δουλεύουμε στον πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & : & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & : & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & : & \delta_3 \end{bmatrix} \quad (\Pi)$$

του συστήματος, που λέγεται και **επαυξημένος πίνακας**.

Για τη λύση του συστήματος (Σ) προσπαθούμε να φέρουμε τον πίνακα (Π) στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & : & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & : & z_0 \end{bmatrix} \quad (\Pi_1)$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι η: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

* Αν κάποια γραμμή είναι της μορφής (0,0,...| 0) το σύστημα είναι αόριστο και αν (0,0,... |α) το σύστημα είναι αδύνατο.

Για να πετύχουμε τη μορφή (Π_1)

Μηδενίζουμε πρώτα τα $\boxed{\alpha_2,\alpha_3}$ προσθέτοντας στην 2η και τρίτη γραμμή κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης.

Μηδενίζουμε το β_3, προσθέτοντας στην 3η γραμμή, κατάλληλο πολ/σιο της δεύτερης.

Κ.λ.π.

Τα παρακάτω παραδείγματα κάνουν πιο κατανοητή τη μέθοδο.

Έστω το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & : & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & : & \gamma_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & x_0 \\ 0 & 1 & : & y_0 \end{pmatrix}$

$(x,y)=(x_0,y_0)$

Αν $\begin{pmatrix} 1 & 0 & : & x_0 \\ \boxed{0 \;\; 0 \; : \; y_0} \end{pmatrix}$ → αδύνατο. Αν $\begin{pmatrix} 1 & 0 & : & x_0 \\ \boxed{0 \;\; 0 \; : \; 0} \end{pmatrix}$ → αόριστο

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί το σύστημα: $\left| \begin{array}{l} 2x+3y = 5 \\ 3x-2y = 1 \end{array} \right.$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & : & 5 \\ 3 & -2 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & : & 5 \\ 0 & 13 & : & 13 \end{pmatrix} :13 \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & : & 5 \\ 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} :2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (1,1).$$

2. Να λυθεί το σύστημα: $\left| \begin{array}{l} 2x+5y = 3 \\ 4x+10y = 4 \end{array} \right.$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & : & 3 \\ 4 & 10 & : & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & : & 3 \\ 0 & 0 & : & -2 \end{pmatrix}$$

Επειδή η τελευταία γραμμή είναι της μορφής $(0,0,\ldots \mid a) \to$ αδύνατο.

3. Να λυθεί το σύστημα $\left| \begin{array}{l} x-y+z = 1 \\ 2x-3y+z = 0 \\ 3x+y+z = 5 \end{array} \right.$

Λύση: Αλγεβρικά. Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{r} x-y+z = 1 \\ 2x-3y+z = 0 \\ 3x+y+z = 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-2),\ \cdot(-3) \\ + \\ + \end{array} \iff \left. \begin{array}{r} x-y+z = 1 \\ -y-z = -2 \\ 4y-2z = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot 4 \\ + \end{array} \iff \left. \begin{array}{r} x-y+z = 1 \\ -y-z = -2 \\ -6z = -6 \end{array} \right| :-6$$

$$\iff \left. \begin{array}{r} x-y+z = 1 \\ y+z = 2 \\ z = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot(-1) \end{array} \iff \left. \begin{array}{r} x-y+z = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} +\ + \\ \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array} \iff \left. \begin{array}{r} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right| \iff$$

$\iff (x,y,z) = (1,1,1).$

Με πίνακες: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 2 & -3 & 1 & : & 0 \\ 3 & 1 & 1 & : & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2),\ \cdot(-3) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & -1 & : & -2 \\ 0 & 4 & -2 & : & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :2 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & -1 & : & -2 \\ 0 & 2 & -1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow^{+} \rfloor 2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & -3 & : & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ : -3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \urcorner + \\ \rfloor \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\urcorner \; \urcorner \\ \;\; + \\ \;\; -1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (x,y,z) = (1,1,1)$$

4. Να λυθεί το σύστημα: $\left| \begin{aligned} x+2y &= 4 \\ 3x-y &= 5 \\ 5x+4y &= 14 \end{aligned} \right.$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 4 \\ 3 & -1 & : & 5 \\ 5 & 4 & : & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rfloor -3 \; \rfloor -5 \\ \leftarrow^{+} \\ \leftarrow^{+} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & -7 & : & -7 \\ 0 & -6 & : & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ : -7 \\ : -6 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rfloor -1 \\ \leftarrow^{+} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \urcorner \\ + \end{matrix} -2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (x,y)=(2,1)$$

5: Να λυθεί το σύστημα: $\left| \begin{aligned} 2x+y &= 6 \\ 3x-y &= 4 \\ x+y &= 8 \end{aligned} \right.$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & : & 6 \\ 3 & -1 & : & 4 \\ 1 & 1 & : & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rfloor 3 \\ \leftarrow^{+} -2 \\ \leftarrow^{+} -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & : & 6 \\ 0 & 5 & : & 10 \\ 0 & -1 & : & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ : 5 \\ : (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rfloor -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & : & 8 \end{pmatrix}$$

Επειδή η γραμμή (0 0 : 8) έχει το τελευταίο στοιχείο της $\neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

6. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x+y+z+\omega = 7 \\ 2x-y+3z-\omega = 8 \\ x-2y+z+3\omega = 3 \\ -x+y+4z-\omega = 12 \end{cases}$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & : & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & : & 3 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & : & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & & (-1) \\ & & \\ & & \\ & & \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & : & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & : & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & : & 19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 & 2 \\ \\ & 3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & : & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & : & 2 \\ 0 & 0 & 17 & -6 & : & 45 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 17 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & : & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 79 & : & 79 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ :79 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & : & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & : & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & : & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :-1 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & : & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ 3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & : & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :-3 \\ \\ \end{matrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (x,y,z,\omega) = (1,2,3,1).$$

7. Να λυθεί το σύστημα: $\left|\begin{array}{l} x+2y+3z+5\omega = 1 \\ 2x+y-z+3\omega = -1 \\ 3x-y+2z+\omega = 3 \end{array}\right.$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & : & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & : & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & : & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & : & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -7 & : & -3 \\ 0 & -7 & -7 & -14 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \; : -7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & : & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -7 & : & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \; 3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & : & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -7 & : & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & : & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & : & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 7 & : & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{l} 4z+\omega = 3 \\ 3y+7z+7\omega = 3 \\ x+2y+3z+5\omega = 1 \end{array} \iff \begin{array}{l} z = \kappa \\ \omega = 3-4\kappa \\ y = 3-7\kappa-7(3-4\kappa) = -18+21\kappa \\ x = 1-2(-18+21\kappa)-3\kappa-5(3-4\kappa) = 1+36-42\kappa-3\kappa-15+20\kappa = \\ \quad = 22-25\kappa \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}. \end{array}$$

8. Να λυθεί το σύστημα: $\left|\begin{array}{l} 2x+3y-4z = 7 \\ 5y-z = 5 \\ 3x+7z = 6 \end{array}\right.$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & : & 7 \\ 0 & 5 & -1 & : & 5 \\ 3 & 0 & 7 & : & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & : & 7 \\ 0 & 5 & -1 & : & 5 \\ 0 & 9 & -26 & : & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ -5 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & : & 7 \\ 0 & 5 & -1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 121 & : & 0 \end{pmatrix} : 121 \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & : & 7 \\ 0 & 5 & -1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 4 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & : & 7 \\ 0 & 5 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} : 5 \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & : & 7 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} -3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} : 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$\leftrightarrow (x,y,z) = (2,1,0)$

9. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} x+3y-4z = 0 \\ 4x+2y-7z = -1 \\ x+7y+8z = 16 \\ x-y+z = 1 \end{array}\right.$$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & : & 0 \\ 4 & 2 & -7 & : & -1 \\ 1 & 7 & 8 & : & 16 \\ 1 & -1 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4 & -1 & -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & : & 0 \\ 0 & -10 & 9 & : & -1 \\ 0 & 4 & 12 & : & 16 \\ 0 & -4 & 5 & : & 1 \end{pmatrix} :4 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & : & 0 \\ 0 & -10 & 9 & : & -1 \\ 0 & 1 & 3 & : & 4 \\ 0 & -4 & 5 & : & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 & 2 & -5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & : & 0 \\ 0 & -10 & 9 & : & -1 \\ 0 & 0 & 39 & : & 39 \\ 0 & 0 & -7 & : & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} : 39 \\ : -7 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & : & 0 \\ 0 & -10 & 9 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} -1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & : & 0 \\ 0 & -10 & 9 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -9 & 4 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & : & 4 \\ 0 & -10 & 0 & : & -10 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} : -10 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} -3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (x,y,z) = (1,1,1)$$

10. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} 2x-y+z = 3 \\ x+y-z = 0 \\ 3x+2y+z = 4 \\ x-3y+4z = 7 \end{array}\right.$$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 1 & 1 & -1 & : & 0 \\ 3 & 2 & 1 & : & 4 \\ 1 & -3 & 4 & : & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 0 & -3 & 3 & : & 3 \\ 0 & -7 & 1 & : & 1 \\ 0 & 5 & -7 & : & -11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & : & -3 \\ 0 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -7 & 1 & : & 1 \\ 0 & 5 & -7 & : & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7 & 5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & -6 & : & -6 \\ 0 & 0 & -2 & : & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :-6 \\ :-2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 2 \end{pmatrix}$$

Από την τελευταία γραμμή φαίνεται ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

11. Να λυθεί το σύστημα: $\left| \begin{array}{l} x+y+z = 6 \\ x+2y+3z = 14 \\ 3x+4y+5z = \lambda \end{array} \right.$

Λύση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα και τον μετασχηματίζουμε όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 1 & 2 & 3 & : & 14 \\ 3 & 4 & 5 & : & \lambda \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 8 \\ 3 & 4 & 5 & : & \lambda \end{bmatrix} (-3) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 1 & 2 & : & \lambda-18 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 8 \\ 0 & 0 & 0 & : & \lambda-26 \end{bmatrix}$$

i) Αν $\lambda \neq 26$ το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) Αν $\lambda = 26$ το σύστημα είναι αόριστο, και όπως φαίνεται από τον τελικό πίνακα το σύστημα γίνεται:

$$\begin{array}{l} x+y+z = 6 \\ y+2z = 8 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x = z-2 \\ y = 8-2z, \ z = \text{τυχαίος} \end{array}$$

Άρα οι άπειρες λύσεις δίνονται από τις σχέσεις $x = -2+z$, $y = 8-2z$, $z \in \mathbb{R}$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Με την μέθοδο του επαυξημένου πίνακα να λυθούν τα συστήματα:

1. $\begin{cases} x+3y = 7 \\ 3x+4y = 11 \end{cases}$ **Απ.:** (1,2)

2. $\begin{cases} 2x+y-z = 2 \\ 3x+4y-z = 6 \\ x+y+z = 3 \end{cases}$ **Απ.:** (1,1,1)

3. $\begin{cases} 2x-y+3z+\omega = 1 \\ 3x+5z+2\omega = 5 \\ 3y+8z-\omega = 5 \\ x+2y+5z = 5 \end{cases}$ **Απ.:** (1,2,0,1)

4. $\begin{cases} 2x-3y = 3 \\ 5x+y = 16 \\ 7x+3y = 24 \end{cases}$ **Απ.:** (3,1)

5. $\begin{cases} 3x-5y+z = 0 \\ 4x-2y+2z = 0 \\ 3x-5y+6z = -1 \\ 6x+y+3z = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y = 3 \\ 3x+y = 4 \\ 2x+7y = 2 \end{cases}$ **Απ.:** (αδύνατο)

7. $\begin{cases} 2x-5y+z-3\omega = 0 \\ x+3y+2z+4\omega = 0 \\ 3x-2y+3z-\omega = 0 \\ x-y+z-\omega = 0 \end{cases}$ **Απ.:** (0,0,0,0)

8. $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+x_3+x_4 = 1 \\ x_1+\alpha x_2+x_3+x_4 = 1 \\ x_1+x_2+\alpha x_3+x_4 = 1 \\ x_1+x_2+x_3+\alpha x_4 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-y = 1 \\ 3x-5y = 1 \\ x+y = 3 \\ 2x+y = 5 \end{cases}$

10. Να βρεθεί ο λ ώστε το σύστημα:

$\begin{cases} \lambda x+3y+2z = 1 \\ x+(\lambda+1)y = 4 \\ 10y+3z = -2 \\ 2x-\lambda y-z = 5 \end{cases}$ να έχει λύση.

11. Να λυθούν τα συστήματα:

1. $\begin{cases} x-2y+3z = 0 \\ 2x+5y+6z = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \lambda x+y+z = \lambda \\ x+\lambda y+z = 3\lambda \\ x+y+\lambda z = 2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x-2y+3z-\omega = 6 \\ x+2y-3z = 9 \\ -3x+y-2\omega = -1 \\ 4x+3y-z+5\omega = -7 \end{cases}$

12. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε τα συστήματα να έχουν: i) μια λύση, ii) είναι αδύνατα, iii) είναι αόριστα.

1. $\begin{cases} x+y+\lambda z = 2 \\ 3x+4y+2z = \lambda \\ 2x+3y-z = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y+\lambda z = 1 \\ 2x+\lambda y+8z = 3 \end{cases}$

Απ.:(1: $\lambda \neq 3$ μια λύση, $\lambda = 3$ αδύνατο. 2: $\lambda = 4$ αδύνατο, $\lambda \neq 4$ αόριστο)

οριζουσες

1.9. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ 2x2, ο αριθμός $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\delta - \beta\gamma$ που αντιστοιχεί στον τετραγωνικό πίνακα A συμβολίζεται με D και λέγεται **ορίζουσα 2ης τάξης.**

Αν ο 3x3 πίνακας είναι: $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$

τότε η ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha\beta_1\gamma_2 + \beta\gamma_1\alpha_2 + \gamma\alpha_1\beta_2 - \gamma\beta_1\alpha_2 - \alpha\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\alpha_1\beta$

λέγεται ορίζουσα 3ης τάξης του πίνακα A.

1.10. Αντίστροφος πίνακας 2x2.

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε γνωρίζουμε ότι αν $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του A και είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

Οι A και A^{-1} επαληθεύουν την σχέση $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Άρα αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι αντιστρέψιμος ένας πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι όπως $D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Επίσης αν του 2x2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ η ορίζουσα $D \neq 0$ τότε ο αντίστροφος πίνακας του A είναι ο $A^{-1} = \frac{1}{D} A^*$ όπου $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$ και ο A^*

ονομάζεται σχετικός πίνακας του A, τα δε στοιχεία A_{ij} του σχετικού πίνακα είναι προσημασμένες ορίζουσες που αντιστοιχούν στα στοιχεία a_{ij} της ορίζουσας D.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί ο σχετικός του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Λύση: Έχουμε:

$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$ όπου $A_{11} = (-1)^{1+1} 4 = 4$, $A_{21} = (-1)^{2+1} 2 = -2$,

$A_{22} = (-1)^{2+2} 1 = 1$ και $A_{12} = (-1)^{1+2} 3 = -3 \rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

2. Να βρεθεί ο σχετικός του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Λύση: Έχουμε ότι ο σχετικός A^* του πίνακα A δίνεται από την σχέση:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

όπου $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4+1 = 5$, $A_{21} = (-1)^{2+1} . \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1(-4) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1} . \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) = -1$, $A_{12} = (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= (-1)(-8-2) = 10$, $A_{32} = (-1)^{3+2} . \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1(3) = -3$,

$A_{22} = (-1)^{2+2} . \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$, $A_{33} = (-1)^{3+3} . \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = +1$

$A_{13} = 0$, $A_{23} = 1 \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Να υπολογιστεί το γινόμενο AA^*, όπου A ο προηγούμενος πίνακας.

Λύση: $AA^* = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-10+0 & 12-12+0 & -3+3+0 \\ -10+10+0 & -8+12+1 & 2-3+1 \\ 10-10+0 & 8-12+4 & -2+3+4 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| \cdot I_3 \text{ γιατί } |A| = 5$$

Σημείωση βασική: Η σχέση $AA^* = |A| \cdot I$ είναι γενική δηλ. ισχύει για τον οποιοδήποτε τετραγωνικό πίνακα A.

Παρατήρηση: Ο αντίστροφος ενός πίνακα μπορεί να προσδιοριστεί με τη μέθοδο του μοναδιαίου. Έτσι αν θεωρήσουμε το γινόμενο AI και με γραμμικούς μετασχηματισμούς καταλήξουμε στον ισοδύναμο πίνακα IB, τότε ισχύει $B = A^{-1}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Λύση: Έχουμε: $(AI) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

(όπου πολλαπλασίασα την πρώτη γραμμή με 4 και την αφαιρέσαμε από την δεύτερη.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/10 & -1/10 \end{bmatrix}$ (όπου διαιρέσαμε την δεύτερη γραμμή με -10)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-12/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & 4/10 & -1/10 \end{bmatrix}$ (όπου πολλαπλασιάσαμε την δεύτερη γραμμή με 3 και την αφαιρέσαμε από την πρώτη).

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/10 & 3/10 \\ 4/10 & -1/10 \end{bmatrix} = 1/10 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Να βρεθεί με την μέθοδο του μοναδιαίου ο αντίστροφος του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση: Έχουμε: $(AI) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

όπου πολλαπλασιάσαμε την πρώτη γραμμή με -2 και -1 και προσθέσαμε στην δεύτερη και τρίτη.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου πολλαπλασιάσαμε με -2 τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής και τα προστέσαμε στα στοιχεία της τρίτης.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

προσθέσαμε τα στοιχεία της τρίτης γραμμής στην δεύτερη.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

προσθέσαμε την δεύτερη στην πρώτη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} = (IA)$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & +1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

1.11. Λύση συστήματος με τον αντίστροφο πίνακα.

Θεωρούμε το σύστημα: $\begin{vmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{vmatrix}$ (1)

το σύστημα γράφεται: $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$

και αν θέσουμε $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$

το σύστημα γίνεται $AX = B$ και αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1} \cdot B$.

1. Αν δε η $D = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και το σύστημα (1) έχει μοναδική λύση την

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 \\ \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \end{bmatrix}$$

και αν θέσουμε $D_x = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ και $D_y = \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$

τότε η λύση δίνεται από τους τύπους $x = \frac{Dx}{x}$, $y = \frac{Dy}{y}$

2. Αν $D = 0$ και μια τουλάχιστο από τις $Dx, Dy \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

3. Αν $D_x = D_y = D = 0$ το σύστημα είναι αόριστο εκτός εάν $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ και ένας τουλάχιστο από τους $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$ οπότε είναι αδύνατο.

Έστω το σύστημα:
$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z &= \delta_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z &= \delta_2 \\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z &= \delta_3 \end{aligned}\right| (\Sigma)$$

Το (Σ) γράφεται: $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$

και αν $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$

τότε το σύστημα γράφεται: $AX = B$ και αν ο πίνακας A αντιστρέφεται το σύστημα έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1}B$. Έτσι:

1. Αν $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος ο αντίστροφος

είναι ο $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ με $A_{\kappa\lambda}$ η προσημασμένη υποορίζουσα του

στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$ του πίνακα A. Δηλ. $A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$,

$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ κ.λ.π. και το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{D}A^* \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_{11}\delta_1+A_{21}\delta_2+A_{31}\delta_3 \\ A_{12}\delta_1+A_{22}\delta_2+A_{32}\delta_3 \\ A_{13}\delta_1+A_{23}\delta_2+A_{33}\delta_3 \end{bmatrix}$$

και αν θέσουμε $D_x = A_{11}\delta_1+A_{21}\delta_2+A_{31}\delta_3$, $D_y = A_{12}\delta_1+A_{22}\delta_2+A_{32}\delta_3$, $D_z = A_{13}\delta_1+A_{23}\delta_2+A_{33}\delta_3$.

Η λύση δίνεται από τους τύπους: $x = \frac{D_x}{x}$, $y = \frac{D_y}{y}$, $z = \frac{D_z}{z}$

2. Αν $D = 0$ και μια τουλάχιστο από τις $D_x, D_y, D_z \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

3. Αν $D = D_x = D_y = D_z = 0$ το σύστημα είναι αόριστο εκτός αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ και ένας τουλάχιστο από τους $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \neq 0$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

(β) Συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, ομογενή

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y = 0 \\ \alpha_1 x+\beta_1 y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

i. Αν $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0$, το (1) έχει μια μόνη λύση, την μηδενική (προφανής).

ii.- Αν $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0$, το (1) έχει άπειρες λύσεις

(γ) Συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, ομογενή :

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z = 0 \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma_1)$$

i. Αν $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$, το (Σ_1) έχει μία μόνη λύση, την μηδενική (προφανής).

ii. Αν $D = 0$, το (Σ_1) έχει εκτός από την μηδενική, άπειρες το πλήθος.

iii. Αν (x_0,y_0,z_0) μια μη μηδενική λύση του (Σ_1) τότε και η $(\lambda x_0,\lambda y_0,\lambda z_0)$ είναι επίσης λύση, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(δ) Συστήματα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y = \gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \quad (1)$$

i. Αν $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ το (1) είναι συμβιβαστό (έχει λύση),

εφ'όσον $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

ii. Αν $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$, το (1) δεν έχει λύση.

(ε) Συστήματα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους, ομογενεί:

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z = 0 \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma_1)$$

Για το σύστημα (Σ_1) ισχύει η πρόταση:

Αν $\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix} \neq 0$ και $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0$, το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z = 0 \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{x}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}$$

(Σταυροειδής πολλαπλασιασμός)

(ζ) Συστήματα ν εξισώσεων με ν αγνώστους, της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_\nu x_\nu = \rho_1 \\ \beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\ldots+\beta_\nu x_\nu = \rho_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_\nu x_\nu = \rho_\nu \end{cases} \quad (1)$$

i. Αν $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_\nu \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\nu \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_\nu \end{vmatrix} \neq 0$, το (1) έχει μια μόνη λύση την

$x_1 = \frac{Dx_1}{D}$, $x_2 = \frac{Dx_2}{D}$, ..., $x_\nu = \frac{Dx_\nu}{D}$, όπου:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} \rho_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_\nu \\ \rho_2 & \beta_2 & \ldots & \beta_\nu \\ \rho_\nu & \lambda_2 & \ldots & \lambda_\nu \end{vmatrix}, \ \ldots, \ Dx_\nu = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \rho_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \rho_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \rho_\nu \end{vmatrix}$$

ii. Αν $D = 0$ και μια τουλάχιστο, από τις $Dx_1, Dx_2, \ldots, Dx_\nu \neq 0$, το (1) δεν έχει λύση.

iii. Αν $D = 0$ και $Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_\nu = 0$, το (1) έχει άπειρες λύσεις.

(η) Συστήματα ν εξισώσεων με ν αγνώστους, ομογενή:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_\nu x_\nu = 0 \\ \beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\ldots+\beta_\nu x_\nu = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_\nu x_\nu = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Με την μέθοδο του αντίστροφου πίνακα να λυθούν τα συστήματα:

1. $\begin{cases} x-2y = 1 \\ 2x-3y = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+\lambda y = 2 \\ \lambda x-4\lambda y = 3\lambda+4 \end{cases}$

Λύση: 1. Το σύστημα γράφεται:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και επειδή η ορίζουσα D του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

είναι D = 1 ≠ 0 υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ και είναι:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα η (ι) γίνεται: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα η λύση του συστήματος (1) είναι η (x,y) = (1,0).

(ω) Είναι $D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -4\lambda \end{vmatrix} = -4\lambda-\lambda^2 = -\lambda(\lambda+4)$

α) Αν D ≠ 0 δηλαδή λ ≠ 0 και λ ≠ -4 τότε υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -4\lambda \end{bmatrix}$ και είναι $A^{-1} = \frac{1}{-\lambda(\lambda+4)} \cdot \begin{bmatrix} -4\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix}$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = \frac{Dx}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$.

δηλαδή την $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 3\lambda+4 & -4\lambda \end{vmatrix}}{-\lambda(\lambda+4)} = \dfrac{-8\lambda-3\lambda^2-4\lambda}{-\lambda(\lambda+4)} = \dfrac{-12\lambda-3\lambda^2}{-\lambda(\lambda+4)} = \dfrac{-3\lambda(\lambda+4)}{-\lambda(\lambda+4)} = 3$

και $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & 3\lambda+4 \end{vmatrix}}{-\lambda(\lambda+4)} = \dfrac{3\lambda+4-2\lambda}{-\lambda(\lambda+4)} = \dfrac{\lambda+4}{-\lambda(\lambda+4)} = -\dfrac{1}{\lambda}$

β) Αν D = 0 δηλ. αν λ = 0 ή λ = -4 τότε:

(ι) Με λ = 0 είναι Dx=0, Dy ≠ 0 και το σύστημα είναι αδύνατο.

(ιι) Με λ = -4 είναι Dx = Dy = 0 και το σύστημα είναι αόριστο.

Το αρχικό σύστημα με λ = -4 γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} x-4y = 2 \\ -4x+16y = -8 \end{array}\right| \leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-4y = 2 \\ x-4y = 2 \end{array}\right| \leftrightarrow x-4y = 2 \leftrightarrow x = 4y+2,\ y \in \mathbb{R}.$$

Άρα οι άπειρες λύσεις είναι: $x = 4y+2$ με $y \in \mathbb{R}$.

2. Δίνεται το σύστημα: $\left|\begin{array}{l} 3x+y-z = 10 \\ x+y+z = 4 \\ 2y+3z = 3 \end{array}\right.$

Να λυθεί με την μέθοδο του αντίστροφου πίνακα.

Λύση: Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$ και αν θέσουμε $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

και $B = \begin{vmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ το σύστημα γίνεται $AX = B$.

Επειδή δε η ορίζουσα D του πίνακα A είναι διάφορη του μηδέν υπάρχει ο αντίστροφος του A και είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$ με $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$, $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$, $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -4 \\ 2 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. Με πίνακες να λυθούν τα συστήματα:

1. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} x & y \\ \omega & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Λύση: 1. Επειδή η ορίζουσα D του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ είναι $D = 0$ ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται και επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

2. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x & y \\ \omega & z \end{bmatrix}$

το σύστημα γράφεται $XA = B$ και επειδή η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα A και είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ και η λύση του συστήματος είναι:

$X = BA^{-1} \leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -5 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$\leftrightarrow (x,y,\omega,z) = (2, \frac{1}{2}, -5, -\frac{3}{2})$

Άρα η τετράδα $(2, \frac{1}{2}, -5, -\frac{3}{2})$ είναι λύση του συστήματος.

4. Με πίνακες να λυθεί το σύστημα: $\begin{matrix} x+y = \lambda \\ 2x-y = 3 \end{matrix}$

Λύση: Το σύστημα γράφεται: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 3 \end{bmatrix}$

Θεωρούμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} :(-3)$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Άρα ο αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ είναι ο $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{3}+1 \\ \frac{2\lambda}{3}-1 \end{bmatrix} \leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{\lambda}{3}+1, \frac{2\lambda}{3}-1\right)$

5. Να λυθεί το σύστημα: $\left| \begin{matrix} 2x-3y = -5 \\ x+5y = 17 \end{matrix} \right.$ (1)

Λύση: Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10+3 = 13 \neq 0$, συνεπώς το (1) έχει μία μόνη λύση, την $x = \frac{Dx}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$, όπου $Dx = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} = -25+51 = 26$ και

$Dy = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 17 \end{vmatrix} = 34+5 = 39 \rightarrow x = 2$ και $y = 3$.

6. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα: $\left| \begin{matrix} x+y = \lambda \\ \lambda x+y = 1 \end{matrix} \right.$

Λύση: Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1-\lambda$

i. Αν $D \neq 0 \leftrightarrow 1-\lambda \neq 0 \leftrightarrow \lambda \neq 1$, το σύστημα έχει μια μόνη λύση, την

$x = \frac{Dx}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$, όπου $Dx = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda-1$ και $Dy = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1-\lambda^2$

$\rightarrow x = -1$ και $y = \lambda+1$.

ii. Αν $\lambda = 1 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x+y = 1 \\ x+y = 1 \end{array} \right. \leftrightarrow x+y = 1$, που είναι αόριστο.

7. Να διερευνηθεί το σύστημα: $\left| \begin{array}{l} x+(\lambda+1)y = 2 \\ (\lambda+2)x-(\lambda^2-1)y = 5 \end{array} \right.$ (1)

Λύση: i) Αν $D \neq 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ \lambda+2 & -(\lambda^2-1) \end{vmatrix} \neq 0 \leftrightarrow (\lambda+1)(2\lambda+1) \neq 0 \leftrightarrow \lambda \neq -1$

ή $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ το (1) έχει μια μόνη λύση, την $x = \frac{Dx}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$, όπου:

$$Dx = \begin{vmatrix} 2 & \lambda+1 \\ 5 & -(\lambda^2-1) \end{vmatrix}, \quad Dy = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda+2 & 5 \end{vmatrix}$$

8. Να βρεθούν οι τιμές του λ, για να έχει λύση το σύστημα διάφορη από την μηδενική. $\left| \begin{array}{l} \lambda x+3y = x \\ 3x+\lambda y = y \end{array} \right.$ (1)

Λύση: Έχουμε: (1) $\leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(\lambda-1)+3y = 0 \\ 3x+y(\lambda-1) = 0 \end{array} \right.$ (2). Επειδή το (2) είναι ομογενές για να έχει λύση $\neq (0,0)$, πρέπει και αρκεί $D = 0 \leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (\lambda-1)^2-9 = 0 \leftrightarrow \lambda = 4 \text{ ή } \lambda = -2.$$

9. Να λυθούν τα συστήματα:

1. $\left| \begin{array}{l} \lambda x+(\lambda-1)y = 4 \\ (\lambda-2)x+\lambda y = \lambda+2 \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} (\lambda-1)x+\lambda y = 1 \\ (\lambda-1)x+y = \lambda \\ x+\lambda y = \lambda-1 \end{array} \right.$

Λύση: 1. Εφαρμόζουμε την μέθοδο των οριζουσών.

Είναι $D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda-2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^2-\lambda^2+3\lambda-2 = 3\lambda-2$

ι) Αν $3\lambda-2 \neq 0 \leftrightarrow \lambda \neq 2/3 \leftrightarrow D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = \frac{Dx}{D}$ και $y = \frac{Dy}{D}$.

όπου $Dx = \begin{vmatrix} 4 & \lambda-1 \\ \lambda+2 & \lambda \end{vmatrix} = 4\lambda-\lambda^2-\lambda+2 = -\lambda^2+3\lambda+2$

και $D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ \lambda-2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda-4\lambda+8 = \lambda^2-2\lambda+8$

Άρα η λύση θα είναι: $x = \frac{-\lambda^2+3\lambda+2}{3\lambda-2}$, $y = \frac{\lambda^2-2\lambda+8}{3\lambda-2}$

ιι) Αν $3\lambda-2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \Leftrightarrow D = 0$, το σύστημα θα είναι ή αδύνατο ή αόριστο και επειδή για $\lambda = \frac{2}{3}$ είναι $D_x \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

2. Θεωρούμε την ορίζουσα D του επαυξημένου πίνακα του που είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda & 1 \\ \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda-1 & \lambda \\ \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{matrix} = (\lambda-1)^2+\lambda^2+\lambda(\lambda-1)-\lambda(\lambda-1)^2-\lambda^2(\lambda-1)-1 =$$

$= (\lambda-1)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)+\lambda(\lambda-1)-\lambda(\lambda-1)^2-\lambda^2(\lambda-1) = (\lambda-1)^2(1-\lambda)+(\lambda-1)(\lambda+1+\lambda-\lambda^2)$

$= -(\lambda-1)^3+(\lambda-1)(-\lambda^2+2\lambda+1) = (\lambda-1)[-\lambda^2+2\lambda-1-\lambda^2+2\lambda+1] = (\lambda-1)(-2\lambda^2+4\lambda) =$

$= -2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

ι) Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0,\ \lambda \neq 1,\ \lambda \neq 2$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο (ασυμβίβαστο).

ιι) Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$ τότε με $\lambda = 0$ η

$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ και επειδή η ελάσσονα ορίζουσα της D $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} (\lambda-1)x+\lambda y = 1 \\ (\lambda-1)x+y = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+0y = 1 \\ -x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

όπου η λύση αυτή επαληθεύει και την τρίτη εξίσωση του συστήματος επειδή $D = 0$.

Αν $\lambda = 1$ τότε το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 0x+y = 1 \\ 0x+y = 1 \\ x+y = 0 \end{cases}$

και επειδή η υποορίζουσα της $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων έχει μοναδική λύση την $x = -1$, $y = 1$ που επαληθεύει και την πρώτη εξίσωση επειδή $D = 0$.

Αν $\lambda = 2$ το σύστημα και πάλι γίνεται: $\begin{cases} x+2y = 1 \\ x+y = 2 \\ x+2y = 1 \end{cases}$

και επειδή η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων έχει μοναδική λύση την $y = -1$, $x = 3$ που επαληθεύει και την πρώτη εξίσωση επειδή $D = 0$.

10. Να βρεθούν οι τιμές των λ,μ για τις οποίες τα συστήματα:

$$\begin{cases} (\mu-1)x+\lambda y = 1 \\ 2x+y = 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} -(\mu+1)x+(\lambda+1)y = 2 \\ x+2y = 5 \end{cases}$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

Λύση: Για να είναι αδύνατα τα συστήματα πρέπει οι ορίζουσες D_1, D_2 των συντελεστών των αγνώστων να είναι μηδέν και κάποια από τις ορίζουσες D_1x D_2y $D_2x, D_2y \neq 0$

Είναι $D_1 = \begin{vmatrix} \mu-1 & \lambda \\ 2 & +1 \end{vmatrix} = \mu-1-2\lambda$ και $D_2 = \begin{vmatrix} -\mu-1 & \lambda+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\mu-\lambda-3$

'Αρα έχουμε για λύση το σύστημα:

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \mu-2\lambda = 1 \\ -2\mu-\lambda = 3 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 2\mu-4\lambda = 2 \\ -2\mu-\lambda = 3 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

Επειδή δε με $\lambda = \mu = -1$ είναι $D_1x = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & +1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & +1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

και $D_2x = \begin{vmatrix} 2 & \lambda+1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ οι τιμές είναι δεχτές.

11. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y+z = 6 \\ \lambda x+4y+z = 5 \\ 6x+(\lambda+2)y+2z = 13 \end{cases}$$

Λύση: ι. Αν $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 4 & 1 \\ 6 & \lambda+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 4-\lambda & 1-\lambda \\ 6 & \lambda-4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$

$\longleftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \longleftrightarrow 4(\lambda-4)+(\lambda-4)(\lambda-1) \neq 0 \longleftrightarrow (\lambda-4)(\lambda+3) \neq 0$

$\longleftrightarrow \lambda \neq 4 \wedge \lambda \neq -3$, το (1) έχει μόνη λύση, την $x = \frac{Dx}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$, $z = \frac{Dz}{D}$

όπου $Dx = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 13 & \lambda+2 & 2 \end{vmatrix}$, $Dy = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ \lambda & 5 & 1 \\ 6 & 13 & 2 \end{vmatrix}$, $Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ \lambda & 4 & 5 \\ 6 & \lambda+2 & 13 \end{vmatrix}$

ιι. Αν $\lambda = 4$ το (1) γίνεται: $\begin{cases} x+y+z = 6 \\ 4x+4y+z = 5 \\ 6x+6y+2z = 13 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

ιιι. Αν $\lambda = -3$, το (1) γίνεται $\{x+y+z = 6,\ -3x+4y+z = 5,\ 6x-y+2z = 13\}$

$\longleftrightarrow \{x+y+z = 6,\ 3x+3y+3z = 18,\ -3x+4y+z = 5\}$, που είναι αόριστο.

12. Να λυθεί το σύστημα: $\left|\begin{array}{l} x+2y-z = 9 \\ 3x+y+2z = 7 \\ x-y+5z = -6 \end{array}\right.$ (1)

Λύση: Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$, επομένως το (1) έχει μια μόνο λύση την $x = \frac{Dx}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$, $z = \frac{Dz}{D}$, όπου $Dx = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -30$,

$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -45$, $Dz = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 15 \rightarrow x = 2,\ y = 3,\ z = -1.$

13. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα: $\left|\begin{array}{l} x+y+z = \lambda+1 \\ \lambda x+y+(\lambda-1)z = \lambda \\ x+\lambda y+z = 1 \end{array}\right. /\lambda \in \mathbb{R}.$

Λύση: Θεωρούμε την ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} =$
$= \lambda-1$

ι. Αν $\lambda \neq 1$, το σύστημα έχει μία μόνη λύση, την $x = \frac{Dx}{D}$, $y = \frac{Dy}{D}$, $z = \frac{Dz}{D} \leftrightarrow x = \frac{-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda-1}$, $y = \frac{-\lambda}{\lambda-1}$, $z = \lambda(\lambda+1)$

ιι. Αν $\lambda = 1$, το σύστημα γίνεται: $\left|\begin{array}{l} x+y+z = 2 \\ x+y = 1 \\ x+y+z = 1 \end{array}\right.$ που είναι αδύνατο.

14. Να λυθεί το σύστημα: $\left|\begin{array}{r} x+2y+4z = 0 \\ y-2z = 0 \\ x+8z = 0 \end{array}\right.$ (1)

Λύση: Έχουμε $(1) \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+4z = 0 \\ 0x+y-2z = 0 \\ x+0y+8z = 0 \end{array}\right.$ (2). Το (2) είναι ομογενές, για να έχει λύση διάφορη από την μηδενική, πρέπει και αρκεί:

$\Delta = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$, που ισχύει.

Για να βρούμε τις λύσεις του, θεωρούμε τις δύο πρώτες $\rightarrow$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix}4 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}} = \kappa \rightarrow x = -8\kappa,\ y = 2\kappa,\ z = \kappa,$$ όπου κ τυχαίος.

15. Να λυθεί το σύστημα:
$$\left|\begin{aligned} 2x-3y-z &= 0\\ 4x+y+5z &= 0\\ x-2y-z &= 0\end{aligned}\right. \quad (1)$$

Λύση: Έχουμε ότι το (1) είναι ομογενές, συνεπώς έχει την λύση (0,0,0). Για να έχει λύση $\neq$ (0,0,0), πρέπει και αρκεί:

$$\Delta = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & 1 & 5\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix} = 0,$$ που ισχύει.

Συνεπώς το (1) έχει άπειρες λύσεις. Για να τις βρούμε, θεωρούμε, τις δύο πρώτες $\rightarrow \dfrac{x}{\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}} = \dfrac{y}{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}} = \dfrac{z}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}} = \kappa \rightarrow$

$x = -14\kappa,\ y = -14\kappa,\ z = 14\kappa$, όπου κ τυχαίος.

16. Αναγκαία και ικανή συνθήκη, για να έχει το σύστημα:
$$\left|\begin{aligned} x+y+z &= 0\\ \beta x+\gamma y+\alpha z &= 0\\ \gamma x+\alpha y+\beta z &= 0,\ (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})\end{aligned}\right.$$
άπειρες λύσεις, είναι $\alpha = \beta = \gamma$.

Λύση: Το (1) είναι ομογενές, με προφανή την λύση (0,0,0). Για να έχει άπειρες λύσεις, πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\Delta = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \beta & \gamma-\beta & \alpha-\beta\\ \gamma & \alpha-\gamma & \beta-\gamma\end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix}\gamma-\beta & \alpha-\beta\\ \alpha-\gamma & \beta-\gamma\end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\gamma-\beta)(\beta-\gamma)-(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 0 \leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}\left((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right) = 0 \leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

17. Αν το σύστημα $\left|\begin{aligned} \alpha x+\gamma y+\beta z &= 0\\ \gamma x+\beta y+\alpha z &= 0\\ \beta x+\alpha y+\gamma z &= 0\end{aligned}\right.$ **έχει δύο λύσεις να δειχτεί ότι:**

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = 0.$

Λύση: Για να έχει το (1) δύο λύσεις, θα πρέπει να έχει άπειρες

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = 0$$

18. Αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ και $\left| \begin{array}{l} \alpha^3+\kappa\alpha+\lambda = 0 \\ \beta^3+\kappa\beta+\lambda = 0 \\ \gamma^3+\kappa\gamma+\lambda = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = 0$

Λύση: Αν η υπόθεση, θεωρηθεί σύστημα, τριών εξισώσεων με δύο άγνωστους, τα κ,λ, θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma) = 0 \Longleftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = 0,$$ γιατί $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

19. Αν $xyz \neq 0$ και $\left| \begin{array}{l} x-\beta y-\gamma z = 0 \\ -\beta x+y-\alpha z = 0 \\ -\beta x-\gamma y+z = 0 \end{array} \right.$ (1)

τότε $\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\beta^2+\alpha\gamma+\beta\gamma = 1$ (2)

Λύση: Επειδή το (1) ισχύει $\forall$ $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ είναι:

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\beta & -\gamma \\ -\beta & 1 & -\alpha \\ -\beta & -\gamma & +1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow (2)$$

20. Αν οι εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ και $\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1 = 0$ έχουν μια τουλάχιστο κοινή ρίζα και $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta \neq 0$, να δειχτεί ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

Λύση: Έχουμε: $\begin{array}{l} \alpha x^2+\beta x+\gamma z = 0 \\ \alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1 z = 0 \end{array}$ όπου $z = 1 \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}} = \frac{x}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}} \Rightarrow x^2 = \frac{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}, \; x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}} \Rightarrow$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}$$

21. **Να λυθεί το σύστημα:** $\begin{vmatrix} 3x-4y+7z = 0 \\ 2x-y-2z = 0 \\ x^2+2y^2-5z^2 = 1 \end{vmatrix}$ (3)

Λύση: Από τις δύο πρώτες έχουμε: $\dfrac{x}{\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{y}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{z}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}$

$\leftrightarrow \dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{20} = \dfrac{z}{5} = \lambda \leftrightarrow x = 3\lambda,\ y = 4\lambda,\ z = \lambda$, οπότε η (3) δίνει
$9\lambda^2+32\lambda^2-5\lambda^2 = 1 \leftrightarrow 36\lambda^2 = 1 \leftrightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{6} \leftrightarrow x = \pm\dfrac{3}{6},\ y = \pm\dfrac{2}{3},\ z = \pm\dfrac{1}{6}$.

22. **Να λυθεί το σύστημα:** $\begin{vmatrix} 2x+y = 4 \\ 3x-5y = -7 \\ x+y = 3 \\ 6x-7y = -8 \end{vmatrix}$

Λύση: Θεωρούμε το σύστημα (1) $\begin{vmatrix} 2x+y = 4 \\ 3x-5y = -7 \end{vmatrix}$. Επειδή $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$
$= -10-3 = -13 \neq 0$, το (1) έχει μια μόνη λύση την $x = \dfrac{Dx}{D}$, $y = \dfrac{Dy}{D} \leftrightarrow$
$x = 1,\ y = 2$. Οι τιμές $x = 1,\ y = 2$, επαληθεύουν τις δύο άλλες εξισώσεις τότε και μόνο τότε, όταν οι ορίζουσες (όλες).

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & -7 \\ 6 & -7 & -8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & -7 & -8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & -7 & -8 \end{vmatrix}$$

είναι μηδέν, που είναι: Επομένως το σύστημα είναι συμβιβαστό.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Με τον αντίστροφο πίνακα να λυθούν τα συστήματα

   1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Απ.1: $\dfrac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \end{bmatrix}$, 2: $\dfrac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

2. Να λυθούν τα συστήματα με $\lambda \in \mathbb{R}$.

   1. $\begin{cases} (\lambda-4)x+2(\lambda-1)y = 3 \\ (\lambda-6)x+(\lambda-3)y = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (\lambda+2)x+\lambda y = 1 \\ 3x+(2-\lambda)y = 1 \end{cases}$

Απ.: 1: με $\lambda \neq 0{,}7$ θα είναι $x = -\dfrac{1}{\lambda}$, $y = \dfrac{2}{\lambda}$ με $\lambda = 0$ αδύνατο, $\mu+\lambda = 7$

είναι αόριστο. 2: $x = \frac{2-2\lambda}{-\lambda^2-3\lambda+4}$, $y = \frac{\lambda-1}{-\lambda^2-3\lambda+4}$

3. Να λυθούν τα συστήματα:

1. $\begin{cases} (\mu-3)x+2y = 4\lambda-13 \\ 2(\lambda-1)x-y = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \mu(\mu-1)x+\mu(\mu+1)y = \mu^3+2 \\ (\mu^2-1)x+(\mu^2+1)y = \mu^4-1 \end{cases}$

Απ.: 1: Με $\mu \neq 7-4\lambda$, $x = \frac{-8\lambda+17}{\mu+4\lambda-7}$, $y = \frac{-8\lambda^2+34\lambda+34-29}{\mu+4\lambda-7}$, με $\mu = 7-4\lambda$ και $\lambda \neq -\frac{7}{4}$ αδύνατο και με $\lambda = -\frac{7}{4}$ αδύνατο.

2: Με $\mu \neq 0, \pm1, 2$, $x = -\frac{\mu^3+\mu^2+1}{\mu^2(\mu-1)}$, $y = \frac{\mu^3-\mu^2+1}{\mu^2}$, με $\mu = 0$ ή 1 αδύνατο, με με = -1 ή 2 αόριστο.

4. Αν το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda-1)x+(3\mu-2)y = 5 \\ (3\lambda-2)x+(4\mu-1)y = 7 \end{cases}$ έχει δύο διαφορετικές λύσεις να βρεθούν τα λ και μ.   **Απ.:** $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = 9$

5. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda-2)x+(3\mu-1)y = 1 \\ (\mu+2)x+(\lambda-1)y = 2 \end{cases}$. Για ποιές τιμές των λ και μ το σύστημα δέχεται μια μόνο λύση (x_0, y_0) που να ικανοποιεί την σχέση $x_0^2+y_0^2 = (x_0+y_0)^2$;

Απ.: με $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ είναι $\lambda = 6\mu-1$, $\mu \neq \frac{1}{3}$
$\mu \neq \frac{8}{11}$

6. Να βρεθούν οι τιμές των λ και μ για τις οποίες τα συστήματα

$\Sigma_1: \begin{cases} (\mu-1)x+\lambda y = 2 \\ 2x+5y = 4 \end{cases}$ και $\Sigma_2: \begin{cases} (\mu+2)x+2\lambda y = 5 \\ 3x+7y = 1 \end{cases}$ είναι αδύνατα.

Απ.: $\lambda = \frac{105}{8}$, $\mu = \frac{29}{8}$

7. Αν $xyz \neq 0$ και: $\begin{vmatrix} x = \gamma y+\beta z \\ y = \alpha z+\gamma x \\ z = \beta x+\alpha y \end{vmatrix} \rightarrow (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma = 1)$

8. Αν $\begin{vmatrix} x-\alpha y = \beta \\ \alpha x+y = \gamma \\ \beta x+\gamma y = 1 \end{vmatrix}$ δείξετε ότι $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2 = \alpha\beta(\beta-\gamma)+1$

9. Αν $\begin{cases} \alpha x+\beta y = 1 \\ \beta x+\alpha y = \alpha\beta \\ x+y = \alpha+\beta \end{cases} \rightarrow (\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta = 1)$

10. Αν κάθε ένα από τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} \beta x+\alpha y = 5 \\ 2x+y = 2 \\ 2\beta x+3\beta y = 1 \end{cases} \quad \text{και } \Sigma_2: \begin{cases} (\alpha+1)x+\beta y = 1 \\ (\beta-1)x+\alpha y = \alpha\beta \\ x+y = \alpha+\beta \end{cases}$$

είναι συμβιβαστά να βρεθούν οι σχέσεις που συνδέουν τα α, β.

Απ.: Σ_1: $21\beta-2\alpha\beta-2\alpha = 0$, Σ_2: $\alpha^3+\alpha^2-\beta^3+\beta^2+\alpha\beta+\beta-\alpha = 1$

11. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda-1)x+\lambda y = 1 \\ (\lambda-1)x+y = \lambda \\ x+\lambda y = \lambda-1 \end{cases}$

12. Θεωρούμε το σύστημα: $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+\lambda x+y = 3 \\ 2x+y = 1 \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι ώστε το σύστημα να έχει μια μόνο λύση.

<u>ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ</u>

1.12. Μέθοδος υποορίζουσας ή ελάσσονας ορίζουσας

Ονομάζουμε υποορίζουσα στοιχείου, μιας ορίζουσας, αυτή που προκύπτει αν από την ορίζουσα διαγραφούν, η γραμμή και η στήλη του στοιχείου.

Π.χ. στην ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ οι υποορίζουσες των στοιχείων της β' στήλης είναι: του β: $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ του β_1: $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ του β_2: $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$

Για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας ισχύει:

1. Ορίζουσα τρίτης τάξης.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = -\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} +\beta_1 \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} -\gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

όπου αναπτύξαμε κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.

Το στοιχείο α_1 βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή και πρώτη στήλη ⟶ το πρόσημό του είναι $(-1)^{2+1} = -1$, γενικά το πρόσημο του στοιχείου $x_{\kappa\lambda}$ που κατέχει την κ γραμμή, λ στήλη, είναι $(-1)^{\kappa+\lambda}$.

ii. Ορίζουσα τετάρτης τάξης.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} = -\beta\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} +\beta_1\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} -\beta_2\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$$

$$+\beta_3\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}.$$ Όμοια για την ορίζουσα οποιασδήποτε τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} -0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ +1 & 2 \end{vmatrix} +$

$$+4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(2-3)-0(-2-2)+4(-3-2) = -23.$$

2. Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 1 & \beta & \alpha \\ 1 & \gamma & \beta \end{vmatrix}$

Αν αναπτύξουμε κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 1 & \beta & \alpha \\ 1 & \gamma & \beta \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} -1\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} +1\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \beta^2-\alpha\gamma-\alpha\beta+\gamma^2+\alpha^2-\beta\gamma.$$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $E: \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Έχουμε $E \Longleftrightarrow 1\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} +x\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x^2-2-2x+3+4x-3x^2 = 0 \Longleftrightarrow 2x^2-2x-1 = 0 \Longleftrightarrow x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

1.13. Μέθοδος Sarrus.

Για να υπολογίσουμε την τιμή μιας ορίζουσας τρίτης **μόνο** τάξης, ακολουθούμε τον παρακάτω κανόνα.

1) Επαναλαμβάνουμε τις δύο πρώτες στήλες

$$\left|\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{matrix}$$

2) Προσθέτουμε τα διαγώνια γινόμενα $\alpha\beta_1\gamma_2$, $\beta\gamma_1\alpha_2$, $\gamma\alpha_1\beta_2$

3) Αφαιρούμε τα διαγώνια γινόμενα $\beta\alpha_1\gamma_2$, $\alpha\gamma_1\beta_2$, $\gamma\beta_1\alpha_2$ ώστε:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = (\alpha\beta_1\gamma_2+\beta\gamma_1\alpha_2+\gamma\alpha_1\beta_2)-(\beta\alpha_1\gamma_2+\alpha\gamma_1\beta_2+\gamma\beta_1\alpha_2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να υπολογισθούν οι ορίζουσες:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad 3)\begin{vmatrix} 0 & \beta & \alpha \\ \alpha & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

Λύση: 1.
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & \alpha & \beta & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & 1 & \beta & 1 \end{array}\right| = \beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta-\alpha^2-\alpha-\beta^3$$

2.
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 0+0+9-3-4-0 = 9-7 = 2$$

3.
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & \beta & \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \beta & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & \beta & \alpha \end{array}\right| = 0+\beta^3+\alpha^3-0-0-0 = \alpha^3+\beta^3$$

1.14. Ιδιότητες των οριζουσών.

i. Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης, ορίζουσας είναι μηδέν, η ορίζουσα είναι μηδενική.

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \ldots \beta_\nu \end{vmatrix} = 0$$

ii. Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες είναι ίδιες, η ορίζουσα είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 7 & 1 & 7 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

iii. Εάν τα στοιχεία δύο γραμμών ή δύο στηλών είναι ανάλογα, η ορίζουσα είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \\ 7 & -1 & 35 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 10 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & -5 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

iv. Για να πολλαπλασιάσουμε μια ορίζουσα με κ, αρκεί να πολ/με μια γραμμή ή μια στήλη με κ.

$$3\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & \beta & \gamma \\ 3\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 3\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

v. Αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

vi. Αν εναλλάξουμε δύο γραμμές ή δύο στήλες, η ορίζουσα αλλάζει σημείο.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

vii. Εάν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης, προστεθούν ή αφαιρεθούν από τα αντίστοιχα στοιχεία άλλης γραμμής ή στήλης, η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta\pm\alpha \\ \alpha_1 & \beta_1\pm\alpha_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta\pm\alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1\pm\alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\pm\alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

iix. Εάν προστέσουμε ή αφαιρέσουμε σε μια γραμμή ή στήλη τα στοιχεία των άλλων γραμμών ή στηλών, η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\pm\beta\pm\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha_1\pm\beta_1\pm\gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2\pm\beta_2\pm\gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

ix. Εάν προστεθούν τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης στα αντίστοιχα στοιχεία των υπολοίπων γραμμών ή στηλών η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta+\alpha & \gamma+\alpha \\ \alpha_1 & \beta_1+\alpha_1 & \gamma_1+\alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2+\alpha_2 & \gamma_2+\alpha_2 \end{vmatrix}$$

X. Αν τα στοιχεία ορίζουσας, που είναι στο ίδιο μέρος της κύριας διαγώνιας είναι μηδέν, η ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγώνιας.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha\beta_1\gamma_2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot(-1) = -6$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες με την βοήθεια των ιδιοτήτων

1. $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2-2 & 2-2 \\ 4 & -1-4 & 3-4 \\ 1 & 3-1 & 3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -10 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8+1 & -10+2 & -2+2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & -8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 2(-8)2 = -16$$

2. $$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3-3 & 3-3 \\ 5 & 6-5 & 7-5 \\ 8 & 9-8 & 4-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 10+8 & 2+1 & 4-4 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3(-4) = -18$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-1 & 3-1 \\ 4 & 4-4 & 4-4 \\ 2 & 3-2 & 7-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

4. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3+2 & 4+1 & 2+3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1-2 & 3-2 \\ 5 & 5-5 & 5-5 \\ -2 & 3+2 & 4+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 55$$

5. $$\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 16-13 & 19-13 \\ 14 & 17-14 & 20-14 \\ 15 & 18-15 & 21-15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 6 \\ 14 & 3 & 6 \\ 15 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

6. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 35 & 37-35 & 34-35 \\ 23 & 26-23 & 25-23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 35 & 2 & -1 \\ 23 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 70 & 4 & -2 \\ 23 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 93 & 7 & 0 \\ 23 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\, 1\cdot 7\cdot 2 = 7$$

7. $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & +1 \\ 1 & 1 & +1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\cdot 0 = 0$$

8. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3+4 & 3 & 4 \\ 3+4+2 & 4 & 2 \\ 4+2+3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 2 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ 0 & 2-0 & 2-0 & 1-0 \\ -2 & 2+2 & 0+2 & -1+2 \\ 3 & 1-3 & -1-3 & 0-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4-2 & 2-2 & 1-1 \\ -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

10. $$\begin{vmatrix} \mu & \mu+1 & \mu+3 \\ \nu & \nu+1 & \nu+3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & 1 & 3 \\ \nu & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ \nu & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

11. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1-4 & 2 & 4 & 1 \\ 0-0 & 1 & 0 & 2 \\ 2-2 & 0 & 2 & 1 \\ 0-0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0-0 & 2-2 & 0-0 & 1-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\, (-3)\cdot 2\cdot 2(-3) = \frac{36}{4} = 9$$

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

1. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = A$ 2. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta+2 & 1 \\ \beta & 2+\alpha & 1 \\ 2 & \alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = B$

i) Με τις ιδιότητες.

ii) Με την μέθοδο Sarrus

iii) Με την μέθοδο ανάπτυξης.

Λύση: 1. Προσθέτω την πρώτη γραμμή στην δεύτερη και τρίτη και είναι:

$A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 7 & 0 & -7 \\ 8 & 0 & -5 \end{vmatrix}$. Αναπτύσσω την A κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης και είναι:

$A = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = -35+56 = +21.$

Με την μέθοδο Sarrus είναι: $\left|\begin{matrix} 4 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{matrix} =$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$= 12-4-24+9-4+32 = -32+53 = 21.$

Με την μέθοδο της ανάπτυξης:

Αναπτύσσουμε την A κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής

Είναι $A = (-1)^2 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3(-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^4(-8) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8+5+8 = 21$

2. Προσθέτουμε την 1η και την 3η στήλη στη δεύτερη και είναι:

$$B = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\beta+3 & 1 \\ \beta & \alpha+\beta+3 & 1 \\ 2 & \alpha+\beta+3 & 1 \end{vmatrix}$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $\alpha+\beta+3$ και είναι:

$B = (\alpha+\beta+3) \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \beta & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ γιατί η ορίζουσα έχει δύο στήλες ίσες

Με την μέθοδο Sarrus

Είναι $B = \left|\begin{matrix} \alpha & \beta+2 & 1 \\ \beta & 2+\alpha & 1 \\ 2 & \alpha+\beta & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \alpha & \beta+2 \\ \beta & 2+\alpha \\ 2 & \alpha+\beta \end{matrix} = \alpha(\alpha+2)+2(\beta+2)+\beta(\alpha+\beta)-\beta(\beta+2)-\alpha(\alpha+\beta)-2(\alpha+2) =$

$= \alpha^2+2\alpha+2\beta+4+\alpha\beta+\beta^2-\beta^2-2\beta-\alpha^2-\alpha\beta-2\alpha-4 = 0.$

Με τη μέθοδο ανάπτυξης.

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 3ης στήλης και είναι:

$$B = (-1)^4 1\cdot\begin{vmatrix} \beta & 2+\alpha \\ 2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} \alpha & \beta+2 \\ 2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} + (-1)^6 \begin{vmatrix} \alpha & \beta+2 \\ \beta & 2+\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \beta(\alpha+\beta)-2(\alpha+2)-\alpha(\alpha+\beta)-2(\beta+2)+\alpha(\alpha+2)-\beta(\beta+2) = 0$$

2. Δίνεται η ορίζουσα: $A = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

Να υπολογιστεί με τις ιδιότητες.

Λύση: Προσθέτουμε όλες τις γραμμές στην πρώτη και έχουμε:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

γιατί έχει μια γραμμή με όλα τα στοιχεία της μηδέν.

3. Δίνεται η ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 8 & 20 \\ 1 & 5 & 13 & 35 \end{vmatrix}$ **Με τις ιδιότητες δείξετε ότι** $D = 1$.

Λύση: Από την δεύτερη - τρίτη - τέταρτη γραμμή αφαιρούμε την πρώτη και έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 16 \\ 0 & 3 & 12 & 31 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε την D κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης και έχουμε:

$$D = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με το (-2) και με το (-3) και την προσθέτουμε στην δεύτερη και τρίτη αντίστοιχα και έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 13 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης και έχουμε: $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 13-12 = 1.$

Σημείωση: Αν μια γραμμή ή μια στήλη σε μια ορίζουσα έχει όλα τα στοιχεία

της ίσα τότε αφαιρούμε την πρώτη στήλη από όλες τις υπόλοιπες και δημιουργούμε μια ορίζουσα σε μια γραμμή της οποίας όλα τα στοιχεία είναι μηδέν εκτός από ένα και σε συνέχεια την αναπτύσσουμε, ή αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες κ.λ.π.

4. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Αφού την θέσετε σε κανονική μορφή. (Μια ορίζουσα είναι σε κανονική μορφή όταν τα στοιχεία που βρίσκονται από τη μια μεριά ή από την άλλη της κύριας διαγώνιας είναι μηδέν).
Η τιμή μιας τέτοιας ορίζουσας ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγώνιας.

Λύση: Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή της D με (-2),(-5),(-1) και την προσθέτουμε στη δεύτερη, τρίτη, τέταρτη γραμμή αντίστοιχα, και έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 10 & -9 \\ 0 & 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

Προσθέτουμε στη δεύτερη γραμμή ή την 3η ή την 4η και έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 9 & -10 \\ 0 & -6 & 10 & -9 \\ 0 & 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζω τη δεύτερη γραμμή με (-1) και με $\frac{4}{6}$ και την προσθέτω στην 3η και 4η και έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -\frac{46}{6} \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με (-12) την προσθέτουμε στην 4η και έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{118}{6} \end{vmatrix}$$

Άρα $D = 1 \cdot (-6) \cdot 1 \cdot \left(-\frac{118}{6}\right) = 118$

5. Να δειχτεί ότι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \\ 1 & -x & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha x+\beta & \beta x+\gamma \\ \beta x+\gamma & \gamma x+\delta \end{vmatrix}$

Λύση:
Έχουμε: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \\ 1 & -x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} \alpha x & \beta & \gamma \\ \beta x & \gamma & \delta \\ x & -x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} \alpha x+\beta & \beta & \gamma \\ \beta x+\gamma & \gamma & \delta \\ 0 & -x & x^2 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} \alpha x+\beta & \beta x & \gamma \\ \beta x+\gamma & \gamma x & \delta \\ 0 & -x^2 & x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} \alpha x+\beta & \beta x+\gamma & \gamma \\ \beta x+\gamma & \gamma x+\delta & \delta \\ 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha x+\beta & \beta x+\gamma \\ \beta x+\gamma & \gamma x+\delta \end{vmatrix}$$

6. Να δειχτεί ότι: $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (x^3-1)^2$

Λύση: Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη στήλη με x, την αφαιρούμε από την τρίτη και αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 3ης γραμμής, και έχουμε:

$$D = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^2 \\ x^2 & x & x \\ x & x^3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} 1 & x^2 & 0 \\ x^2 & x & 0 \\ x & x^3 & 1-x^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{x}(1-x^3) \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ x^2 & x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x}(1-x^3)(x-x^4) = (1-x^3)^2$$

7. Να δειχτεί ότι: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Προσθέτουμε τη 2η γραμμή στην 3η και βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(\alpha+\beta+\gamma)$.

Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

8. Δείξετε ότι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

Λύση: Έχουμε $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \alpha & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta & \gamma & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \gamma & \alpha & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} =$

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & 0 \\ \beta-\alpha & \gamma-\beta & 0 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \cdot \begin{vmatrix} \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \beta-\alpha & \gamma-\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)((\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)+(\alpha-\beta)^2) = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$

9. Να δειχτεί ότι: $\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & (\alpha-\beta+\beta-\gamma+\gamma-\alpha) \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & (\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta) \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & (\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & 0 \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & 0 \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & 0 \end{vmatrix} = 0$

10. Να δειχτεί ότι: $D = \begin{vmatrix} 1 & \beta\gamma & \beta+\gamma \\ 1 & \gamma\alpha & \gamma+\alpha \\ 1 & \alpha\beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

Λύση: $D = \begin{vmatrix} 1 & \beta\gamma & \beta+\gamma \\ 1-1 & \gamma(\alpha-\beta) & \alpha-\beta \\ 1-1 & \beta(\alpha-\gamma) & \alpha-\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma(\alpha-\beta) & \alpha-\beta \\ \beta(\alpha-\gamma) & \alpha-\gamma \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)$

11. Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 2+x & 2 & 1 \\ 3+x & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Λύση: Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} 1+x-1 & 1 & 1 \\ 2+x-2 & 2 & 1 \\ 3+x-3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ x & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

12. Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Προσθέτουμε στην πρώτη στήλη τις άλλες και βγάζουμε κοινό παράγοντα το $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ οπότε έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma+\delta & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta & \gamma & \delta & \alpha \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta & \delta & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta) \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & \gamma & \delta & \alpha \\ 1 & \delta & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

13. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^3(x+3)$

Λύση: Προσθέτουμε στην πρώτη στήλη τις υπόλοιπες και έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες και έχουμε:

$$D = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3$$

14. Να υπολογιστεί με τις ιδιότητες η ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu & 1+\rho & 1+\kappa & 1+\alpha & 1+\beta \\ 1+2\lambda & 1+2\mu & 1+2\rho & 1+2\kappa & 1+2\alpha & 1+2\beta \\ 1+3\lambda & 1+3\mu & 1+3\rho & 1+3\kappa & 1+3\alpha & 1+3\beta \\ 1+4\lambda & 1+4\mu & 1+4\rho & 1+4\kappa & 1+4\alpha & 1+4\beta \\ 1+5\lambda & 1+5\mu & 1+5\rho & 1+5\kappa & 1+5\alpha & 1+5\beta \\ 1+6\lambda & 1+6\mu & 1+6\rho & 1+6\kappa & 1+6\alpha & 1+6\beta \end{vmatrix}$$

Λύση: Την πρώτη στήλη αφαιρούμε από την δεύτερη και τρίτη και βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(\mu-\lambda)$ και $(\rho-\lambda)$ οπότε έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1+\lambda & \mu-\lambda & \rho-\lambda & 1+\kappa & 1+\alpha & 1+\beta \\ 1+2\lambda & 2(\mu-\lambda) & 2(\rho-\lambda) & . & . & . \\ 1+3\lambda & 3(\mu-\lambda) & 3(\rho-\lambda) & . & . & . \\ 1+4\lambda & 4(\mu-\lambda) & 4(\rho-\lambda) & . & . & . \\ 1+5\lambda & 5(\mu-\lambda) & 5(\rho-\lambda) & . & . & . \\ 1+6\lambda & 6(\mu-\lambda) & 6(\rho-\lambda) & 1+6\kappa & 1+6\alpha & 1+6\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\mu-\lambda)(\rho-\lambda)\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 1+\kappa & 1+\alpha & 1+\beta \\ . & 2 & 2 & . & . & . \\ . & 3 & 3 & . & . & . \\ . & 4 & 4 & . & . & . \\ . & 5 & 5 & . & . & . \\ 1+6\lambda & 6 & 6 & 1+6\kappa & 1+6\alpha & 1+6\beta \end{vmatrix} = 0$$

γιατί η ορίζουσα έχει δύο στήλες ίσες.

15. Δείξετε ότι: $D_\nu = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta & \dots & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \beta \end{vmatrix} = \alpha(\beta-\alpha)^{\nu-1}$

Λύση: Αφαιρούμε την 1η γραμμή από τις υπόλοιπες και έτσι δημιουργείται μια τριγωνική κάτω ορίζουσα οπότε ιδιότητα X έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta-\alpha \end{vmatrix} = \alpha\underbrace{(\beta-\alpha)\dots(\beta-\alpha)}_{\nu-1} = \alpha(\beta-\alpha)^{\nu-1}$$

16. Να δειχτεί ότι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha\beta_1\gamma_2.$

Λύση: Έχουμε $D = \alpha\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha\beta_1\gamma_2$

17. Οι αριθμοί 104,117,143 διαιρούνται με το 13. Να δειχτεί ότι και η ορίζουσα: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ **διαιρείται με 13.**

Λύση: Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 0 & 1-0 & 4-0 \\ 4 & 7-4 & 3-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1-12) = -13$

18. Οι αριθμοί 280, 252 και 364 διαιρούνται με 28. Να δειχτεί ότι και η ορίζουσα: $D = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ **διαιρείται με 28.**

Λύση: Έχουμε: $D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 4 & 10 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 4-3 & 10-6 & 4-4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{διαιρείται με } 28.$$

19. Να τεθεί με την μορφή του γινομένου 2·3·5 η ορίζουσα:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 6 \\ 15 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

Λύση: Έχουμε: $D = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= 5\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1-1 & 2-1 & 3-2 \\ 1-1 & 3-1 & -1-2 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 2(-5)$$

20. Να δειχτεί ότι η ορίζουσα: $D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$

διαιρείται με το $(\alpha+3)$ και $(\alpha-1)^3$.

Λύση: Προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή τις υπόλοιπες

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+3 & \alpha+3 & \alpha+3 & \alpha+3 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+3)(\alpha-1)^3.$$

21. Να δειχτεί ότι $D = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\gamma)$

Λύση: Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \gamma-\alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \delta-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \gamma-\beta & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \delta-\gamma \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\gamma)$$

Η μορφή (1) λέγεται τριγωνική. Κάθε ορίζουσα μπορεί ν' αναχτεί σε τριγωνική.

22. Να δειχτεί ότι: $D: \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \alpha\gamma \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$

Λύση: $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\begin{vmatrix} \beta\gamma & \alpha\beta\gamma & \alpha^2\beta\gamma \\ \alpha\gamma & \alpha\beta\gamma & \beta^2\alpha\gamma \\ \alpha\beta & \alpha\beta\gamma & \gamma^2\alpha\beta \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\alpha\beta\gamma\begin{vmatrix} \beta\gamma & 1 & \alpha^2\beta\gamma \\ \alpha\gamma & 1 & \beta^2\alpha\gamma \\ \alpha\beta & 1 & \gamma^2\alpha\beta \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}\alpha^2\beta^2\gamma^2\begin{vmatrix} \beta\gamma & 1 & \alpha \\ \alpha\gamma & 1 & \beta \\ \alpha\beta & 1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \alpha\gamma \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix}$

23. Να δειχτεί ότι: $D: \begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)^3.$

Λύση: Προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή τις δύο άλλες

$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} =$

$= (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & -\alpha-\beta-\gamma & 0 \\ 2\gamma & 0 & -\alpha-\beta-\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)^3.$

24. Να υπολογιστεί η ορίζουσα: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta \end{vmatrix}$

Λύση: Αν αφαιρέσουμε από κάθε γραμμή την πρώτη →

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = 1\cdot\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta$

Εφαρμογή: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 27 & 1 \\ 1 & 1 & 39 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 26+1 & 1 \\ 1 & 1 & 38+1 \end{vmatrix} = 26\cdot 38$

Γενικότερα ισχύει: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\alpha_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & & 1+\alpha_\nu \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\nu$

Η απόδειξη, ίδια με την προηγούμενη.

25. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & 1+\beta_1 & \alpha_1+\beta_1 \\ 1+\alpha_2 & 1+\beta_2 & \alpha_2+\beta_2 \\ 1+\alpha_3 & 1+\beta_3 & \alpha_3+\beta_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}$

Λύση: Προσθέτουμε τις δύο πρώτες στήλες , αφαιρούμε την τρίτη στήλη, και έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & 1+\beta_1 & 2 \\ 1+\alpha_2 & 1+\beta_2 & 2 \\ 1+\alpha_3 & 1+\beta_3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & 1+\beta_1 & 1 \\ 1+\alpha_2 & 1+\beta_2 & 1 \\ 1+\alpha_3 & 1+\beta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Από την 1η στήλη και 2η αφαιρούμε την τρίτη και έχουμε:

$$= 2\begin{vmatrix} 1+\alpha_1-1 & 1+\beta_1-1 & 1 \\ 1+\alpha_2-1 & 1+\beta_2-1 & 1 \\ 1+\alpha_3-1 & 1+\beta_3-1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

26. Να δειχτεί ότι: $\begin{vmatrix} 1 & \text{συν}\omega & \text{συν}2\omega \\ \text{συν}\omega & \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega \\ \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega & \text{συν}4\omega \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Αν στην πρώτη γραμμή προσθέσουμε την τελευταία ⟶

$$\begin{vmatrix} 2\text{συν}^2\omega & 2\text{συν}2\omega\text{συν}\omega & 2\text{συν}3\omega\text{συν}\omega \\ \text{συν}\omega & \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega \\ \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega & \text{συν}4\omega \end{vmatrix} = 2\text{συν}\omega\begin{vmatrix} \text{συν}\omega & \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega \\ \text{συν}\omega & \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega \\ \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega & \text{συν}4\omega \end{vmatrix} = 0$$

27. Να δειχτεί ότι: $\begin{vmatrix} 1 & \text{συν}\alpha-\text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha+\text{ημ}\alpha \\ 1 & \text{συν}\beta-\text{ημ}\beta & \text{συν}\beta+\text{ημ}\beta \\ 1 & \text{συν}\gamma-\text{ημ}\gamma & \text{συν}\gamma+\text{ημ}\gamma \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & \text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \\ 1 & \text{συν}\beta & \text{ημ}\beta \\ 1 & \text{συν}\gamma & \text{ημ}\gamma \end{vmatrix}$

Λύση: Αν προσθέσουμε στην 2η στήλη, την τρίτη έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\text{συν}\alpha & \text{συν}\alpha+\text{ημ}\alpha \\ 1 & 2\text{συν}\beta & \text{συν}\beta+\text{ημ}\beta \\ 1 & 2\text{συν}\gamma & \text{συν}\gamma+\text{ημ}\gamma \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & \text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \\ 1 & \text{συν}\beta & \text{ημ}\beta \\ 1 & \text{συν}\gamma & \text{ημ}\gamma \end{vmatrix}$$

όπου αφαιρέσαμε από την τρίτη στήλη την δεύτερη.

28. Να λυθεί η εξίσωση: (E): $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Έχουμε: (E) $\longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & x+1 \\ 1-x & x-1 & 1-x \\ 1-x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow (1-x)\begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ x-1 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1-x-x^2+1)=0 \Leftrightarrow (1-x)(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow \cdots$$

$\cdots \Leftrightarrow x = -2,\ x = 1$ διπλή

29. Να λυθεί η εξίσωση: (Ε): $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 2 \\ 3 & x+3 & -1 \\ 1 & x+1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Έχουμε: (Ε) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 3 & x & -1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 3-2 & x-x & -1-2 \\ 1-2 & x-x & 0-2 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x(-2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

30. Να λυθεί η εξίσωση: (Ε): $\begin{vmatrix} 1 & 4 & x+5 \\ 3 & 6 & x+9 \\ 5 & 3 & x+8 \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Έχουμε: (Ε) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 & x+5 \\ 3 & 9 & x+9 \\ 5 & 8 & x+8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 & x \\ 3 & 9 & x \\ 5 & 8 & x \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 & x \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

31. Να λυθεί η εξίσωση: (Ε): $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{vmatrix}$

Λύση: (Ε) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1-x^2 & 4-x^2 & x^2 \end{vmatrix} = 3-2x \Leftrightarrow -1(x^2-2+2x^2)+2(4-x^2) =$

$= 3-2x \Leftrightarrow 5x^2-2x-7 = 0 \Leftrightarrow \ldots$

32. Να λυθεί η εξίσωση: (Ε): $\begin{vmatrix} x & x+6 & x+3 \\ x+5 & x & x+2 \\ x+3 & x+4 & x \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Εχουμε: (Ε) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 6 & 3 \\ x+5 & -5 & -3 \\ x+3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 6 & 3 \\ 2x+5 & 1 & 0 \\ 2x+3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\begin{vmatrix} 2x+5 & 1 \\ 2x+3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(14x+35-2x-3) = 0 \Leftrightarrow 12x = -32 \Leftrightarrow x = -8/3$$

33. Να λυθεί η εξίσωση: $E = \begin{vmatrix} x & \alpha & \beta & x \\ \alpha & x & x & \beta \\ \beta & x & x & \alpha \\ x & \beta & \alpha & x \end{vmatrix} = 0$ αν $\alpha \neq \beta$

Λύση: Προσθέτουμε όλες τις στήλες στην πρώτη, βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2x+\alpha+\beta$ και έχουμε:

$$E = (2x+\alpha+\beta) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & x \\ 1 & x & x & \beta \\ 1 & x & x & \alpha \\ 1 & \beta & \alpha & x \end{vmatrix} = 0$$

Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες και αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης και έχουμε:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & x \\ 0 & x-\alpha & x-\beta & \beta-x \\ 0 & x-\alpha & x-\beta & \alpha-x \\ 0 & \beta-\alpha & -(\beta-\alpha) & 0 \end{vmatrix} \cdot (2x+\alpha+\beta) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (2x+\alpha+\beta) \begin{vmatrix} x-\alpha & x-\beta & \beta-x \\ x-\alpha & x-\beta & \alpha-x \\ \beta-\alpha & -(\beta-\alpha) & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (2x+\alpha+\beta)(\beta-\alpha) \begin{vmatrix} x-\alpha & x-\beta & \beta-x \\ x-\alpha & x-\beta & \alpha-x \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Προσθέτουμε την πρώτη στήλη στην δεύτερη και αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής οπότε:

$$(2x+\alpha+\beta)(\beta-\alpha) \begin{vmatrix} x-\alpha & 2x-\alpha-\beta & \beta-x \\ x-\alpha & 2x-\alpha-\beta & \alpha-x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (2x+\alpha+\beta)(\beta-\alpha) \begin{vmatrix} 2x-\alpha-\beta & \beta-x \\ 2x-\alpha-\beta & \alpha-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (2x+\alpha+\beta)(2x-\alpha-\beta)(\beta-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \beta-x \\ 1 & \alpha-x \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (2x+\alpha+\beta)(2x-\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2 = 0$$

$$\leftrightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ ή } x = \frac{-\alpha-\beta}{2}$$

34. Να λυθεί η εξίσωση: $(E): \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & x+1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & x+2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Έχουμε:

$$(E) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x+1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x+2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \cdot x(x^2+5x+6-6) = 0 \Leftrightarrow x^3(x+5) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ (τριπλή), $x = -5$

35. Να λυθεί η εξίσωση: (E): $\begin{vmatrix} 1+x & 2+x & 3+x \\ 2+x & 3+x & 1+x \\ 3+x & 1+x & 2+x \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Έχουμε: $(E) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 2 \\ 2+x & 1 & -1 \\ 3+x & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 2 \\ 4+2x & 2 & -2 \\ 6+2x & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

πολλαπλασιάσαμε δεύτερη και τρίτη γραμμή με 2.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 2 \\ 5+3x & 3 & 0 \\ 7+3x & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \begin{vmatrix} 5+3x & 3 \\ 7+3x & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

36. Να λυθεί η εξίσωση: (E): $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 1 \\ 2 & x & -1 & 1 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Παρατηρούμε ότι: $E(2) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (δύο ίσες στήλες)

Όμοια $E(-1) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (δύο ίδιες γραμμές)

και όμοια $E(3) = 0$, και επειδή είναι τρίτου βαθμού $\rightarrow \rho_1 = 2, \rho_2 = -1$ και $\rho_3 = 3$.

37. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2+x_2 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & \nu+x_\nu \end{vmatrix} = 0$

Λύση: Έχουμε: $(E) \Longleftrightarrow x_1(x_2+1)(x_3+2)\dots(x_\nu+\nu-1) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ \dots,\ x_\nu = -\nu+1$.

38. Να λυθεί η εξίσωση: (E): $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & y+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0$

Λύση: $(E) \Longleftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = 0 \Longleftrightarrow x = -1,\ y = -1,\ z = -1$

39. Να δειχτεί ότι: $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_\nu \end{vmatrix} = \nu!$ όπου $S_\nu = 1+2+3+\dots+\nu$ $\nu \in \mathbb{N}$

Λύση:

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+2 & 1+2 & \dots & 1+2 \\ 1 & 1+2 & 1+2+3 & \dots & 1+2+3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1+2 & 1+2+3 & \dots & 1+2+\dots+\nu \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 2 & 2+3 & \dots & 2+3 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & 2+3 & \dots & +\nu \end{vmatrix}$$ αφαιρούμε την 2η γραμμή από τις υπόλοιπες →

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3+\dots+\nu \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\dots\nu = \nu!$$

(γιατί τα στοιχεία αριστερά της κύριας διαγώνιας είναι μηδέν).

40. Να δειχτεί ότι: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & συνγ & συνβ \\ 1 & συνγ & 1 & συνα \\ 1 & συνβ & συνα & 1 \end{vmatrix} = -16ημ^2\frac{α}{2}\,ημ^2\frac{β}{2}\,ημ^2\frac{γ}{2}$.

Λύση: Έχουμε: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & συνγ-1 & συνβ-1 \\ 1 & συνγ-1 & 0 & συνα-1 \\ 1 & συνβ-1 & συνα-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & συνγ-1 & συνβ-1 \\ συνγ-1 & 0 & συνα-1 \\ συνβ-1 & συνα-1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2(συνα-1)(συνβ-1)(συνγ-1) = -16ημ^2\frac{α}{2}\,ημ^2\frac{β}{2}\,ημ^2\frac{γ}{2}$.

41. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & νx \end{vmatrix} = 0 \ (E)$.

Λύση: Αφαιρούμε την 1η γραμμή από τις υπόλοιπες και δημιουργείται έτσι μια ορίζουσα τριγωνική κάτω οπότε ιδιότητα(x)οριζουσών έχουμε:

$$(E) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3x-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & νx-1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (2x-1)(3x-1)\dots(νx-1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ή $x = \frac{1}{3}$ ή ... ή $x = \frac{1}{ν}$

42. Να δειχτεί ότι η ορίζουσα: $\begin{vmatrix} 1 & α & α^2 & α^3 \\ α^2 & 1 & α & α^2 \\ x & α^3 & 1 & α \\ y & z & α^3 & 1 \end{vmatrix}$ **είναι ανεξάρτητη από τα x,y,z.**

Λύση: Έχουμε $D = \frac{1}{α}\begin{vmatrix} 1 & α & α^2 & α^3 \\ α^3 & α & α^2 & α^3 \\ x & α^3 & 1 & α \\ y & z & α^3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{α}\begin{vmatrix} 1-α^3 & 0 & 0 & 0 \\ α^3 & α & α^2 & α^3 \\ x & α^3 & 1 & α \\ y & z & α^3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{α^2}\begin{vmatrix} 1-α^3 & 0 & 0 & 0 \\ α^3 & & {}^2 & α^3 \\ x & α^4 & 1 & α \\ y & αz & α^3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{α^2}\begin{vmatrix} 1-α^3 & 0 & 0 & 0 \\ α^3 & α^2 & 0 & α^3 \\ x & α^4 & 1-α^4 & α \\ y & αz & α^3-αz & 1 \end{vmatrix} =$

$$=\frac{1}{a^5}\begin{vmatrix} 1-a^3 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & a^2 & 0 & a^3 \\ a^2x & a^6 & a^2(1-a^4) & a^3 \\ y & az & a^3-az & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^5}\begin{vmatrix} 1-a^3 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & a^2 & 0 & a^3 \\ a^2x-a^3 & a^6-a^2 & a^2(1-a^4) & 0 \\ y & az & a^3-az & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(1-a^3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a^4 & 1-a^4 & a \\ az & a^3-az & 1 \end{vmatrix} = (1-a^3)(1+a^2z+a^8-a^4-a^4-a^2z) =$$

$=(1-a^3)(1+a^8-2a^4)$. Δηλαδή ανεξάρτητο των x,y,z.

43. Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$D=\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2+a_3 & a_3+a_4 & a_4+a_5 \\ a_6+a_7 & a_7+a_8 & a_8+a_9 & a_9+a_{10} \\ a_{11}+a_{12} & a_{12}+a_{13} & a_{13}+a_{14} & a_{14}+a_{15} \\ a_{16}+a_{17} & a_{17}+a_{18} & a_{18}+a_{19} & a_{19}+a_{20} \end{vmatrix}$$

i) Όπου οι $a_1,a_2,\dots,a_{20}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

ii) Όπου οι $a_1,a_2,\dots,a_{20}$ είναι διαδοχικοί γεωμετρικής προόδου.

Λύση: Έχουμε: $a_2 = a_1+\omega$, $a_3 = a_1+2\omega$ ... $a_{20} = a_1+19\omega$. Επομένως

$$D=\begin{vmatrix} 2a_1+\omega & 2a_1+3\omega & 2a_1+5\omega & 2a_1+7\omega \\ 2a_1+11\omega & 2a_1+13\omega & 2a_1+15\omega & 2a_1+17\omega \\ 2a_1+21\omega & 2a_1+23\omega & 2a_1+25\omega & 2a_1+27\omega \\ 2a_1+31\omega & 2a_1+33\omega & 2a_1+35\omega & 2a_1+37\omega \end{vmatrix} =$$

αφαιρούμε την πρώτη, από τις υπόλοιπες στήλες.

$$=\begin{vmatrix} 2a_1+\omega & 2\omega & 4\omega & 6\omega \\ 2a_1+11\omega & 2\omega & 4\omega & 6\omega \\ 2a_1+21\omega & 2\omega & 4\omega & 6\omega \\ 2a_1+31\omega & 2\omega & 4\omega & 6\omega \end{vmatrix} = 0$$

ii. Έχουμε: $a_2 = a_1\omega$, $a_3 = a_1\omega^2,\dots, a_{20} = a_1\omega^{19} \rightarrow$

$$=\begin{vmatrix} a_1+a_1\omega & a_1\omega+a_1\omega^2 & a_1\omega^2+a_1\omega^3 & a_1\omega^3+a_1\omega^4 \\ a_1\omega^5+a_1\omega^6 & a_1\omega^6+a_1\omega^7 & a_1\omega^7+a_1\omega^8 & a_1\omega^8+a_1\omega^9 \\ a_1\omega^{10}+a_1\omega^{11} & a_1\omega^{11}+a_1\omega^{12} & a_1\omega^{12}+a_1\omega^{13} & a_1\omega^{13}+a_1\omega^{14} \\ a_1\omega^{15}+a_1\omega^{16} & a_1\omega^{16}+a_1\omega^{17} & a_1\omega^{17}+a_1\omega^{18} & a_1\omega^{18}+a_1\omega^{19} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_1(1+\omega) & a_1\omega(1+\omega) & a_1\omega^2(1+\omega) & a_1\omega^3(1+\omega) \\ a_1\omega^5(1+\omega) & a_1\omega^6(1+\omega) & a_1\omega^7(1+\omega) & a_1\omega^8(1+\omega) \\ a_1\omega^{10}(1+\omega) & a_1\omega^{11}(1+\omega) & a_1\omega^{12}(1+\omega) & a_1\omega^{13}(1+\omega) \\ a_1\omega^{15}(1+\omega) & a_1\omega^{16}(1+\omega) & a_1\omega^{17}(1+\omega) & a_1\omega^{18}(1+\omega) \end{vmatrix} =$$

$= a_1^4(1+\omega)^4\omega^{30}0 = 0$

44. Θεωρούμε την εξίσωση: $x^3+\alpha x+\beta = 0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν x_1,x_2,x_3 οι ρίζες και

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

να δειχτεί ότι: $D^2 = -4\alpha^3-27\beta^2$.

Λύση: $$D^2 = D\cdot D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+1+1 & x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3 & x_1^4+x_2^4+x_3^4 \end{vmatrix}$$

Όμως $x_1+x_2+x_3 = 0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \alpha$ και $x_1x_2x_3 = -\beta \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2 =$
$= -2\alpha$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -3\beta$ και $x_1^4+x_2^4+x_3^4 = 2\alpha^2$.

$$D^2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2\alpha \\ 0 & -2\alpha & -3\beta \\ -2\alpha & -3\beta & 2\alpha^2 \end{vmatrix} = 3(-4\alpha^3-9\beta^2)-2\alpha(-4\alpha^2) = -4\alpha^3-27\beta^2.$$

45. Δείξετε ότι: $$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\alpha \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \\ \gamma+\alpha & \alpha+\beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

Λύση: Είναι $$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & \gamma+\alpha \\ \beta+\gamma & \gamma & \alpha+\beta \\ \gamma+\alpha & \alpha & \beta+\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \gamma & \gamma+\alpha \\ \beta+\gamma & \alpha & \alpha+\beta \\ \gamma+\alpha & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma & \alpha \\ \gamma+\alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & \alpha \\ \beta+\gamma & \gamma & \beta \\ \gamma+\alpha & \alpha & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \gamma & \gamma \\ \beta+\gamma & \alpha & \alpha \\ \gamma+\alpha & \beta & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \gamma & \alpha \\ \beta+\gamma & \alpha & \beta \\ \gamma+\alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \beta & \gamma \\ \gamma & \gamma & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \beta & \alpha \\ \gamma & \gamma & \beta \\ \alpha & \alpha & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \gamma \\ \beta & \alpha & \alpha \\ \gamma & \beta & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \gamma \\ \gamma & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \\ \gamma & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

1. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. Όμοια να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

1. $\begin{vmatrix} 3x-5 & x-2 & x-3 \\ 2x+1 & x-1 & x+2 \\ 3x+2 & x-1 & 2x+3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & x & \beta \\ 1 & \alpha & x \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$

3. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = -\alpha(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)$

4. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+1 & \alpha+7 \\ \beta & \beta+1 & \beta+7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

5. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^4-3\alpha^2$

6. Όμοια ότι: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-z)(z-y)(z-x)$

7. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^2$

8. Όμοια ότι: $\begin{vmatrix} \nu^2 & -\nu & -\nu & \dots & -\nu \\ -\nu & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\nu & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \nu^2$

9. Να δειχτεί ότι: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix} = -(\alpha-\beta)^3$

10. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$

11. Δείξετε ότι: $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

12. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1+y & 1+z \\ 1+2x & 1+2y & 1+2z \\ 1+3x & 1+3y & 1+3z \end{vmatrix} = 0$

13. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

1. $A = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & x+y+z & xy+yz+zx & xyz \end{vmatrix}$ 2. $B = \begin{vmatrix} \beta^2\gamma^2 & \gamma^2\alpha^2 & \alpha^2\beta^2 \\ \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2 & \gamma^2+\alpha\beta+\alpha^2 & \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

3. $\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ -\beta & -\delta & 0 & \zeta \\ -\gamma & -\varepsilon & -\zeta & 0 \end{vmatrix}$ 4. $\Delta = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

14. Αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ και $\begin{vmatrix} 1 & \beta\gamma+\alpha x & \alpha^2 \\ 1 & \gamma\alpha+\beta x & \beta^2 \\ 1 & \alpha\beta+\gamma x & \gamma^2 \end{vmatrix} = 0$ δείξετε ότι $x = \alpha+\beta+\gamma$

15. Δείξετε ότι: $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \sigma\upsilon\nu(\nu-1)x & \sigma\upsilon\nu(\nu x) & \sigma\upsilon\nu(\nu+1)x \\ \eta\mu(\nu-1)x & \eta\mu(\nu x) & \eta\mu(\nu+1)x \end{vmatrix} = (1-2\alpha\sigma\upsilon\nu x+\alpha^2)\eta\mu x$

16. Δείξετε ότι αν: $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3-1 \\ y & y^2 & y^3-1 \\ z & z^2 & z^3-1 \end{vmatrix} = 0$, $x \neq y \neq z \neq x \rightarrow xyz = 1$

17. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 5 \\ 3 & 4-x & 3 \\ 4 & 5 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} 3^3 & 3^3 & 3^3 \\ 3^3 & 3^3-x & 3^3 \\ 3^3 & 3^3 & 3^4-x \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

19. Εάν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ δείξετε ότι: $\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)$

20. Να λυθεί η εξίσωση:

$D = \begin{vmatrix} -x & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & -x & \gamma & \beta \\ \beta & \gamma & -x & \alpha \\ \gamma & \beta & \alpha & -x \end{vmatrix} = 0$

Απ.: $x = \alpha \pm \beta \pm \gamma$

21. Εάν $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ να λυθεί η εξίσωση:

$\begin{vmatrix} \alpha+x & \beta+x & \gamma+x \\ \beta+x & \gamma+x & \alpha+x \\ \gamma+x & \alpha+x & \beta+x \end{vmatrix} = 0$

22. Δείξετε ότι: $\begin{vmatrix} \text{συν}\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\text{συν}\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\text{συν}\alpha \end{vmatrix} = \text{συν}3\alpha$

23. $\begin{vmatrix} \text{ημ}^2 x & 1 & \text{συν}^2 x \\ \text{ημ}^2 y & 1 & \text{συν}^2 y \\ \text{ημ}^2 z & 1 & \text{συν}^2 z \end{vmatrix} = 0$

24. Δίνεται η ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

Αν $|\alpha_1| > |\alpha_2|+|\alpha_3|$, $|\beta_2| > |\beta_1|+|\beta_3|$, $|\gamma_3| > |\gamma_1|+|\gamma_2|$ δείξετε ότι το

σύστημα $\left|\begin{array}{l} \alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z = 0 \\ \beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z = 0 \\ \gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z = 0 \end{array}\right.$ έχει μόνο την λύση $(x,y,z) = (0,0,0)$

25. Δείξετε ότι: $A = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ y^2 & (y+1)^2 & (y+2)^2 & (y+3)^2 \\ z^2 & (z+1)^2 & (z+2)^2 & (z+3)^2 \\ \omega^2 & (\omega+1)^2 & (\omega+2)^2 & (\omega+3)^2 \end{vmatrix} = 0$

26. Αν $\eta\mu\frac{x-y}{2}\,\eta\mu\frac{y-z}{2}\,\eta\mu\frac{z-x}{2} = A$ δείξετε ότι:

1. $\begin{vmatrix} 1 & \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \\ 1 & \eta\mu y & \sigma\upsilon\nu y \\ 1 & \eta\mu z & \sigma\upsilon\nu z \end{vmatrix} = 4A$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu 2x \\ 1 & \eta\mu y & \sigma\upsilon\nu 2y \\ 1 & \eta\mu z & \sigma\upsilon\nu 2z \end{vmatrix} = -16A\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{y+z}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{z+x}{2}$.

27. Δείξετε ότι: $D = \begin{vmatrix} (\beta+\gamma)^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^2 & (\gamma+\alpha)^2 & \gamma^2 \\ \alpha^2 & \beta^2 & (\alpha+\beta)^2 \end{vmatrix} = 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$

28. Όμοια ότι: $\begin{vmatrix} -\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & -\alpha & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & -\alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} = -(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\beta+\gamma+\delta-\alpha)(\gamma+\delta+\alpha-\beta)(\delta+\alpha+\beta-\gamma)$

29. Δείξετε ότι: $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ \alpha^4 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha^5)^4$

30. Δείξετε τις παρακάτω ισότητες στις ορίζουσες ν-οστής τάξης.

1. $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+\nu-1)(\alpha-1)^{\nu-1}$

2. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & \alpha & x & \alpha & \dots & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha & \dots & x \end{vmatrix} = -(\nu-1)(x-\alpha)^{\nu-2}$$

3. $$\begin{vmatrix} -1 & x & x & \dots & x \\ x & -1 & x & \dots & x \\ x & x & -1 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{\nu-1}[(\nu-1)x-1](x+1)^{\nu-1}$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\nu-1}$$

31. Εάν $x^2+y^2+z^2+\omega^2 = 1$ Δείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} x^2-1 & xy & xz & x\omega \\ yx & y^2-1 & yz & y\omega \\ zx & zy & z^2-1 & z\omega \\ \omega x & \omega y & \omega z & \omega^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

32. Δείξετε ότι η ορίζουσα $(\nu+1)$ τάξεως

$$= \begin{vmatrix} \alpha & x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_1 & \alpha & x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ x_2 & x_2 & \alpha & x_3 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_\nu & x_\nu & x_\nu & x_\nu & \dots & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+\sum_{i=1}^{\nu} x_i)\prod_{k=1}^{\nu}(\alpha-x_k)$$

33. Δείξετε ότι: $$D_\nu = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & x & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha & x & \dots & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & x \end{vmatrix} = \alpha(x-\alpha)^{\nu-1}$$

34. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & x+1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & x+2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

35. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \nu x \end{vmatrix}$

36. Με την μεθοδο των οριζουσών να λυθούν τα συστήματα:

1. $\left| \begin{array}{l} 2x+y+3z = 1 \\ x-y+z = 2 \\ 3x+y-3z = 3 \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} x+2y+4z = 3 \\ x-y+z = 0 \\ -x+y-z = 0 \end{array} \right.$

3. $\left| \begin{array}{l} 3x-y+2z = 11 \\ x+5y+z = 10 \\ 5x-7y+2z = 9 \end{array} \right.$ 4. $\left| \begin{array}{l} \lambda x+y+z = 1 \\ x+\lambda y+z = \lambda \\ x+y+\lambda z = \lambda^2 \end{array} \right.$

37. Όμοια να λυθούν τα συστήματα

1. $\left| \begin{array}{l} x-3y-z = 0 \\ 5x-3y-2z = 9 \\ 3x+2y+2z = 6 \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}-z\sqrt{6} = 1 \\ x\sqrt{3}-y\sqrt{2}+z\sqrt{6} = 1 \\ x\sqrt{6}+2y-2\sqrt{2}z = \sqrt{2} \end{array} \right.$

38. Να λυθεί το σύστημα:

$\left| \begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2 z = \alpha^3 \\ x+\beta y+\beta^2 z = \beta^3 \\ x+\gamma y+\gamma^2 z = \gamma^3 \end{array} \right.$

Απ.: Με $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ $(x,y,z)=(\alpha\beta\gamma,-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha,\alpha+\beta+\gamma)$. Με $\alpha = \beta \neq \gamma$ $(x,y,z) = (\alpha\gamma t, -\alpha\gamma-(\alpha+\gamma)t,-(\alpha+\gamma)-t), t \in \mathbb{R}$. Με $\alpha = \beta = \gamma$ $(x,y,z) = (\alpha^3(1-\kappa-\lambda),\kappa\alpha^2,\lambda\alpha)$, $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$.

39. Αν το σύστημα: $\left| \begin{array}{l} x(\lambda+1) = 2\mu \\ y(2\lambda+1) = \mu \\ z(\lambda-1) = \mu \end{array} \right.$

με $(\lambda+1)(2\lambda+1)(\lambda-1) \neq 0$ είναι συμβιβαστό ως προς λ και μ, δείξετε ότι $2xz = xy + 6yz$.

40. Δίνεται το σύστημα $\left| \begin{array}{l} x+y+\lambda z = 0 \\ 2x+3y+4z = 0 \\ 3x+4y+5z = 1 \end{array} \right.$

Να λυθεί στις περιπτώσεις $\lambda \neq 1$ και $\lambda = 1$.

Απ.: Με $\lambda \neq 1$ $(x,y,z) = (0,0,0)$. Με $\lambda = 1$ $(x,y,z) = (z+3,-2z-2,z)$ $z \in \mathbb{R}$

41. Να λυθεί το σύστημα:

$\left| \begin{array}{l} 2x-y+3z+4\omega = 1 \\ x-2y-2z-\omega = 2 \\ y+7z+6\omega = 3 \end{array} \right.$

Απ.: $(x,y,z,\omega) = (-\frac{5}{2}(z+\omega),-(2z+\omega+4),z,\omega)$

42. Να λυθεί το σύστημα:

$\left| \begin{array}{l} x-2y+3z = 0 \\ 3x-y+4z = 0 \end{array} \right.$

Απ.: $(x,y,z) = (-5\kappa,5\kappa,5\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

43. Να λυθούν τα συστήματα:

$\left| \begin{array}{l} \alpha x+12y+3z = 0 \\ x-y+2z = 0 \\ 3x+y+(\alpha-1)z = 0 \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} 2x-\lambda y+2z = 0 \\ x+y-z = 0 \\ 2x-y-z = 0 \end{array} \right.$

44. Να λυθεί το σύστημα:

$\left| \begin{array}{l} \eta\mu\theta . x-\sigma\upsilon\nu\theta . y = \sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\theta . x+\eta\mu\theta . y = \eta\mu\alpha \end{array} \right.$

Απ.: $(x,y) = (\eta\mu(\theta+\alpha),-\sigma\upsilon\nu(\theta+\alpha))$

45. Να επιλυθούν τα συστήματα:

1. $\left| \begin{array}{l} \frac{2}{x}+\frac{4}{y} = 2 \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{y} = 3 \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = -\frac{z}{4} \\ 2x+y+4z = 23 \end{array} \right.$

Απ.: 1: $(x,y) = (-\frac{5}{2}, -\frac{15}{7})$

2: $(x,y,z)=(2,3,4)$

46. Αν $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = 0$ δείξετε ότι το σύστημα:

$\left| \begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2 z = 0 \\ x+\beta y+\beta^2 z = 0 \\ x+\gamma y+\gamma^2 z = 0 \end{array} \right.$ έχει και μη μηδενικές λύσεις.

47. Αν $\mu \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές του μ έτσι ώστε το σύστημα

$\left| \begin{array}{l} (\mu+1)x-5y+2z = 0 \\ 2\mu x+(\mu-2)y+4z = 0 \\ (3\mu-1)x-10y+4z = 0 \end{array} \right.$ να είναι αόριστο και να βρεθούν οι τύποι των λύσεων του συστήματος.

48. Έστω το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha(y+\omega) \\ y &= \beta(\omega+x) \\ \omega &= \gamma(x+y) \end{aligned}\right| \quad (\Sigma)$$

Το οποίο εκτός από την λύση $x = y = \omega = 0$ δέχεται και άλλες λύσεις

i) Δείξετε ότι $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2\alpha\beta\gamma = 1$

ii) Κάθε λύση του (Σ) επαληθεύει την σχέση

$$\frac{x^2}{\alpha(1-\beta\gamma)} = \frac{y^2}{\beta(1-\alpha\gamma)} = \frac{\omega^2}{\gamma(1-\alpha\beta)}$$ με $\alpha\beta\gamma(1-\alpha\beta)(1-\beta\gamma)(1-\gamma\alpha) \neq 0$

iii) Η (i) μπορεί να πάρη την μορφή: $\alpha\beta\gamma = \dfrac{(1-\alpha\beta)(1-\beta\gamma)(1-\gamma\alpha)}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$

iv) Να βρεθούν οι τύποι που δίνουν τις λύσεις του (Σ).

49. Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι συμβιβαστό το σύστημα:

$$\left|\begin{aligned} x-\alpha y &= 1 \\ y-\alpha x &= \beta \\ x+\beta y &= 1 \end{aligned}\right.$$

Απ.: $|\alpha| \neq 1$

50. Δείξετε ότι το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma} &= \lambda\left(1+\frac{y}{\beta}\right) \\ \frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma} &= \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{\beta}\right) \\ \frac{z}{\alpha}+\frac{z}{\gamma} &= \mu\left(1-\frac{y}{\beta}\right) \\ \frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma} &= \frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{\beta}\right) \end{aligned}\right\}$$

με $\alpha\beta\gamma\lambda\mu(\lambda+\mu) \neq 0$ είναι συμβιβαστό.

κεφαλαιο 2

στατιστικη

2.1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. **Στατιστική.** Είναι η επιστήμη που ασχολείται με την συλλογή, παρουσίαση και ανάλυση στατιστικών στοιχείων. Τα στοιχεία πρέπει να είναι αληθινά. Τα αποτελέσματα ποτέ δεν μπορεί να είναι απόλυτα, η ποιότητα και ο βαθμός αξιοπιστίας των στοιχείων επηρεάζει και το αποτέλεσμα της ανάλυσης.

2. **Πληθυσμός.** Κάθε σύνολο, του οποίου πρόκειται να εξετάσουμε τα στοιχεία του λέγεται **πληθυσμός.**
Π.χ Το σύνολο των Μαθηματικών της Αθήνας αποτελεί ένα πληθυσμό.
Το σύνολο των τυφλών ένα άλλο, κ.λ.π.
Τους πληθυσμούς τους διακρίνουμε σε πεπερασμένους (αν έχουν πεπερασμένα στοιχεία) και σε άπειρους, αν το πλήθος των στοιχείων τους είναι άπειρο.
Τον πληθυσμό συμβολίζουμε συνήθως με Ω και τα στοιχεία του με ω.

3. **Άτομα.** Ονομάζουμε άτομα τα στοιχεία που αποτελούν τον πληθυσμό.

4. **Μεταβλητή.** Ονομάζουμε μεταβλητή το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε τα στοιχεία του πληθυσμού.
Π.χ. Αν το σύνολο των τυφλών μελετηθεί ως προς Οικονομική τους κατάσταση, ή ως προς την Οικογενειακή τους κατάσταση, αυτό είναι μια μεταβλητή που συμβολίζεται συνήθως με x.

5. **Ποσοτική μεταβλητή.** Ονομάζουμε ποσοτική την μεταβλητή,που το σύνολο τιμών της είναι στοιχείο του $\mathbb{R}$ δηλ. πραγματικός αριθμός. Τα ποσοτικά χαρακτηριστικά μετριώνται με κατάλληλη μονάδα μετρήσεως.

6. **Ποιοτική μεταβλητή.** Ονομάζουμε ποιοτική την μεταβλητή, όταν το σύνολο τιμών της δεν είναι αριθμητικό σύνολο. Τα ποιοτικά δεν μετριώνται με μονάδα μετρήσεως, π.χ. Φύλο, θρήσκευμα,...

7. **Συνεχής μεταβλητή.** Μια μεταβλητή θα λέγεται συνεχής όταν μπορεί να πάρει κάθε τιμή ενός διαστήματος [α,β] και

8. **Διακριτή ή ασυνεχής.** Όταν παίρνει μόνο ορισμένες τιμές.

9. Τα στοιχεία ενός πληθυσμού, μπορούν να μελετηθούν κατά δύο τρόπους.

α) Όταν εξετάζουμε όλα τα στοιχεία του πληθυσμού, τότε λέμε ότι κάνουμε **απογραφή** του πληθυσμού και

β) Όταν εξετάζουμε μέρος μόνο του πληθυσμού, οπότε λέμε ότι κάνουμε **δειγματοληπτική έρευνα** του πληθυσμού.

β_1) **Δείγμα.** Το υποσύνολο που εξετάζουμε λέγεται δείγμα.

β_2) **Μέγεθος.** Ο πληθικός αριθμός του δείγματος λέγεται μέγεθος του δείγματος και

β_3) Η παραπάνω διαδικασία λέγεται **δειγματοληψία.**

10. **Παρατηρούμε ότι:**

Σε άπειρους πληθυσμούς, μπορούμε να κάνουμε μόνο δειγματοληψία.

Και σε πληθυσμούς πεπερασμένους αλλά με πολλά στοιχεία, η απογραφή είναι μάλλον αδύνατη.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις γίνεται δειγματοληψία ή όπως λέμε (γκάλλοπ).

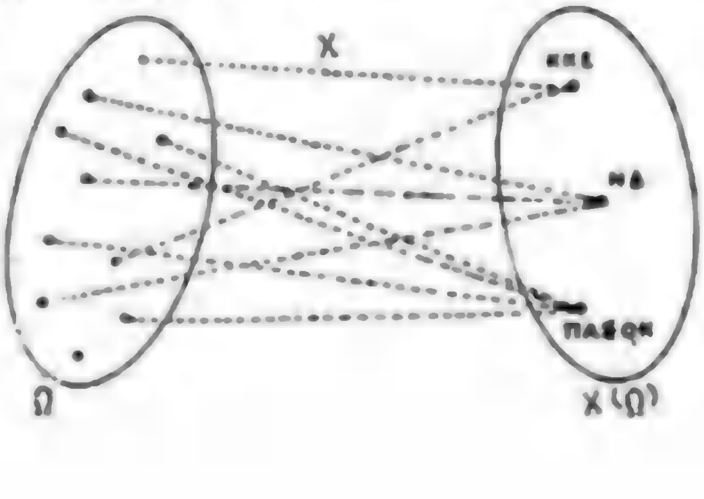
Για να είναι το αποτέλεσμα της σφιγμομέτρησης, όσο γίνεται ποιό πραγματικό, θα πρέπει το δείγμα, να είναι όσο γίνεται πιο αντιπροσωπευτικό.

11. **Παράδειγμα 1.**

Σε μια δειγματοληψία ρωτήθηκαν 9 άτομα σε ποιά πολιτική παράταξη ανήκουν και είχαμε τις απαντήσεις:

Κ.Κ.Ε., Κ.Κ.Ε., ΠΑΣΟΚ, Ν.Δ., ΠΑΣΟΚ, Ν.Δ., ΠΑΣΟΚ, Ν.Δ., ΠΑΣΟΚ.

Οπότε έχουμε τις παρακάτω απεικονίσεις,



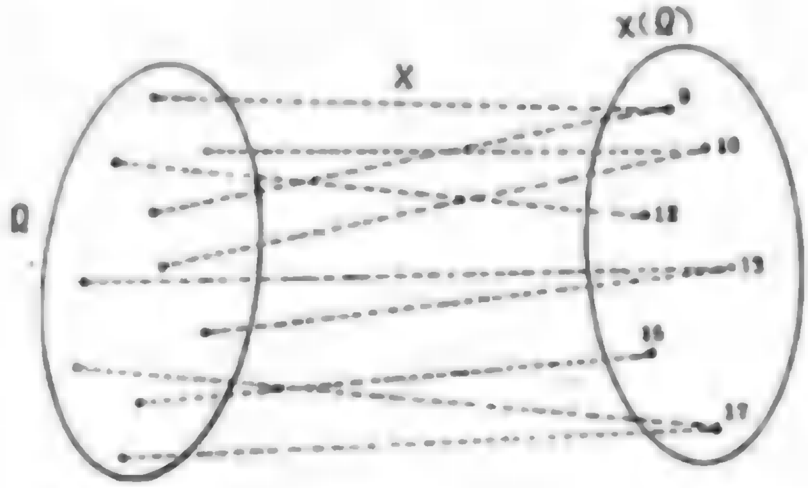
στην οποία φαίνεται ποιές ήταν οι απαντήσεις των 9 ατόμων.

12. Παράδειγμα 2.

Ρωτήθηκαν 10 μαθητές για την βαθμολογία τους και οι απαντήσεις ήταν:

12, 15, 10, 9, 13, 17, 10, 13, 9, 17

οπότε έχουμε την παρακάτω αντιστοιχία,



στην οποία φαίνονται οι απαντήσεις των 10 μαθητών.

Στο πρώτο από τα παραδείγματα η μεταβλητή είναι ποιοτική διότι το X(Ω) είναι όχι αριθμοσύνολο.

Ενώ στο δεύτερο η X είναι ποσοτική διότι το X(Ω) είναι αριθμοσύνολο.

13. Παράδειγμα 3.

Θεωρούμε τις παρακάτω μεταβλητές ιδιότητες των βιβλίων μιας βιβλιοθήκης

1. Περιεχόμενο ....
2. Σελίδες ....
3. Χρώμα εξώφυλλου ....
4. Αριθμός σχημάτων ....
5. Αριθμός σελίδων ....
6. Σχήμα σελίδων ....
7. Τιμή αγοράς ....
8. Τρόπχ απόκτησης ....

Τι είδους μεταβλητή είναι η κάθε ιδιότητα.

η 1. είναι ποιοτική η 2. είναι ποσοτική η 3. είναι ποιοτική
η 4. είναι ποσοτική η 5. είναι ποιοτική η 6. είναι ποσοτική
η 7. είναι ποσοτική η 8. είναι ποιοτική

14. Παράδειγμα 4.

Σε μια τάξη μικτού Γυμνασίου είναι 18 αγόρια και 12 κορίτσια. Θέλουμε να ελέγξουμε την επίδοση της τάξης εξετάζοντας 15 μαθητές. Πόσα αγόρια και

πόσα κορίτσια, πρέπει να εξετάσουμε;

Λύση: Θα πρέπει να χωρίσουμε τον αριθμό 15 σε μέρη ανάλογα των αριθμών 18 και 12 δηλ.

$\frac{x}{18} = \frac{y}{12} = \frac{x+y}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 9$ και $y = 6$, ώστε θα πρέπει να εξετάσουμε 9 αγόρια και 6 κορίτσια.

2.2. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

15. **Συχνότητα.** Ονομάζουμε συχνότητα μιας τιμής κάποιας μεταβλητής X ενός δείγματος το πλήθος των ατόμων του δείγματος για τα οποία η X παίρνει την τιμή x.

16. **Κατανομή συχνοτήτων.** Ένας στατιστικός πίνακας με δύο στήλες, που η μια περιέχει τις δυνατές τιμές της μεταβλητής και η δεύτερη τις αντίστοιχες συχνότητές τους, λέγεται **πίνακας συχνοτήτων** ή **κατανομή συχνότητας** ή **"κατανομή"**.

17. **Σχετική συχνότητα.** Ονομάζουμε σχετική συχνότητα f(x) μιας τιμής x, το πηλίκο της απόλυτης συχνότητας της προς το μέγεθος ν του δείγματος,

δηλ. $$f(x) = \frac{\nu(x)}{\nu}$$

18. **Παρατηρούμε ότι:** Η σχετική συχνότητα εκφράζεται συνήθως σε ποσοστά επί τις %.

δηλ. $$f_i\% = \frac{\nu(i)}{\nu}.100$$

Οι σχετικές συχνότητες γράφονται σε μια τρίτη στήλη στιυς πίνακες συχνοτήτων.

- Η παραπάνω σχέση $f(x) = \frac{\nu(x)}{\nu}$ γράφεται συνήθως και ως εξής: $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, όπου f_i οι σχετικές συχνότητες και ν_i οι συχνότητες.
- Όπως φαίνεται έχουμε: $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k = \sum_{i=1}^{k}\nu_i = \nu$ όπου ν το μέγεθος του δείγματος.

19. Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν:

α) $\forall x_i \rightarrow 0 \leq f_i \leq 1$.

β) $f_1+f_2+\ldots+f_k = 1$

γ) $\nu f_i = \nu_i$, $i = 1,2,\ldots,k$.

Πράγματι: α) $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ και επειδή $\nu \geq \nu_i \; \forall \; i \Rightarrow 0 \leq \frac{\nu_i}{\nu} \leq 1$.

β) $f_1+f_2+...+f_k = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_k}{\nu} = \frac{\nu_1+\nu_2+...+\nu_k}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$

γ) Είναι φανερό από τον ορισμό.

20. **Αθροιστική συχνότητα.** Ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα μιας τιμής μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος το άθροισμα όλων των συχνοτήτων των τιμών της X που είναι μικρότερες ή ίσες με το x.

21. **Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων.** Όταν ένα δείγμα είναι μεγάλου μεγέθους, χωρίζουμε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή σε κλάσεις, υποδιαστήματα του ίδιου **πλάτους**, και βρίσκουμε πόσες παρατηρήσεις βρίσκονται σε κάθε τέτοιο διάστημα.
Η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων γίνεται επειδή η μεταβλητή παίρνει πολλές τιμές και η συχνότητα κάθε τιμής είναι μικρή, οπότε με την ομαδοποίηση, συντομεύουμε την όλη εικόνα.

22. **Πλάτος** κλάσης ονομάζουμε την διαφορά της μικρότερης από την μεγαλύτερη τιμή: δηλ. $R = X_{max} - X_{min}$

23. **Κέντρο** κλάσης ονομάζουμε το ημιάθροισμα των άκρων της.

24. **Παράδειγμα.**
Σ'ένα σύνολο 50 μαθητών 1ης δέσμης βρέθηκαν 10 με βαθμό "Μέτρια", 15 με βαθμό "Καλά", 20 με βαθμό "Πολύ καλά" και 5 με βαθμό "Άριστα".
Ενώ σ'ένα σύνολο 25 μαθητών Δ' δέσμης βρέθηκαν 4 με βαθμό "Μέτρια", 8 με βαθμό "Καλά", 10 με βαθμό "Πολύ καλά" και 3 με βαθμό "Άριστα".
Συνεπώς μπορούμε να κάνουμε τους πίνακες:

I

x_i	ν_i	f_i%
Μέτρια	10	20
Καλά	15	30
Πολύ καλά	20	40
Άριστα	5	10
	50	100

II

x_i	ν_i	f_i%
Μέτρια	4	16
Καλά	8	32
Πολύ καλά	10	40
Άριστα	3	12
	25	100

25. **Παράδειγμα.**
Δίνεται η βαθμολογία στα Μαθηματικά ενός δείγματος 15 μαθητών

8, 10, 11, 10, 13, 15, 18, 15, 16, 18, 15, 15, 13, 13, 13.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Βαθμολογία x_i	v_i	Άθροισ. συχνοτ.	f_i%	Σχ. Αθροιστική συχνότητα
8	1	1	6,6	6,6
10	2	3	13,2	19,8
11	1	4	6,6	26,4
13	4	8	26,4	52,8
15	4	12	26,4	79,2
16	1	13	6,6	85,8
18	2	15	113,2	100,0
	15			

26. Παράδειγμα.

Κατά την μέτρηση του ύψους 30 μαθητών, είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

162	171	159	164	171
165	172	153	166	170
170	169	158	172	168
160	159	161	173	150

Παρατηρούμε ότι η μικρότερη ένδειξη είναι 150 και η μεγαλύτερη 173. Χωρίζουμε το διάστημα [150,174) σε κλάσεις πλάτους 5 cm , οπότε έχουμε τον πίνακα:

Κλάσεις	v_i	Αθροισ.συχν.	f_i%	Σχ. αθρ. συχνότητα
[150,154)	2	2	10	10
[154,158)	0	2	0	10
[158,162)	5	7	25	35
[162,166)	3	10	15	50
[166,170)	3	13	15	65
[170,174)	7	20	35	100
	20		100	

27. Παρατηρούμε ότι:

α. Στη κλάση [158,162) ανήκουν 5 μαθητές ενώ το πολύ 5 μαθητές έχουν ύψος από 158-162, χωρίς να συμπεριλαμβάνεται το 162.

β. Όταν ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις παίρνουμε κλάσεις του ίδιου πλά-

τους.

γ. Όταν η μεταβλητή είναι διακριτή οι κλάσεις είναι κλειστά διαστήματα

28. **Προσέξετε ότι:** Για την κατασκευή του παραπάνω πίνακα

α. Αν δίνεται το **πλάτος** των ίσων διαστημάτων στρογγυλοποιούμε το πλάτος μεταβολής, αυξάνοντας το στο πλησιέστερο ακέραιο πολλαπλάσιο του κ. Μετά διαιρούμε με κ για να βρούμε το πλάτος καθενός υποδιαστήματος. Σημειώνουμε τα υποδιαστήματα σε μια στήλη και στη διπλανή της την τιμή της f_i του i υποδιαστήματος.

β. Αν δίνεται το πλάτος καθ'ενός από τα ίσα διαστήματα, θεωρούμε αρχή του πρώτου διαστήματος μια τιμή μικρότερη ή ίση με το Xmin και σημειώνομε διαστήματα με το γνωστό πλάτος, μέχρις ότου καλυφθούν όλες οι τιμές που δίνονται.

γ. Συμφωνούμε το ανώτερο όριο κάθε υποδιαστήματος να μην ανήκει σε άλλο αλλά στο αμέσως επόμενο.

δ. Όταν η μεταβλητή είναι διακριτή οι κλάσεις είναι **κλειστά διαστήματα.**

29. **Παράδειγμα.**

Δίνονται οι μισθοί σε χιλιάδες 16 εργαζομένων:

16, 18, 20, 20, 21, 22, 22, 25, 23, 20, 42, 43, 35, 37, 48, 56

Να ταξινομηθούν σε πίνακα.

Η μικρότερη τιμή είναι 16 και η μεγαλύτερη 56. Θεωρούμε το διάστημα [16,58) και το χωρίζουμε σε κλάσεις πλάτους 8 οπότε έχουμε:

κλάσεις	v_i	άθροισ. συχνοτ.	f_i	Σχ.άθροισ. συχνοτήτων
[16,23)	8	8	50	50
[23,30)	2	10	12,5	62,5
[30,37)	1	11	6,25	68,75
[37,44)	3	14	18,75	87,50
[44,51)	1	15	6,25	93,75
[51,58)	1	16	6,25	100
	16		100	

30. **Παράδειγμα 4.** Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Αποτέλεσμα	Μαθητής	%
Άριστα	3	...
Λίαν καλώς	5	...
Καλώς	12	...
Σχ. καλώς	.α.	20
Κακώς	.β.	...
	35	

Λύση: Έχουμε ότι $f_i = \frac{v_i}{v}$ 100 ⟺ 20 = $\frac{\alpha}{35}$ 100 ⟺ α = $\frac{20.35}{100}$ = $\frac{700}{100}$ = 7

→ 3+5+12+7+β = 35 → 27+β = 35 → β = 8 οπότε η σχετική συχνότητα του Άριστα είναι:

$f_i = \frac{v_i}{v} 100 = \frac{3.100}{35} = \frac{300}{35} \simeq 8$, κ,λ,π.

31. Παράδειγμα 5.

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας του αριθμού των δωματίων των διαμερισμάτων μιας πολυκατοικίας και στη συνέχεια:

α) Βρείτε πόσα διαμερίσματα έχουν λιγότερα από 4 δωμάτια

β) Πόσα έχουν τουλάχιστον 4 και

γ) Πόσα έχουν το πολύ 4.

Δωμάτια	Διαμερίσματα	Άθρ. Συχ.
1	3	-
2	4	-
3	α	12
4	β	-
5	4	-
6	1	-
	38	

Λύση: Έχουμε 3+4+α = 12 → α = 12-7 = 5 και 3+4+α+β+4+1 = 38 ⟺

⟺ β = 38-17 → β = 21. Συνεπώς

Δωμάτια	Διαμερίσματα	Άθροισ.Συχν.
1	3	3
2	4	7
3	5	12
4	21	33
5	4	37
6	1	38
	38	

α) Λιγότερα από τέσσερα έχουν 12 διαμερίσματα.
β) Τουλάχιστον τέσσερα έχουν 38-12 = 26 διαμερίσματα.
γ) Το πολύ τέσσερα έχουν 33 διαμερίσματα.

2.3. Δ Ι Α Γ Ρ Α Μ Μ Α Τ Α

32. Γενικά. Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων μπορεί να γίνει και με διαγράμματα.

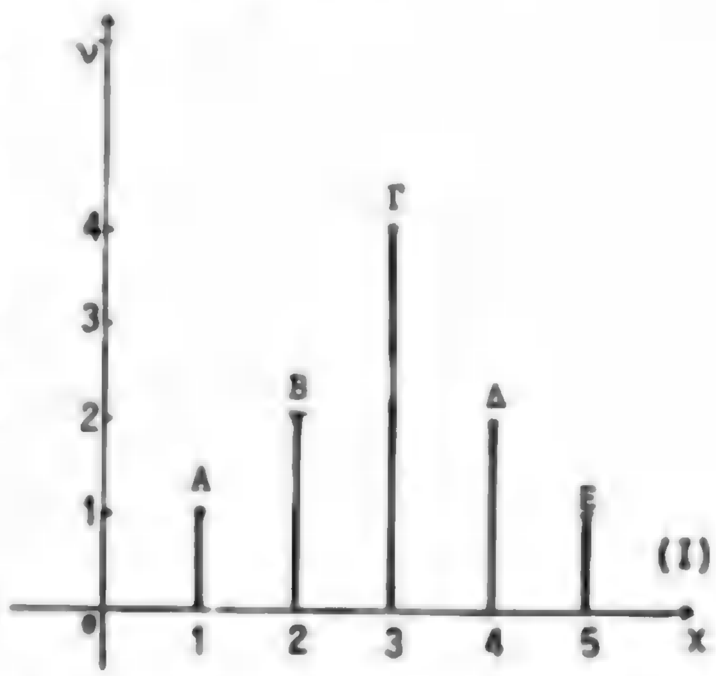
Ένα διάγραμμα, μπορεί να θεωρηθεί επαρκές μέσο στατιστικής πληροφορήσης αν παρουσιάζει παραστατικότητα, σαφήνεια και ακρίβεια.

Πλεονεκτούν κατά πολύ από τους πίνακες χωρίς όμως να απαλάσσονται και από μειονεκτήματα. Το σοβαρότερο μειονέκτημα είναι ότι στο διάγραμμα δεν μπορούν να περιληφθούν πολλές στατιστικές σειρές μαζί, γιατί δημιουργείται σύγχυση. Ακόμη από τα διαγράμματα μπορούμε να πάρουμε μόνο γενικεζ ποσοτικέζ πληροφορίες.

Ακόμη η κατασκευή των διαγραμμάτων απαιτεί κάποιες γνώσεις που δεν τις απαιτούν οι πίνακες.

33. Ραβδόγραμμα συχνοτήτων. Αν θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων 10 οικογενειών με 1,2,3,4 και 5 παιδιά έχουμε:

παιδιά: x_i	v_i	f_i %
1	1	10
2	2	20
3	4	40
4	2	20
5	1	10
	10	100



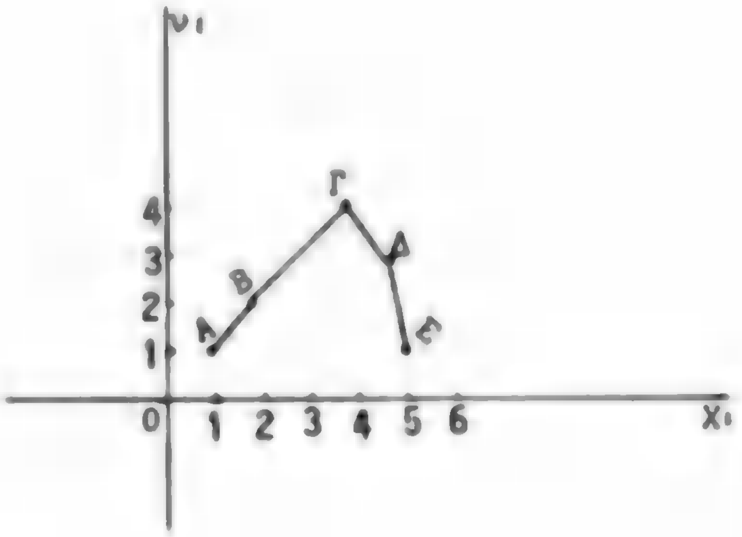
Αν τα παραπάνω στοιχεία τα εμφανίσουμε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με άξονα τον Οx, τον αριθμό παιδιών και άξονα τον y τις συχνότητες, έχουμε τον πίνακα που λέγεται ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

* Το ραβδόγραμμα αποτελείται από τα κάθετα τμήματα στον άξονα θx.

* Το μήκος του κάθε ενός από αυτά τα τμήματα δείχνει τη συχνότητα v_i της αντίστοιχης μεταβλητής X_i .Δηλ.στο 3 αντιστοιχεί το 4. Δηλ. 3 παιδιά

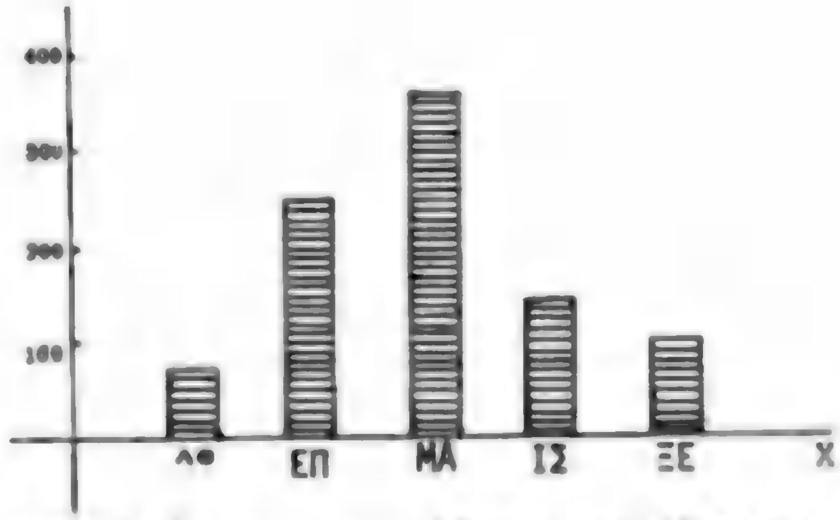
έχουν 4 οικογένειες κ.λ.π.

34. Πολύγωνο συχνοτήτων.
Αν τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε του παραπάνω διαγράμματος ενωθούν παίρνουμε μια τεθλασμένη γραμμή, που λέγεται **πολύγωνο συχνοτήτων.**
Αν οι παρατηρήσεις αναφέρονται σε ποιοτική μεταβλητή τότε ο πίνακας Ι,



Ι

Περιεχ. βιβλ.	Βιβλία
Λογοτεχνικά	80
Επιστημονικά	245
Μαθηματικά	350
Ιστορικά	125
Ξενόγλωσσα	100
	900

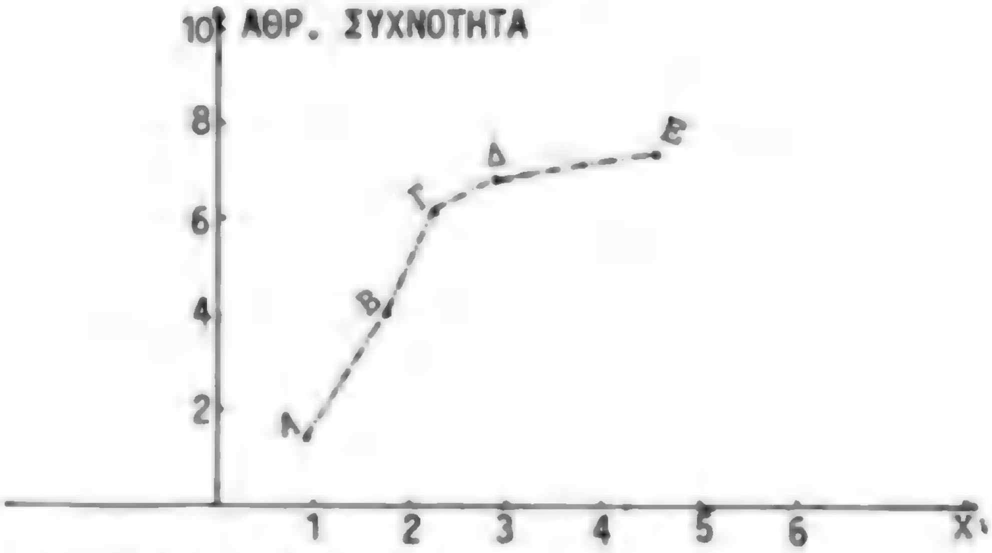


μπορεί να παρασταθεί με το διπλανό διάγραμμα, που λέγεται **ραβδόγραμμα**, και αποτελείται από ορθογώνια με ίσα πλάτη και ύψη ίσα με την συχνότητα.

35. Διάγραμμα αθροιστικών και σχετικών συχνοτήτων.
Αν θεωρήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

παιδία X_i	ν_i	Αθροιστική Συχνότητα	f_i %	Σχ. Αθροιστική συχνότητα
1	1	1	10	10
2	2	3	20	30
3	4	7	40	70
4	2	9	20	90
5	1	10	10	100
	10		100	

και αν τα δεδομένα αυτά εμφανιστούν σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με Οx τα x_i και άξονα τον y την αθροιστική συχνότητα, έχουμε το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.



36. Κυκλικό και ημικυκλικό διάγραμμα.

Τα διαγράμματα αυτά είναι κύκλοι που διαιρούνται σε τομείς, ώστε το εμβαδόν του καθ'ενός να εκφράζει την αναλογία της τιμής της αντίστοιχης κατηγορίας.

Π.χ. Από τον πίνακα της παραγράφου 24 έχουμε ότι: 10 μαθητές έχουν βαθμό "μέτρια", 15 "καλά", 20 "πολύ καλά" και 5 "άριστα", από δείγμα 50 μαθητών ή "μέτρια" το 20%, "καλά" το 30%, "πολύ καλά" το 40% και "άριστα" το 10%.

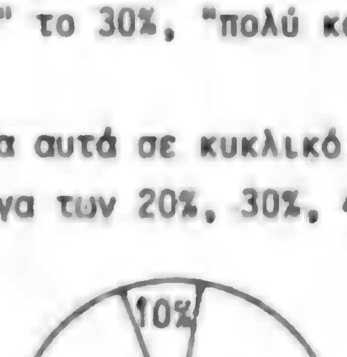
Για να παραστήσουμε τα στοιχεία αυτά σε κυκλικό διάγραμμα διαιρούμε τον κύκλο (τις 360°) σε μέρη ανάλογα των 20%, 30%, 40%, 10%.

το $20\% . 360 = 360 \frac{20}{100} = 72°$

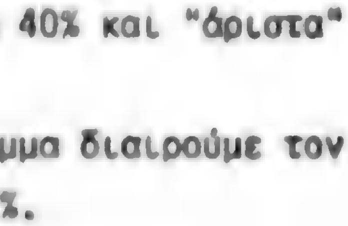
$30\% . 360 = 360 \frac{30}{100} = 108°$

$40\% . 360 = 360 \frac{40}{100} = 144°$

$10\% . 360 = 360 \frac{10}{100} = 36°$



Κυκλικό



ημ/κό

Για το ημικυκλικό διάγραμμα θα κάναμε την ίδια δουλειά, αλλά αντί για 360 θα παίρναμε 180.

Δηλ. το $10\% . 180 = 180 \frac{10}{100} = 18°$...

37. Ιστόγραμμα.

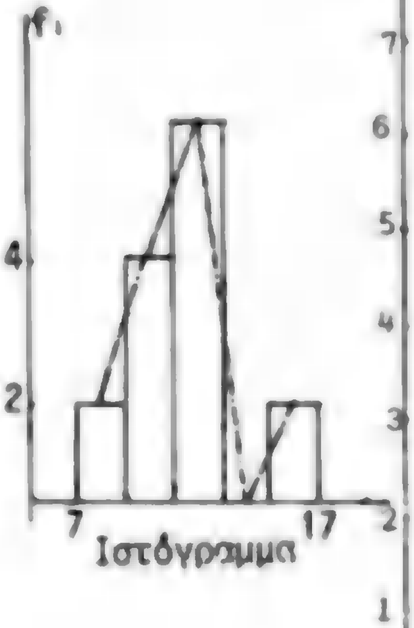
Η κατανομή συχνοτήτων των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων, παριστάνεται γραφικά από τα συνεχόμενα ορθογώνια του παρακάτω σχήματος και λέγεται **Ιστόγραμμα.**

38. Παράδειγμα 1.

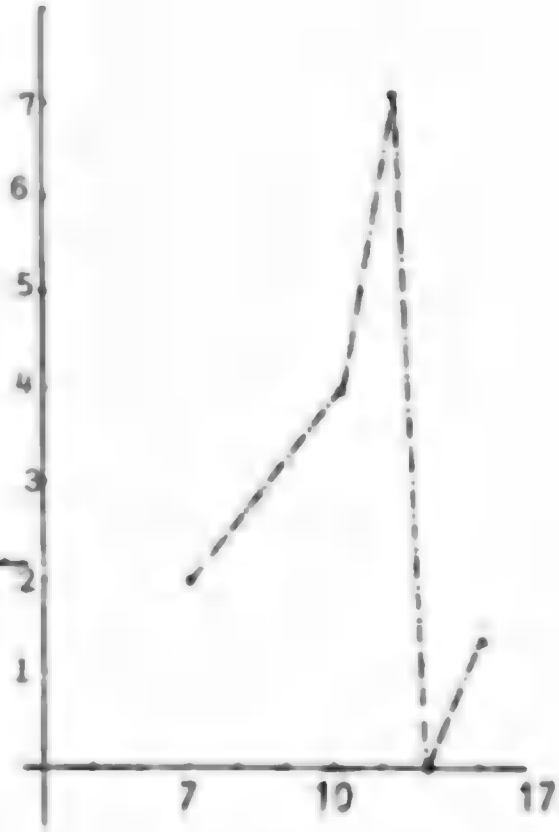
Θεωρούμε την κατανομή ενοικίων 15 διαμερισμάτων 4 δωματίων.

ΕΝΟΙΚΙΑ	ΑΡ. ΔΙΑΜΕΡΙΣ:
[7-9)	2
[9-11)	4
[11-13)	7
[13-15)	-
[15-17)	2

Η τεθλασμένη γραμμή που συνδέει τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων ορίζει και πάλι το πολύγωνο συχνοτήτων.



Ιστόγραμμα



2.4. Α Θ Ρ Ο Ι Σ Μ Α Τ Α

3.9. 1) Το άθροισμα των ν αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ το συμβολίσουμε με $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa$

δηλ.: $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa$.

2) Το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ το συμβολίζουμε με: $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\alpha_\kappa$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\alpha_\kappa.$$

3) Δεχόμαστε ότι: $\sum_{\kappa=1}^{1}\alpha_\kappa = \alpha_1$

4) Το $1^2+2^2+\ldots+\nu^2 = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2$

5) Το $1.2.3+2.3.4+\ldots+\nu(\nu+1)(\nu+2) = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)$

6) Το $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}+\ldots+\alpha_{\nu+\rho} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa+\sum_{\kappa=\nu+1}^{\nu+\rho}\alpha_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\nu+\rho}\alpha_\kappa$

7) Το $\alpha_{10}+\alpha_{11}+\ldots+\alpha_{2\nu} = \sum_{\kappa=10}^{2\nu}\alpha_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{2\nu}\alpha_\kappa-\sum_{\kappa=1}^{9}\alpha_\kappa$

40. Ι Δ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ Τ Ω Ν Σ:

α) $\sum_{i=1}^{\nu}(\alpha_i+\beta_i) = \sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i+\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i$.

Απόδειξη: $\sum_{i=1}(\alpha_i+\beta_i) = (\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\ldots+(\alpha_\nu+\beta_\nu) =$

$= (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu) = \sum_{i=1}\alpha_i+\sum_{i=1}\beta_i$.

β) $\sum_{i=1}(\lambda+\alpha_i) = \nu\lambda+\sum_{i=1}\alpha_i$.

Απόδειξη: $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda+a_i) = (\lambda+a_1)+(\lambda+a_2)+\ldots+(\lambda+a_\nu) = (\lambda+\lambda+\ldots+\lambda)+$
$+(a_1+a_2+\ldots+a_\nu) = \nu\lambda+\sum_{i=1}^{\nu}a_i.$

γ) $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda a_i) = \lambda\sum_{i=1}^{\nu}a_i.$

Απόδειξη: $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda a_i) = \lambda a_1+\lambda a_2+\ldots+\lambda a_\nu = \lambda(a_1+a_2+\ldots+a_\nu) = \lambda\sum_{i=1}^{\nu}a_i.$

δ) $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda_1 a_i+\lambda_2\beta_i+\ldots+\lambda_\tau\kappa_i) = \lambda_1\sum_{i=1}^{\nu}a_i+\lambda_2\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i+\ldots+\lambda_\tau\sum_{i=1}^{\nu}\kappa_i.$

Απόδειξη: $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda_1 a_i+\lambda_2\beta_i+\ldots+\lambda_\tau\kappa_i) = (\lambda_1 a_1+\lambda_2\beta_1+\ldots+\lambda_\tau\kappa_1)+$
$+(\lambda_1 a_2+\lambda_2\beta_2+\ldots+\lambda_\tau\kappa_2)+\ldots+(\lambda_1 a_\nu+\lambda_2\beta_\nu+\ldots+\lambda_\tau\kappa_\nu) =$
$= \lambda_1(a_1+a_2+\ldots+a_\nu)+\lambda_2(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)+\ldots+\lambda_\nu(\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_\nu) =$
$= \lambda_1\sum_{i=1}^{\nu}a_i+\lambda_2\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i+\ldots+\lambda\sum_{i=1}^{\nu}\kappa_i.$

ε) $\sum_{i=1}^{\nu-1}(a_{i+1}-a_i) = a_\nu-a_1.$

Απόδειξη: $\sum_{i=1}^{\nu-1}(a_{i+1}-a_i) = (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\ldots+(a_\nu-a_{\nu-1}) = a_\nu-a_1.$

41. Παρατήρηση:

. Αντί του δείκτη i ,μπορούμε να χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε δείκτη δηλ.
$a_1+a_2+\ldots+a_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}a_\kappa = \sum_{\lambda=1}^{\nu}a_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\nu}a_\nu = \sum_{i=1}^{\nu}a_i = \ldots$

. Μπορούμε, χωρίς να αλλάξει το άθροισμα, να μεταβάλουμε τον δείκτη που εμφανίζεται μέσα στο Σ , αρκεί να μεταβάλουμε ανάλογα τα όρια του Σ . Δηλ.

$$a_1+a_2+\ldots+a_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}a_\kappa = \sum_{\kappa=0}^{\nu-1}a_{\kappa+1} = \sum_{\kappa=-2}^{\nu-3}a_{\kappa+3} = \ldots$$

42. Πρόβλημα.

Να απλοποιηθεί το κλάσμα:

$$P = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3}{\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa\right)^2\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa^2+\kappa)}$$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι: $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 = 1^2+2^2+\ldots+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3 = 1^3+2^3+\ldots+\nu^3 = \left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$, $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa = 1+2+\ldots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ και

$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa^2+\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2+\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+\frac{\nu(\nu+1)}{2} = \left(\frac{2\nu+1}{3}+1\right)\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right) =$
$= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$

$$\text{Έχουμε: } P = \frac{\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}\cdot\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2}{\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2\cdot\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}} = \frac{2\nu+1}{2(\nu+2)}$$

43. Πρόβλημα.

Δείξετε ότι: $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{\kappa^2+\kappa-1}{(\kappa+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{\nu+1}{(\nu-2)!}$ (1)

Λύση: Το πρώτο μέλος της (1) γράφεται:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{\kappa^2+4\kappa+4-3\kappa-5}{(\kappa+2)!} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left[\frac{(\kappa+2)^2}{(\kappa+2)!} - \frac{3\kappa}{(\kappa+2)!} - \frac{5}{(\kappa+2)!}\right] =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{\kappa+2}{(\kappa+1)!} - 3\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{\kappa}{(\kappa+2)!} - 5\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\kappa+2)!} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{\kappa+1+1}{(\kappa+1)!} - 3\sum^{\nu}\frac{\kappa+2-2}{(\kappa+2)!} -$$

$$-5\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\kappa+2)!} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa!} + \frac{1}{(\kappa+1)!}\right) - 3\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\kappa+1)!} + 6\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\kappa+2)!} - 5\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\kappa+2)!} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa!} - 2\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\kappa+1)!} + \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\kappa+2)!} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa!} - 2\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa!} + \frac{1}{(\nu+1)!} - 1\right) +$$

$$+\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa!} + \frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\nu+1}{(\nu+2)!}$$

44. Πρόβλημα.

Αν $\sum_{i=1}^{6}x_i = 6$ και $\sum_{i=1}^{6}x_i^2 = 36$, να βρεθούν τα αθροίσματα:

α) $\sum_{i=1}^{6}(x_i+1)^2$, β) $\sum_{i=1}^{6}(x_i-1)(x_i+1)$.

Λύση: Έχουμε: $\sum_{i=1}^{6}(x_i+1)^2 = \sum_{i=1}^{6}(x_i^2+2x_i+1) = \sum_{i=1}^{6}x_i^2+2\sum_{i=1}^{6}x_i + \sum_{i=1}^{6}1 =$

$= 36+2.6+6 = 32+12+6 = 54$.

β) $\sum_{i=1}^{6}(x_i^2-1) = \sum_{i=1}^{6}x_i^2 - \sum_{i=1}^{6} = 36-6 = 30$.

2.5. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΘΕΣΗΣ

45. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ. Αν θεωρήσουμε ένα δείγμα $(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\nu)$ μεγέθους ν τότε ονομάζουμε μέση τιμή της μεταβλητής X του δείγματος με $x(\omega_i) = t_i$ και την συμβολίζουμε με $(\bar{x})$ τον αριθμό.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu}} \quad \text{ή σύντομα τον:} \quad \boxed{\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i}$$

Αν το σύνολο των τιμών της X είναι: $(x_1,x_2,\ldots,x_i)$ με αντίστοιχες συχ-

νότητες: $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i$ τότε: $\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_i x_i = t_1 + t_2 + \ldots + t_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\nu} t_i = \sum_{i=1}^{\nu} (\nu_i x_i) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \nu_i x_i}$$

Στην περίπτωση των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων θεωρούμε ότι κάθε παρατήρηση συμπίπτει με το κέντρο της κλάσης που ανήκει.

46. Σημείωση: Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι ένας αριθμός μεταξύ της μεγίστης και της ελαχίστης τιμής. Δηλ.

$$X_{min} \leq \bar{X} \leq X_{max}$$

γιαυτό χαρακτηρίζεται σαν παράμετρος θέσης.

- Η μέση τιμή είναι ένα σημείο, γύρω από το οποίο βρίσκονται οι τιμές της μεταβλητής, με τη μέση τιμή μπορούμε να συγκρίνουμε πρόχειρα δύο ομοειδείς πληθυσμούς.

- Η μέση τιμή όταν δεν έχουμε συχνότητες, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{\nu}$$

- Η μέση τιμή όταν έχουμε συχνότητες δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \nu_i x_i}{\nu}$$

47. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

α) Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι συμμετρική συνάρτηση των $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$.

β) Αν $t_1 = t_2 = \ldots = t_\nu = t \Rightarrow$ και $\bar{x} = t$.

γ) Αν μέση τιμή της $Y = X+\alpha$ και $\bar{y} = \bar{x}+\alpha$

Πράγματι: $\bar{y} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (t_i+\alpha) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} t_i + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \alpha = \bar{x} + \frac{1}{\nu}\nu\alpha = \bar{x}+\alpha$

δ) Αν $Y = X-\alpha \Rightarrow \bar{y} = \bar{x}-\alpha$

ε) Αν $Y = \lambda X \Rightarrow \bar{y} = \lambda\bar{x}$

Πράγματι: $\bar{y} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda t_i) = \frac{\lambda}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} t_i = \lambda\bar{x}$

στ) Αν $Y = \alpha X+\beta \Rightarrow \bar{y} = \alpha\bar{x}+\beta$

48. Παράδειγμα 1.

Θεωρούμε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται τα τέρματα που σημειώθηκαν μια Κυριακή από τις 18 ομάδες της Α' Εθνικής.

τέρματα x_i	ν_i
0	3
2	4
3	7
4	3
5	1
	18

Έχουμε ότι:

$$\bar{x} = \frac{3.0+4.2+7.3+3.4+1.5}{18} =$$

$$= \frac{0+8+21+12+5}{18} = \frac{46}{18} = 2,5 \text{ τέρματα.}$$

49. Παράδειγμα 2.

Να βρεθεί η μέση τιμή της κατανομής των ημερομισθίων 100 εργατών που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ημερομίσθια	ν_i	x_i	$\nu_i x_i$
60-80	10	70	700
80-100	15	90	1350
100-120	20	110	2200
120-140	30	130	3900
140-160	15	150	2250
160-180	10	170	1700
	100		12100

Έχουμε: $\bar{x} = \Sigma \frac{\nu_i x_i}{\nu} = \frac{12100}{100} = 121$ δρχ.

50. Πρόβλημα.

Οι παρακάτω αριθμοί δείχνουν τα ύψη των μαθητών μιας τάξης.

148	178	150	154	164
154	170	160	163	168
165	160	163	173	158
170	165	158	180	160
180	155	170	178	170

Να ομαδοποιήσετε τα παραπάνω σε τάξεις με ίσα πλάτη και να βρείτε τον μέσο αριθμητικό.

Λύση: α) Βάζουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις σε φυσική σειρά.

148	160	170
150	163	173
154	164	178
155	165	180
158	168	

β) Βρίσκουμε το πλάτος της κατανομής Π = 180-148 = 32.

γ) Αν χρησιμοποιήσουμε 8 διαστήματα θα έχουμε: $\frac{32}{8} = 4$

δ) Φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα:

τάξεις	ν_i	x_i	$\nu_i x_i$
[148-152)	2	150	300
[152-156)	3	154	462
[156-160)	2	158	316
[160-164)	5	162	810
[164-168)	3	166	498
[168-172)	5	170	850
[172-176)	1	174	174
[176-180)	4	178	712
	25		4122

Συνεπώς ο μέσος αριθμητικός είναι:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \nu_i x_i}{\nu} = \frac{4122}{25} = 164,88$$

51. Πρόβλημα.

Δείξτε ότι: $\sum_{i=1}^{\nu} f_i x_i = \bar{x}$

Απόδειξη: $\sum_{i=1}^{\nu} f_i x_i = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\nu_i}{\nu} x_i = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \nu_i x_i = \bar{x}$

52. **Σημείωση:** Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται όταν οι αριθμοί είναι μικροί Αν όμως είναι μεγάλοι τότε, αντιμετωπίζουμε το θέμα ευκολώτερα με βάση την παρακάτω πρόταση.

2.6. ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

53. Πρόταση: Αν $\bar{x}$ η μέση τιμή μιας μεταβλητής X τότε η μέση τιμή $\bar{y}$ της Y = αX+β θα είναι: $\bar{y} = \alpha\bar{x}+\beta$

Απόδειξη: Αν $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις για την X και $t'_1, t'_2, \ldots, t'_\nu$ οι παρατηρήσεις για την $Y \rightarrow t'_i = a t_i + \beta \rightarrow$

$$\bar{y} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t'_i = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(a t_i + \beta) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} a t_i + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\beta = \frac{a}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i + \frac{1}{\nu}\nu\beta$$

54. Πρόβλημα.

Οι μηνιαίες αποδοχές ομάδας υπαλλήλων ενός εργοστασίου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

κλάση	ν_i	x_i
[10.000-12.000)	10	11.000
[12.000-14.000)	4	13.000
[14.000-16.000)	8	15.000
[16.000-18.000)	(12)	17.000
[18.000-20.000)	2	19.000
[20.000-22.000)	10	21.000

Να βρεθεί η μέση τιμή με αλλαγή της μεταβλητής.

Λύση: α) Αφαιρούμε από όλες τις τιμές x_i εκείνη που έχει την μεγαλύτερη συχνότητα δηλ. το 17.000.

β) Αν οι διαφορές που προκύπτουν είναι επίσης μεγάλοι αριθμοί, τότε τις διαιρούμε με **κατάλληλο αριθμό** συνήθως 10, 100 ή με το **πλάτος** των κλάσεων οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα:

κλάσεις	ν_i	x_i	$y_i = \frac{x_i - 17.000}{2.000}$	$\nu_i y_i$
[10.000-12.000)	10	11.000	-3	-30
[12.000-14.000)	4	13.000	-2	-8
[14.000-16.000)	8	15.000	-1	-8
[16.000-18.000)	(12)	(17.000)	0	0
[18.000-20.000)	2	19.000	1	2
[20.000-22.000)	10	21.000	2	20
	46			-24

Συνεπώς έχουμε: $\bar{y} = \frac{\Sigma\, \nu_i y_i}{\nu} = \frac{-24}{46} = -0,5$

Ενώ για την μέση τιμή της X θα έχουμε: $\bar{y} = \frac{\bar{x} - 17.000}{2.000} \rightarrow$

$\rightarrow \bar{x} = 17.000 + 2.000(0,5) = 17.000 - 1000 = 16.000$

55. Πρόβλημα.

Δύο μεταβλητές X και Y του ίδιου δείγματος συνδέονται με τη σχέση: $\kappa X+\lambda Y = \mu$. Αν $\bar{x} = \delta$, να βρείτε την $\bar{y}$.

Λύση: Από $\kappa X+\lambda Y = \mu \rightarrow \kappa\bar{x}+\lambda\bar{y} = \mu \rightarrow \kappa\delta+\lambda\bar{y} = \mu \rightarrow \bar{y} = \frac{\mu-\kappa\delta}{\lambda}$

56. Πρόβλημα.

Δύο μεταβλητές X,Y δείγματος συνδέονται με τη σχέση: $3\lambda X+2(\lambda+1)Y = 5$. Αν $\bar{x} = 1$ και $\bar{y} = 5$, βρείτε την σχέση που συνδέει τις μεταβλητές.

Λύση: Έχουμε $3\lambda\bar{x}+2(\lambda+1)\bar{y} = 5 \leftrightarrow 3\lambda+2(\lambda+1)5 = 5 \leftrightarrow 3\lambda+10\lambda+10 = 5$

$\leftrightarrow 13\lambda = -5 \rightarrow \lambda = -\frac{5}{13} \rightarrow 3(-\frac{5}{13})X+2(-\frac{5}{13}+1)Y = 5.$

57. Πρόβλημα.

Η μέση βαθμολογία τριών τμημάτων με 22,15 και 18 μαθητές αντίστοιχα είναι $\bar{\alpha} = 15$, $\bar{\beta} = 16$, $\bar{\gamma} = 14$. Βρείτε τη μέση βαθμολογία όλων των μαθητών.

Λύση: Έχουμε: ότι η μέση βαθμολογία όλων θα είναι

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{22})+(\beta_1+\beta_2+...+\beta_{15})+(\gamma_1+\gamma_2+...+\gamma_{18})}{55} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{22}\alpha_i+\sum_{i=1}^{15}\beta_i+\sum_{i=1}^{18}\gamma_i}{55} = \frac{22\bar{\alpha}+15\bar{\beta}+18\bar{\gamma}}{55} = \frac{22.15+15.16+18.14}{55} = ...$$

58. Πρόβλημα.

Το μέσο ημερομίσθιο 40 ανδρών υπαλλήλων από τους 100 μιας τράπεζας, είναι 1600 δρχ. και το μέσο όλων 1500, βρείτε το μέσο ημερομίσθιο των γυναικών.

Λύση: Έχουμε $\bar{x}$ όλων $= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}(\alpha_i+\gamma_i) = \frac{\sum_{i=1}^{40}\alpha_i+\sum_{i=1}^{60}\gamma_i}{\nu} = \frac{40.\bar{\alpha}+60.\bar{\gamma}}{100} \rightarrow$

$\rightarrow 1500 = \frac{40.1600+60.\bar{\gamma}}{100} \rightarrow \bar{\gamma} = ...$

2.7. Ο Δ Ι Α Μ Ε Σ Ο Σ (Μ)

59. Ονομάζουμε διάμεσο (Μ) των παρατηρήσεων $t_1,t_2,...,t_\nu$, που έχουν τοποθετηθεί κατά σειρά μεγέθους, την παρατήρηση

$\boxed{t_\rho}$ αν $\nu = 2\rho-1$ και τον $\boxed{\frac{t_\rho+t_{\rho+1}}{2}}$ αν $\nu = 2\rho$

$$\text{δηλ. } M = \begin{cases} t_\rho & \text{αν } \nu = 2\rho-1 \\ \frac{t_\rho+t_{\rho+1}}{2} & \text{αν } \nu = 2\rho \end{cases}$$

το διάστημα $[t_\rho, t_{\rho+1}]$ λέγεται **διάμεσο διάστημα.**

. Ο διάμεσος σαν χαρακτηριστικό θέσης έχει το πλεονέκτημα ότι δεν επηρεάζεται από μια λανθασμένη (πολύ μεγάλη ή μικρή) παρατήρηση, που όμως επηρεάζει την μέση τιμή.

60. ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ Ο ΔΙΑΜΕΣΟΣ

Για να βρούμε το διάμεσο, όταν δεν έχουμε κατανομή συχνοτήτων, τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε φυσική σειρά και θεωρούμε τον **μεσαίο** όρο της σειράς.

. Αν το πλήθος των όρων είναι περιττό υπάρχει μεσαίος όρος.

. Αν είναι άρτιο, υπάρχουν δύο μεσαίοι όροι, των οποίων θεωρούμε το ημιάθροισμα.

61. Παράδειγμα 1.

Η βαθμολογία 5 μαθητών στα Μαθηματικά είναι: 10, 18, 15, 15, 18

Να βρεθεί ο διάμεσος.

Λύση: 1) Τοποθετούμε τους αριθμούς σε φυσική διάταξη:

$$10 \quad 15 \quad \boxed{15} \quad 18 \quad 18$$

2) Θεωρούμε τον μεσαίο όρο: Μ = 15

62. Παράδειγμα 2.

Αν οι μαθητές είναι 6 και η βαθμολογία τους

9, 13, 8, 17, 12, 13

τότε 1) Η φυσική σειρά είναι 8, 9, $\boxed{12, 13,}$ 13, 17

οπότε ο διάμεσος είναι:

$$M = \frac{12+13}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

63. β) Αν η κατανομή παρουσιάζει **συχνότητα**, όχι όμως κλάσεις τότε ο διάμεσος βρίσκεται ως εξής:

1. Σχηματίζουμε την αθροιστική σειρά των συχνοτήτων

2. Βρίσκουμε τη τιμή $\frac{v}{2}$, όπου ν το σύνολο των παρατηρήσεων.

3. Βρίσκουμε τους όρους της αθροιστικής συχνότητας μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο $\frac{v}{2}$.

64. Παράδειγμα.

Σε σύνολο 100 κιβωτίων με ηλεκτρικές λάμπες, η κατανομή συχνοτήτων των ελλατωματικών είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας. Αν το κάθε κιβώτιο περιέχει 50 λάμπες, να βρεθεί:

α) ο μέσος αριθμητικός και β) ο διάμεσος.

Αριθμός ελαττωματικών x_i	Αριθμός κιβωτίων.
0	15
2	10
3	16
4	12
5	15
6	20
8	12
	100

Λύση: Θεωρούμε τον πίνακα:

Αριθμός ελατ. x_i	v_i	$v_i x_i$	Αθροιστική συχνότητα
0	15	0	15
2	10	20	25
3	16	48	41] $\frac{v}{2}$
4	12	48	53]
5	15	75	68
6	20	120	88
8	12	96	100
	100	407	

Ο μέσος αριθμητικός δίνεται από την σχέση: $\bar{x} = \frac{\Sigma v_i x_i}{v} = \frac{407}{100} = 4,07$

που σημαίνει ότι κατά μέσο όρο 4 λάμπες είναι ελαττωματικές σε κάθε κιβώτιο.

β) Βρίσκουμε το $\frac{v}{2} = \frac{100}{2} = 50$, που βρίσκεται μεταξύ 41 και 53 και επειδή

οι παρατηρήσεις είναι 100 → $\nu = 2\rho = 100 \rightarrow \rho = 50$, συνεπώς ο διάμεσος είναι το ημιάθροισμα της 50ης και της 51ης παρατήρησης. Και επειδή από την 41η μέχρι την 53η παρατήρηση έχουμε 4 ελλατωματικές

$\rightarrow M = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$ ή τοποθετούμε τους όρους σε φυσική σειρά οπότε:

$$\underbrace{0 \ldots 0}_{15} \; \underbrace{2 \ldots 2}_{10} \; \underbrace{3 \ldots 3}_{16} \; \underbrace{4 \ldots 4}_{12} \; \underbrace{5 \ldots 5}_{15} \; \underbrace{6 \ldots 6}_{20} \; \underbrace{8 \ldots 8}_{12}$$

↓

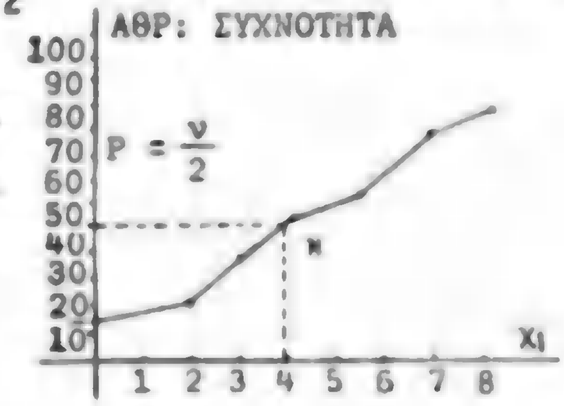
50ου, 51ου

↓

$$M = \frac{4+4}{2} = 4$$

65. γ) Υπολογισμός του διαμέσου με το αθροιστικό διάγραμμα.

Η παράλληλη από το σημείο $\frac{\nu}{2} = \rho = 50$ τέμνει το διάγραμμα στο Κ, η τετμημένη του Κ θα είναι ο διάμεσος, που όπως φαίνεται είναι περίπου 3,8, δηλ. η μέθοδος του διαγράμματος δίνει σφάλμα 0,2 λάμπες.



66. Πρόβλημα.

Κατά το έτος 1983 στην Αθήνα, οι μέρες με ήλιο ήταν:

Μήνας	Μέρες ήλιου	Μήνας	Μέρες ήλιου
ΓΕΝΑΡΗΣ	10	ΙΟΥΛΗΣ	30
ΦΛΕΒΑΡΗΣ	10	ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ	28
ΜΑΡΤΗΣ	12	ΣΕΠΤΕΜΒΡΗΣ	28
ΑΠΡΙΛΗΣ	14	ΟΚΤΩΒΡΗΣ	25
ΜΑΗΣ	25	ΝΟΕΜΒΡΗΣ	20
ΙΟΥΝΗΣ	27	ΔΕΚΕΜΒΡΗΣ	15

Να βρεθούν: α) η μέση τιμή και β) ο διάμεσος.

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Μέρες ήλιου x_i	v_i	$v_i x_i$	Αθροιστική συχνότητα
10	2	20	2
12	1	12	3
14	1	14	4
15	1	15	5
20	1	20	6 → $\frac{v}{2}$
25	2	50	8
27	1	27	9
28	2	56	11
30	1	30	12
	12	244	

Για την μεση τιμή έχουμε: $\bar{x} = \frac{\Sigma v_i x_i}{v} = \frac{244}{12} = 20,04 \rightarrow \bar{x} \simeq 20$ μέρες, δηλ. κατά μέσο όρο έχει ήλιο 20 μέρες τον μήνα.

β) Για τον διάμεσο βρίσκουμε το $\frac{v}{2} = \frac{12}{2} = 6 \rightarrow M = \frac{t_6 + t_7}{2}$ και επειδή

$t_6 = 20$ και $t_7 = 20 \rightarrow M = \frac{20+20}{2} = \frac{40}{2} = 20$ μέρες.

2.8. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

67. **Μέση απόλυτη απόκλιση.** Ονομάζουμε μέση απόλυτη απόκλιση των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_v$, τον αριθμό:

$$e = \frac{|t_1-\bar{x}| + |t_2-\bar{x}| + \ldots + |t_v-\bar{x}|}{v} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} |t_i-\bar{x}|$$

Κάθε μια από τις διαφορές $|t_i-\bar{x}|$ παριστάνει την απόλυτη απομάκρυνση μιας παρατήρησης από την μέση τιμή.

68. **Παράδειγμα 1.**

Να βρεθεί η μέση απόλυτη απόκλιση των παρατηρήσεων: t_i: 2, 7, 9, 13.

Λύση: Έχουμε: $\bar{x} = \frac{\Sigma t_i}{v} = \frac{2+7+9+13}{4} = \frac{31}{4} = 7,7 \rightarrow e = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} |t_i-\bar{x}|$

Αρκεί να βρούμε τα t_i, που φαίνονται από τον πίνακα.

t_i	$\lvert t_i-\bar{x}\rvert$
2	5,7
7	0,7
9	1,3
12	4,2
30	11,9

$\rightarrow e = \frac{1}{4}(11,9) = \frac{11,9}{4} \simeq 3$

69. **Παράδειγμα 2.**

Να βρεθεί η μέση απόλυτη απόκλιση των παρατηρήσεων t_i: 11, 14, 18, 21, 26.

Λύση: Έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{11+14+18+21+26}{5} = \frac{90}{5} = 18 \Rightarrow e = \frac{\Sigma|t_i-\bar{x}|}{\nu} =$$

$$= \frac{|11-18|+|14-18|+|18-18|+|21-18|+|26-18|}{5} = \frac{7+4+0+3+8}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$$

2.9. Δ Ι Α Κ Υ Μ Α Ν Σ Η

70. Ονομάζουμε διακύμανση (S^2) ή (S_x^2) ή ($\Delta(x)$) των παρατηρήσεων $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$ σε δείγμα μεγέθους ν, μιας **ποσοτικής** μεταβλητής X, τον μη αρνητικό αριθμό.

$$S^2 = \frac{(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+\ldots+(t_\nu-\bar{x})^2}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2$$

71. Αν οι τιμές $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$ έχουν συχνότητες $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k$ $\Rightarrow$

$$S^2 = \frac{\nu_1(t_1-\bar{x})^2+\nu_2(t_2-\bar{x})^2+\ldots+\nu_\nu(t_\nu-\bar{x})^2}{\nu} = \sum_{i=1}^{\nu}\nu_i(t_i-\bar{x})^2$$

72. **Ιδιότητες διακύμανσης.**

α) Η διακύμανση είναι συμμετρική συνάρτηση των $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$

β) Αν $t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_\nu = t$ τότε $S_x^2 = 0$

γ) Αν αυξήσουμε ή ελλατώσουμε όλες τις τιμές t_i κατά τον ίδιο αριθμό α, η διακύμανση δεν μεταβάλλεται, δηλ.

αν $Y = X \pm a \Rightarrow \Delta(Y) = \Delta(X)$.

Απόδειξη: $\Delta(Y) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i'-\bar{y})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[(t_i \pm a-(\bar{x} \pm a)]^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 = \Delta(X)$

δ) Αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής X με λ τότε η διακύμανση πολ/ται με λ. Δηλ. αν $Y = \lambda X \Rightarrow \Delta(Y) = \lambda \cdot \Delta(X)$

Απόδειξη: $\Delta(\Psi) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i'-\bar{y})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda t_i-\lambda\bar{x})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\lambda^2(t_i-\bar{x})^2 =$

$= \lambda^2\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 = \lambda^2\Delta(X)$.

73. **Θεώρημα.** Η διακύμανση των παρατηρήσεων $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$ δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta(X) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\nu_i x_i^2-\bar{x}^2.$$

Απόδειξη: Έχουμε $\Delta(X) = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa}(t_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i(x_i-\bar{x})^2 =$

$= \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2) = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} 2x_i\bar{x}v_i + \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i\bar{x}^2 =$

$= \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i + \frac{\bar{x}^2}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{v} v\,\bar{x}+\bar{x}^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2-\bar{x}^2$

74. Σημείωση: Η διακύμανση έχει δύο μειονεκτήματα:

α) εκφράζεται σε διαφορετικές μονάδες από τις παρατηρήσεις και

β) είναι σχετικά μεγάλος συγκριτικά με τις παρατηρήσεις. Για τους λόγους αυτούς χρησιμοποιούμε ένα άλλο μέτρο διασποράς, ποιό **αξιόπιστο**, την τυπική απόκλιση, που διορθώνει τα παραπάνω μειονεκτήματα.

75. Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί η διακύμανση των παρατηρήσεων: t_i: 2, 5, 7, 9, 12.

Λύση: Έχουμε ότι: $S^2 = \frac{\Sigma(t_i-\bar{x})^2}{v}$. Συνεπώς αρκεί να υπολογιστεί το $\bar{x}$,

που είναι: $\bar{x} = \frac{2+5+7+9+12}{5} = \frac{35}{5} = 7 \rightarrow S^2 =$

$= \frac{(2-7)^2+(5-7)^2+(7-7)^2+(9-7)^2+(12-7)^2}{5} = \frac{5^2+2^2+0^2+2^2+5^2}{5} =$

$= \frac{25+4+0+2+25}{5} = \frac{56}{5} = 11{,}2$

76. Παράδειγμα 2.

Να βρεθεί η διακύμανση της κατανομής

x_i	7	9	12	14	18
v_i	2	3	4	3	5

Λύση: Όταν έχουμε συχνότητες κάνουμε χρήση του τύπου:

$S^2 = \frac{1}{v}\,\Sigma\, v_i x_i^2-\bar{x}^2$. Έχουμε: $\bar{x} = \frac{\Sigma v_i x_i}{v} =$

$= \frac{14+27+48+42+90}{17} = \frac{221}{17} = 13 \leftrightarrow \bar{x}^2 = 169 \rightarrow S^2 =$

$= \frac{1}{17}(2.49+3.81+4.144+3.196+5.18^2)-169 =$

$= \frac{1}{17}(98+243+576+588+1620)-169 = \frac{1}{17}(3.125)-169 = 189{,}7-169 = 20{,}7$

77. Πρόβλημα.

Αν οι τιμές μιας μεταβλητής X ελαττωθούν κατά 4 μονάδες, τι κάνει η διακύμανση;

Λύση: Η κάθε τιμή x_i της μεταβλητής X μετά την ελάττωση θα γίνει

$Z_i = X_i - 4 \rightarrow \bar{z} = \frac{\Sigma z_i}{\nu} = \frac{\Sigma(x_i-4)}{\nu} = \frac{\Sigma x_i}{\nu} - \frac{\nu.4}{\nu} = \bar{x}-4 \rightarrow$

$\rightarrow S^2(Z) = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(z_i-\bar{z})^2}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-4-\bar{x}+4)^2}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\nu} = S^2(X)$

Συνεπώς η διακύμανση της καινούργιας μεταβλητής δεν μεταβάλλεται.

2.10. ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ.

78. Ονομάζουμε τυπική απόκλιση τη τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης οπότε:

$$\text{Τυπική απόκλιση} = S = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\nu_i x_i^2-\bar{x}^2}$$

Για την τυπική απόκλιση ισχύουν:

α) Αν $\Psi = X \pm a \rightarrow S_y = S_x$

β) Αν $\Psi = \lambda X \rightarrow S_y = \lambda S_x$

79. **Πρόταση:** Αν S_x η τυπική απόκλιση για την μεταβλητή X και S_y η τυπική απόκλιση για την μεταβλητή $Y = aX+\beta$, $a,\beta \in \mathbb{R}$ τότε:

$$S_y = |a|.S_x$$

Απόδειξη: Έχουμε:

$S_y = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i^2-\bar{y})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(at_i+\beta-a\bar{x}-\beta)^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(a(t_i-\bar{x}))^2 =$

$= \frac{1}{\nu}a^2\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 = a^2.S_x^2 \rightarrow S_y^2 = a^2.S_x^2 \rightarrow S_y = |a|.S_x$

80. **Παράδειγμα 1.**

Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της κατανομής:

κλάσεις	ν_i
[150-159)	2
[160-169)	7
[170-179)	5
[180-189)	6
	20

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Κλάσεις	x_i	ν_i	$10x_i$	$y_i = 10x_i - 1645$	$\nu_i y_i$	$\nu_i y_i^2$
[150-159]	154,5	2	1545	-100	-200	20.000
[160-169]	164,5	7	1645	0	0	0
[170-179]	174,5	5	1745	100	500	50.000
[180-189]	184,5	6	1845	100	600	60.000
		20			900	130.000

Συνεπώς έχουμε για την μεταβλητή:

$Y = 10X-1645 \rightarrow S_y^2 = \frac{1}{\nu} \Sigma \nu_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{20}(130.000)-(\frac{900}{20})^2 =$

$= 6.500-45^2 = 6.500-2025 = 4.475 \rightarrow S_y = \sqrt{4.475} \simeq 67.$

Όμως $S_y = |\alpha| S_x \rightarrow 67 = 10.S_x \rightarrow S_x = 6{,}7.$

81. Πρόβλημα.

Αν η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X είναι μηδέν, τότε οι τιμές της μεταβλητής είναι ίσες.

Λύση: Έχουμε $S^2 = 0 \rightarrow \Sigma(t_i-\bar{x})^2 = 0 \leftrightarrow t_i = \bar{x} \ \forall \ i = 1,2,\dots,\nu \rightarrow$
$\rightarrow t_1 = t_2 = t_\nu = \bar{x}.$

82. Πρόβλημα.

Αν $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X να δειχτεί ότι το min της παράστασης:

$\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\mu)^2$ είναι ίσο με $\nu \cdot S^2$, όπου S^2 η διακύμανση της x, και μ μεταβλητό.

Απόδειξη: Έχουμε: $\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{\nu}[(t_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu)]^2 =$

$= \sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{\nu}(\bar{x}-\mu)^2 + 2\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu) = \nu S^3 + \nu(\bar{x}-\mu)^3 + 2(\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x}) =$

$= \nu S^2 + \nu(\bar{x}-\mu)^2 + 2(\bar{x}-\mu)(\sum_{i=1}^{\nu} t_i - \sum_{i=1}^{\nu}\bar{x}) = \nu S^2 + \nu(\bar{x}-\mu)^2 + 2(\bar{x}-\mu)^2 \nu\bar{x} - \nu\bar{x} =$

$= \nu S^2 + \nu(\bar{x}-\mu)^2 = \min \leftrightarrow (\bar{x}-\mu)^2 = 0 \leftrightarrow \bar{x}-\mu = 0 \rightarrow \mu = \bar{x} \rightarrow$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 = \nu.S^2.$

83. Πρόβλημα.

Να δειχτεί ότι δεν είναι δυνατόν η διακύμανση των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_\nu$, να συμπίπτει αριθμητικά με την μέση τιμή $\bar{x}$.

Απόδειξη: Έστω $S^2 = \bar{x} \leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 = \bar{x} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i^2+\bar{x}^2-2t_i\bar{x}) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 + \sum_{i=1}^{\nu}\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{\nu} t_i =$

$= \sum_{i=1}^{\nu} t_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 + \nu\bar{x}^2 - (2\bar{x}+1)\sum_{i=1}^{\nu} t_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 + \nu\bar{x}^2 - (2\bar{x}+1)\nu\bar{x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 + \nu\bar{x}^2 - 2\nu\bar{x}^2 - \nu\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \nu\bar{x}^2 + \nu\bar{x} - \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 0$ (1)

Η (1) οφείλει να έχει διπλή πραγματική λύση, γιατί $\bar{x}$ = μοναδικός

$\Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \nu^2 + 4\nu \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 0$, άτοπο $\Rightarrow \ldots$

84. Πρόβλημα.

Στην κατανομή: να βρεθεί ο διάμεσος αν $\bar{x} = 2{,}8$ δωμάτια.

Αριθ. δωματίων x_i	Ποσοστό f_i%	
1	15%	
2	-	α
3	20%	
4	-	β
5	10%	
ΣΥΝ.	100%	

Λύση: Αν α και β τα ποσοστά που λείπουν έχουμε:

$\alpha+\beta+10+20+15 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha+\beta = 55$ (1) και $\bar{x} = \Sigma\frac{\nu_i x_i}{\nu} = \Sigma\frac{\nu f_i}{100}\cdot\frac{x_i}{\nu} = \frac{1}{100}\Sigma x_i f_i =$

$= \frac{1.15+2.\alpha+3.20+4.\beta+5.10}{100} \Rightarrow 280 = 125+2\alpha+4\beta \Rightarrow 2\alpha+4\beta = 155$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow 2(55-\beta)+4\beta = 155 \Rightarrow 110+2\beta = 155 \Rightarrow 2\beta = 45 \Rightarrow \beta = 22{,}5\%$ και $\alpha = 32{,}5\%$.

Συνεπώς για τον διάμεσο κατασκευάζουμε τον πίνακα των αθροιστικών συχνοτήτων κ.λ.π. .... .

85. Πρόβλημα.

Στη διπλανή κατανομή έχουμε $\bar{x} = 2{,}2$. Βρείτε την τυπική απόκλιση και την διακύμανση

ΛΑΘΗ x_i	ΜΑΘΗΤΕΣ ν_i	$\nu_i x_i$
1	-	-
2	6	12
3	-	-
4	2	8
	20	

Λύση: Αν α και β οι συχνότητες που λείπουν έχουμε: $\alpha+6+\beta+2 = 20 \Rightarrow \alpha+\beta = 12$ (1)

Ακόμη $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\Sigma \nu_i x_i \Leftrightarrow 2{,}2 = \frac{\alpha+12+3\beta+8}{20} \Leftrightarrow 44 = 20+\alpha+3\beta \Leftrightarrow \alpha+3\beta = 24$ (2)

Από (1),(2) $\Rightarrow 2\beta = 12 \Rightarrow \beta = 6 \Rightarrow \alpha = 6$. Οπότε $S^2 = \frac{1}{\nu}\Sigma \nu_i x_i^2 - \bar{x}^2 \Rightarrow \ldots$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Από τις παρακάτω μεταβλητές να βρείτε ποιές είναι 1) ποιοτικές, 2) ποσοτικές, 3) διακριτές και 4) συνεχείς. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο των τιμών αυτών των μεταβλητών.
   α) Το φύλο ατόμων.
   β) Η βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης.
   γ) Η υγεία των μαθητών μιας τάξης.
   δ) Ο αριθμός μελών μιας οικογένειας.
   ε) Το ύψος μιας τάξης μαθητών.
   "Θυμηθείτε ότι οι ποιοτικές μεταβλητές δεν εκφράζονται με αριθμούς, οι ποσοτικές εκφράζονται με αριθμούς. Οι συνεχείς, μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές ενός διαστήματος και οι ασυνεχείς ορισμένες τιμές".

2. Ένα σύνολο 15 μαθητών Γ' Λυκείου ρωτήθηκε ως προς τη βαθμολογία τους στη Β' Λυκείου και είχαμε τις παρακάτω απαντήσεις:
   14, 15, 12, 14, 15, 18, 17, 12, 12, 17, 16, 10, 10, 10, 11
   α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.
   β) Να κατασκευάσετε πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων
   γ) Πόσοι μαθητές έχουν βαθμολογία μικρότερη του 13;

3. Ένα ζάρι ρίχτηκε 20 φορές και πήραμε τις παρακάτω ενδείξεις
   6, 1, 2, 4, 4, 5, 3, 2, 1, 5,
   1, 3, 5, 6, 6, 6, 1, 2, 3, 4.
   α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων
   β) Πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων
   γ) Ποιά είναι η συχνότητα εμφάνισης του αριθμού 6;

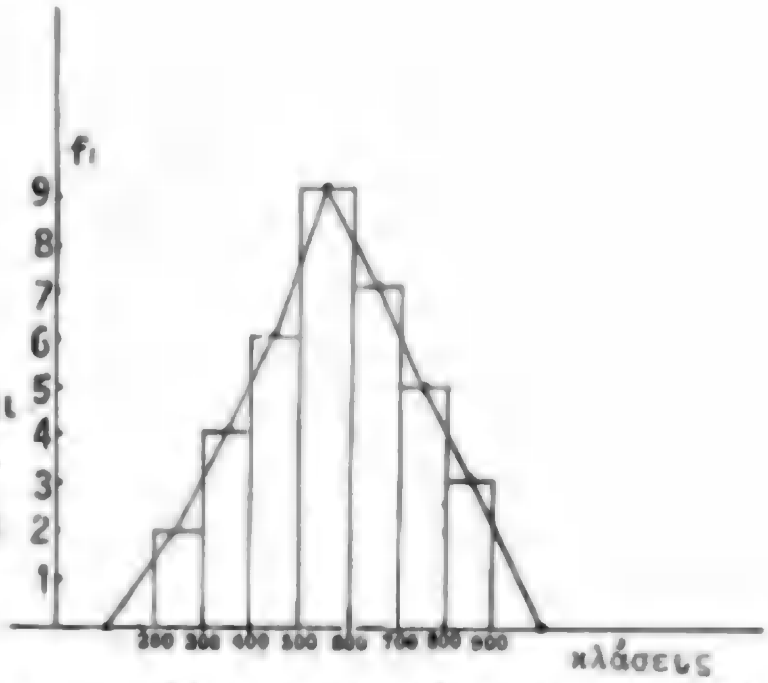
4. Τα κόμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε πήραν τους παρακάτω ψήφους, σε μια εκλογική αναμέτρηση. Να βρεθούν: α) οι συχνότητες που λείπουν. β) Οι σχετικές συχνότητες

Κόμμα	Ψήφοι	f_i %
Α	235	-
Β	-	-
Γ	1500	25
Δ	-	-
Ε	800	-
σύνολο	6550	

5. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	v_i	f
[10,13)	2	-
[13,16)	5	-
[16,19)	-	-
[19,22)	7	-
[22,25)	-	15
[25,28)	-	-
[28,30)	2	-
Σύνολο	50	

6. Δίνεται το παρακάτω πολύγωνο και ιστόγραμμα συχνοτήτων. Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων.



7. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων του αριθμού των 30 τμημάτων του φροντιστηρίου με αριθμό μαθητών κατά τμήμα.
15, 17, 18, 20, 22, 19, 16, 14, 15, 16, 16, 17, 15, 16, 17,
17, 18, 20, 21, 14, 10, 15, 19, 23, 17, 16, 15, 12, 13, 18.
8. Η θερμοκρασία της Αθήνας κατά τις 31 μέρες του Γενάρη ήταν σε βαθμούς (C°)
7, 12, 15, 16, 16, 15, 12, 13, 14, 15, 10, 9,
8, 6, 5, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 12, 10, 9, 7,
8, 9, 10, 10, 12, 12, 12.
Να γίνει ομαδοποίηση των παραπάνω παρατηρήσεων
"Θυμηθείτε ότι για την ομαδοποίηση εργαζόμαστε ως εξής:
α) Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε φυσική σειρά
β) Βρίσκουμε τη διαφορά μεταξύ μεγίστης και ελαχίστης, δηλ. βρίσκουμε το πλάτος (π) της μεταβολής.
γ) Κατασκευάζουμε ν κλάσεις πλάτους $\frac{\pi}{\nu}$ περίπου.
9. Σε δύο τμήματα μαθητών είχαμε την παρακάτω βαθμολογία.

	ΤΜΗΜΑ 1	ΤΜΗΜΑ 2
ΑΡΙΣΤΑ	5	3
ΠΟΛΥ ΚΑΛΑ	8	9
ΚΑΛΑ	12	16
Σύνολο	25	28

Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα των παραπάνω κατανομών.

10. Όμοια να κατασκευαστεί το ραβδόγραμμα των πεδινών εκτάσεων των 7 ηπείρων, όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα κατανομής:

ΕΥΡΩΠΗ	0,8 εκατ. τ. μίλια
ΑΣΙΑ	4,8 " " "
ΑΦΡΙΚΗ	5,0 " " "
Β. ΑΜΕΡΙΚΗ	4,2 " " "
Ν. ΑΜΕΡΙΚΗ	3,5 " " "
ΩΚΕΑΝΙΑ	1,5 " " "
Σ. ΕΝΩΣΗ	3,2 " " "

Στη συνέχεια εμφανίστε τα αποτελέσματα σε κυκλικό διάγραμμα.

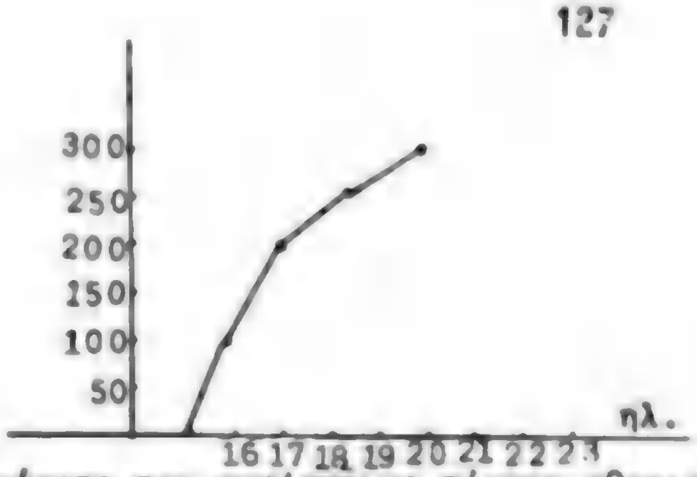
11. Με βάση τον πίνακα:

Τάξεις	ν_i
[100,120)	5
[120,140)	8
[140,160)	12
[160,180)	13
[180,200)	10
[200,220)	6
[220,240)	4
Σύνολο	

Να βρεθεί α) η αθροιστική συχνότητα και β) το αθροιστικό διάγραμμα των παραπάνω παρατηρήσεων.

12. Τον μήνα Δεκέμβριο παρατηρήθηκαν στην Αθήνα τα παρακάτω ατυχήματα:
2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2.
α) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων
β) Να γίνει ο πίνακας αθροιστικών συχνοτήτων
γ) Να γίνει το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.

13. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι ηλικίες 300 μαθητών



Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων.

14. Στον παρακάτω πίνακα να υπολογίσετε την μέση τιμή της μεταβλητής

κλάσεις	ν_i
[5,8)	2
[8,11)	4
[11,14)	6
[14,17)	5
	17

15. Η κατανομή επί τοις εκατό των ημερομισθίων 1000 υπαλλήλων είναι όπως φαίνεται στον πίνακα:

Ημερομίσθια	f_i
[200-400)	10
[400-600)	15
[600-800)	45
[800-1000)	30

16. Τα παρακάτω αθροίσματα να γραφούν με χρήση του συμβόλου Σ.

α) $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_\nu x^\nu$

β) $1^2+2^2+3^2+...+(5\nu-3)^2$

γ) $10^3+11^3+..+(\kappa+1)^3+(\kappa+2)^3+...+(\mu+\nu)^3$ $\kappa,\mu,\nu \in \mathbb{N}$, $\mu+\nu > \kappa$

δ) $3x+9x^2+27x^3+81x^4+243x^5$.

ε) $1^2.2+2^2.3+3^2.4+...+\nu^2.(\nu+1)$

στ) $(a+1)(a+2)+(a+2)(a+3)+...+(a+\nu)(a+\nu+1)$

17. Τα παρακάτω γινόμενα να γραφτούν με χρήση του συμβόλου Π

α) $(1^2.2)(2^2.3)(3^2.4)...[\nu^2(\nu+1)]$.

β) $\frac{a}{\beta}\cdot\frac{a^2}{\beta^2}\cdot\frac{a^3}{\beta^3}\cdot....\frac{a^\nu}{\beta^\nu}$

γ) $x(x+y)x^2(x^2+y^2)x^3(x^3+y^3)...x_\nu(x^\nu+y^\nu)$

18. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

α) $\dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}(2\nu^2+3\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}(3\nu^2-\nu)}$ β) $\dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}(2\nu^2-\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}(\nu^2+\nu)}$

19. Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

α) $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa^3+\kappa^2)$, β) $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}\dfrac{1}{\kappa(\kappa+1)}$, γ) $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa^2+5\kappa+2)$, δ) $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)$

20. Να δειχτεί ότι το άθροισμα των γινομένων των τιμών ενός δείγματος μεγέθους ν, επί τις σχετικές συχνότητες, είναι ίσο με την μέση τιμή τους.

21. Να δείξετε ότι: $\sum\limits_{i=1}^{\nu}\left[(x_i+1)^2-x_i^2\right] = \nu+2\sum\limits_{i=1}^{\nu}x_i$

22. Αν $\sum\limits_{i=1}^{6}x_i = 5$ του $\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2 = 20$

Να βρείτε α) το $\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-5)$, β) το $\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-1)^2$

23. Οι υπάλληλοι μιας επιχειρήσεως παρουσιάζουν ως προς την ηλικία τους την παρακάτω κατανομή:

Ηλικία	ν_i
[25-30)	12
[30-35)	15
[35-40)	18
[40-45)	10
[45-50)	11
[50-55)	5

Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση.

24. Αν S η τυπική απόκλιση των ν όρων μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α και λόγο ω τότε:

$$S = \omega\sqrt{\frac{\nu^2-1}{12}}$$

25. Αν $\bar{x}$ η μέση τιμή και S η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X να βρεθεί η τυπική απόκλιση της $\frac{4}{5}(x-\bar{x})$

26. Στην παρακάτω κατανομή να υπολογιστεί ο διάμεσος, αν η μέση τιμή είναι 3,2.

x_i	$f_i\%$
2	16%
3	-
4	-
5	15%
6	12%
Σύνολο	100%

27. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα λάθη 30 μαθητών μιας τάξης:

Λάθη x_i	Μαθητές ν_i	$\nu_i x_i$
2	-	-
3	4	12
4	5	20
6	-	-
	30	10+2β+α

Αν η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 0,3$ να υπολογιστεί η διακύμανση.

28. Να βρεθεί η διακύμανση με αλλαγή της μεταβλητής στην κατανομή:

Κλάσεις	x_i	ν_i
[100-150)	22	2
[150-200)	25	5
[200-250)	28	6
[250-300)	31	1
[300-350)	34	0
[350-400)	37	2
		16

29. Ο μέσος 20 αριθμών είναι 12 και ο μέσος 45 άλλων είναι 15. Να βρεθεί ο μέσος όλων των αριθμών.

30. Η μέση τιμή 200 παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 13$. Αν η μέση τιμή των 50 παρατηρήσεων είναι 12, ποιά είναι των υπολοίπων;

κεφαλαιο 3

συναρτησεις

Το σώμα R και η φυσική διάταξη σ' αυτό.

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με τις πράξεις (+) πρόσθεση και (·) πολλαπλασιασμός είναι **σώμα**.

Ορισμός. 1. Μια διμελής σχέση σ στο σύνολο Σ λέγεται **διάταξη**, τότε και μόνο τότε όταν είναι **ανακλαστική** - **αντισυμμετρική** και **Μεταβατική** και αντί $x\sigma y$ γράφουμε: $x \le y$ και το διαβάζουμε ο x προηγείται του y και την ταυτίζουμε με την $y \ge x$ που την διαβάζουμε ο y ακολουθεί τον x.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών η σχέση ≤ είναι μια διάταξη γιατί ισχύουν:

i) $x \le x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ (Ανακλαστική)

ii) $x \le y$ και $y \le x \rightarrow x = y \ \forall \ x,y \in \mathbb{R}$ (Συμμετρική)

iii) $x \le y$ και $y \le z \rightarrow x \le z \ \forall \ x,y,z \in \mathbb{R}$ (Μεταβατική)

Ορισμός. 2. Δύο στοιχεία x,y του Σ λέγονται **συγκρίσιμα** ως προς την διάταξη "≤" όταν γιαυτά ισχύει $x \le y$ είτε $y \ge x$.

Ορισμός. 3. Αν όλα τα στοιχεία ζεύγη $(x,y) \in \Sigma x \Sigma$ είναι συγκρίσιμα ως προς κάποια διάταξη τότε το Σ λέγεται **ολικά διατεταγμένο** ως προς αυτή τη διάταξη ενώ αν μερικά μόνο ζεύγη του ΣxΣ, έχουν στοιχεία συγκρίσιμα το Σ λέγεται **μερικά διατεταγμένο** ως προς την διάταξη αυτή.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ολικά διατεταγμένο ως προς την σχέση "≤" γιατί για δύο τυχαίους πραγματικούς α,β ισχύει η $\alpha \le \beta$ ή $\beta \ge \alpha$.

Ενώ αντίθετα το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών στο οποίο έχουμε ορίσει τη σχέση σ (ο φυσικός x διαιρεί τον φυσικό y), είναι σχέση μερικής διάταξης.

Πράγματι η σ είναι **ανακλαστική** γιατί είναι $x\sigma x$ (κάθε φυσικός διαιρεί τον εαυτό του). Είναι **αντισυμμετρική** γιατί αν $x\sigma y$ και $y\sigma x \rightarrow x = y$ δηλ. αφού x διαιρεί τον $y \rightarrow y = \kappa x$, $\kappa \in \mathbb{N}$ και αφού y διαιρεί τον $x \rightarrow x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{N}$ οπότε με πολλαπλασιασμό παίρνουμε $xy = \kappa\lambda xy \rightarrow \kappa\lambda = 1$ και επειδή $\kappa, \lambda \in \mathbb{N} \rightarrow \kappa = \lambda = 1$, άρα $x = y$.
Είναι η σ **μεταβατική** γιατί αν $x\sigma y$ και $y\sigma z \rightarrow x\sigma z \leftrightarrow y = \kappa x$, $\kappa \in \mathbb{N}$ και $z = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{N} \rightarrow yz = \kappa\lambda xy \rightarrow$ οπότε $z = \kappa\lambda x \rightarrow x$ διαιρεί τον z.
Άρα η παραπάνω σχέση σ είναι διάταξη στο $\mathbb{N}$.

Το $\mathbb{N}$ είναι όμως **μερικά διατεταγμένο** ως προς την σχέση σ γιατί για τα στοιχεία Π.χ 3 και 5 του $\mathbb{N}$ δεν ισχύει ο 3 διαιρεί τον 5.

Επειδή το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ολικά διατεταγμένο, ισχύουν οι ιδιότητες.
1) $x \leq y \rightarrow x+z \leq y+z \;\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.
2) $x \leq y$ και $\alpha > 0 \rightarrow \alpha x \leq \alpha y \;\forall x,y \in \mathbb{R}$.
3) $x \leq y$ και $\alpha \in \mathbb{R}_- \rightarrow \alpha x \geq \alpha y \;\forall x,y \in \mathbb{R}$.
4) $x+z \leq y+z \rightarrow x \leq y \;\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.
5) $xy > 0 \leftrightarrow \frac{x}{y} > 0 \;\forall x,y \in \mathbb{R}^*$
6) $x < y$ και $xy > 0 \rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \;\forall x,y \in \mathbb{R}^*$
7) $x < y \leftrightarrow x^\nu < y^\nu \;\forall x,y \in \mathbb{R}^*$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
8) $x < y \rightarrow x^{-\nu} > y^{-\nu} \;\forall x,y \in \mathbb{R}^*$, $\nu \in \mathbb{N}$
9) $x = y \rightarrow x^\nu = y^\nu \;\forall x,y \in \mathbb{R}^*$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

3.2. Διαστήματα

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α και β με $\alpha < \beta$. Ονομάζουμε:

Ανοιχτό διάστημα με άκρα τα α,β το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}: \alpha < x < \beta\}$ το συμβολίζουμε (α,β) ή $]\alpha,\beta[$ και το παριστάνουμε γραφικά α———β. Τα άκρα α και β δεν ανήκουν σ'αυτό.

Κλειστό διάστημα με άκρα τα α,β είναι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x \leq \beta\}$ το συμβολίζουμε $[\alpha,\beta]$ και το παριστάνουμε γραφικά α———β. Τα άκρα α και β ανήκουν σ'αυτό.

Ανοιχτό δεξιά κλειστό αριστερά διάστημα με άκρα τα α,β το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}: \alpha \leq x < \beta\}$. Το συμβολίζουμε $[\alpha,\beta)$ ή $[\alpha,\beta[$. Το άκρο α ανήκει στο διάστημα και το β δεν ανήκει και το παριστάνουμε γραφικά α———β.

Ανοιχτό αριστερά κλειστό δεξιά διάστημα με άκρα τα α,β το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}: \alpha < x \leq \beta\}$ το συμβολίζουμε $(\alpha,\beta]$ ή $]\alpha,\beta]$ το άκρο α δεν ανήκει στο διάστη-

μα το β ανήκει και το παριστάνουμε γραφικά α•———•β.

Απέραντο δεξιά ανοιχτό αριστερά διάστημα το σύνολο {x∈ℝ: α < x < +∞ ή x > α} το συμβολίζουμε (α,+∞) ή]α,+∞[και το παριστάνουμε γραφικά: α•———• +∞. Το άκρο α δεν ανήκει σ'αυτό.

Απέραντο αριστερά ανοιχτό δεξιά διάστημα το σύνολο {x∈ℝ: -∞ < x < β ή x < β} το συμβολίζουμε (-∞,β) ή]-∞,β[και το παριστάνουμε γραφικά: -∞•———•β το άκρο β δεν ανήκει σ'αυτό.

Απέραντο δεξιά κλειστό αριστερά διάστημα το σύνολο {x∈ℝ: α ≤ x < +∞ ή x > α} το συμβολίζουμε [α,+∞) ή [α,+∞[και το παριστάνουμε γραφικά: α•———•+∞ το άκρο α ανήκει σ'αυτό.

Απέραντο αριστερά κλειστό δεξιά διάστημα το σύνολο {x∈ℝ: -∞ < x ≤ β ή x ≤ β} το συμβολίζουμε (-∞,β] ή]-∞,β] και το παριστάνουμε γραφικά: -∞•———•β. Το άκρο β ανήκει στο διάστημα.

Απέραντο δεξιά και αριστερά διάστημα ή σύνολο των πραγματικών αριθμών το σύνολο ℝ = {x∈ℝ: -∞ < x < +∞} το συμβολίζουμε ℝ = (-∞,+∞) ή]-∞,+∞[και το παριστάνουμε γραφικά -∞•———•+∞. Ονομάζεται δε και άξονας των πραγματικων αριθμών, η ευθεία των πραγματικών αριθμών. 'Ολοι δε οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται σημεία αυτής της ευθείας.

Παρατήρηση 1.

Αν στο σύνολο ℝ των πραγματικών αριθμών επισυνάψουμε και τα σύμβολα +∞, -∞ παίρνουμε το σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ = ℝ ∪ {-∞,+∞} που ονομάζεται **συμπαγές σύνολο των πραγματικών αριθμών.**

3.3. Περιοχή ή γειτονιά πραγματικού αριθμού.

Ορισμός 1. Ονομάζουμε περιοχή πραγματικού αριθμού ξ∈ℝ με κέντρο το ξ και ακτίνα ε > 0 κάθε ανοιχτό διάστημα της μορφής (ξ-ε,ξ+ε) το παριστάνουμε γραφικά ξ-ε•———•ξ+ε και το συμβολίζουμε π(ξ,ε) = (ξ-ε,ξ+ε).

Γενικότερα ονομάζουμε περιοχή ενός πραγματικού αριθμού ξ κάθε ανοιχτό διάστημα (α,β) στο οποίο ανήκει το ξ.

Το $\frac{\alpha+\beta}{2}$ λέγεται κέντρο ή μέσο του διαστήματος.

Παρατήρηση 2.

Αν σε μια π(ξ,ε) = (ξ-ε,ξ+ε) το ξ = 0 τότε η περιοχή λέγεται περιοχή του μηδενός και συμβολίζεται π(0) = (-ε,+ε).

Πρόταση 3. Ο πραγματικός $x \in \mathbb{R}$ ανήκει στην $\pi(\xi,\varepsilon)$ τότε και μόνον τότε όταν $|x-\xi| < \varepsilon$.
Πράγματι αν $x \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \leftrightarrow \xi-\varepsilon < x < \xi+\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < x-\xi < \varepsilon \leftrightarrow |x-\xi| < \varepsilon$.

Πρόταση 4. Ισχύει $x \in \pi(0) \leftrightarrow |x| < \varepsilon$.
Πράγματι αν $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \leftrightarrow |x| < \varepsilon$.

Ορισμός 5. Ονομάζουμε μήκος του διαστήματος (α,β) τον μη αρνητικό αριθμό $|\beta-\alpha|$ το συμβολίζουμε $d = |\beta-\alpha|$.

Σημείωση 6. Το μήκος της περιοχής $\pi(\xi,\varepsilon)$ είναι 2ε γιατί $d = |(\xi+\varepsilon)-(\xi-\varepsilon)| = |\xi+\varepsilon-\xi+\varepsilon| = |2\varepsilon| = 2\varepsilon$ επειδή $\varepsilon > 0$.

Ορισμός 7. Ονομάζουμε μεγαλύτερο από δύο πραγματικούς αριθμούς α,β και το συμβολίζουμε $\max\{\alpha,\beta\}$ τον αριθμό $\frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$. Δηλ. είναι: $\max\{\alpha,\beta\} = \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$.

Ορισμός 8. Ονομάζουμε μικρότερο από δύο πραγματικούς αριθμούς α,β τον αριθμό $\frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$ και τον συμβολίζουμε $\min\{\alpha,\beta\} = \frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$.

3.4. Σημεία συσσωρεύσεως ενός συνόλου.

Ορισμός 1. Ένα σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, αν και μόνο αν, σε κάθε περιοχή του $\xi \in \mathbb{R}$ περιέχονται άπειρα σημεία του συνόλου Δ.

Ορισμός 2. Ένα σημείο $\xi \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του συνόλου Δ, όταν και μόνο όταν, υπάρχει $\pi(\xi,\varepsilon)$ στην οποία δεν ανήκει άλλο σημείο του Δ εκτός από το ξ.

Ορισμός 3. Ονομάζουμε σημεία επαφής ενός συνόλου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ τα σημεία συσσωρεύσεως και τα μεμονωμένα σημεία αυτού.

3.5. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.

Ορισμός. Απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού x λέγεται και συμβολίζεται $|x|$ ο ίδιος ο x αν $x \geq 0$ και ο αντίθετος $-x$ αν $x \leq 0$.

Συμβολικά: $|x| \overset{\text{ορ}}{=} \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι:

1. $|x| \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$,
2. $|x| \pm x \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.

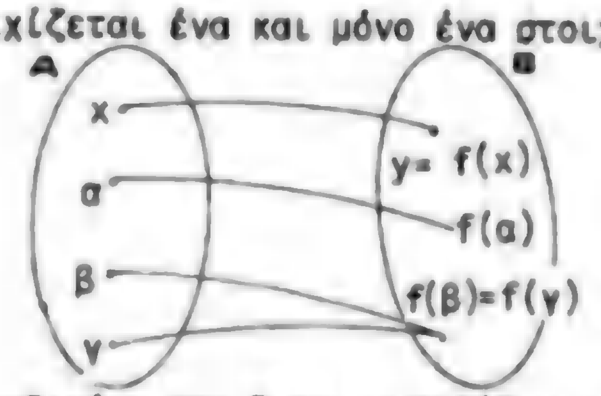
Βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής.

1. $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. $|x| = \max(x,-x)$
3. $|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$
4. $|x| \geq a \leftrightarrow x \geq a$ ή $x \leq -a$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$
6. $|x|-|y| \leq ||x|-|y|| \leq |x \pm y| \leq |x|+|y|$
7. $|xy| = |x||y|$
8. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.6. Βασικές έννοιες.

Ορισμός. Ονομάζεται **συνάρτηση f**, μια διμελής σχέση από ένα σύνολο A σε ένα άλλο σύνολο B τότε και μόνο τότε όταν, σε κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται ένα και μόνο ένα στοιχείο y του B.



(Σχήμα 1)

Το μοναδικό y του B το συμβολίζουμε με $y = f(x)$ και το ονομάζουμε **εικόνα** του x ή **τιμή** της f, στη θέση x. Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και συμβολίζεται $\mathcal{D}(f)$. Το δε σύνολο B ονομάζεται **Πεδίο τιμών** της f. Το σύνολο των ζευγών $(x,f(x))$ λέγεται **γράφημα** της f. Η ισότητα $y = f(x)$ ονομάζεται **τύπος** της f. Το σύνολο των τιμών της f ονομάζεται **σύνολο τιμών** και συμβολίζεται $f(A)$ ή $\mathcal{R}(f)$ είναι δε εν γένει υποσύνολο του $B(f(A) \subseteq B)$.

Αν σε μια συνάρτηση f το πεδίο τιμών B είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών η συνάρτηση ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση**.

Αν δε και το πεδίο ορισμού A είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ονομάζεται συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

Οι συναρτήσεις που θα μελετήσουμε θα έχουν $B \subseteq \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A \neq \emptyset$. Δηλαδή θάναι συναρτήσεις πραγματικές μιας πραγματικής μεταβλητής.

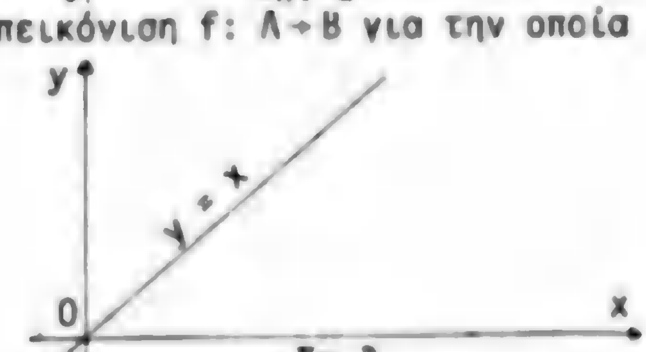
3.7. Ειδικές συναρτήσεις.

Σταθερή συνάρτηση λέγεται η απεικόνιση $f: A \to B$ που είναι τέτοια ώστε $\forall\, x \in A$ είναι $f(x) = c$.
Αν $A = \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία $y = c$ (σχήμα 2).



Σχ. 2

Ταυτοτική συνάρτηση f στο A λέγεται η απεικόνιση $f: A \to B$ για την οποία ισχύει $f(x) = x$, $\forall\, x \in A$.
Αν $A = \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία $y = x$ που διχοτομεί την πρώτη γωνία xOy των αξόνων (Σχήμα 3).



Σχ.3

Πολυωνυμική συνάρτηση f στο $(A = \mathbb{R})$ λέγεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to B$ με τύπο $f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ όπου $a_0, a_1, \ldots, a_\nu \in \mathbb{R}$, $a_\nu \neq 0$.
Το $f(x)$ λέγεται πολυώνυμο **βαθμού ν**.
Αν $\nu = 0$ τότε $f(x) = a_0 \neq 0$ και η πολυωνυμική συνάρτηση είναι **μηδενικού βαθμού**, δηλαδή σταθερή συνάρτηση.
Αν $\nu = 1$ τότε $f(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$ και η πολυωνυμική συνάρτηση είναι πρώτου βαθμού λέγεται δε τότε **γραμμική**.

Ρητή συνάρτηση f στο $A' = \{x \in A: g(x) \neq 0\}$ ονομάζεται η απεικόνιση $f: A' \to B$ με τύπο $f(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ όπου $\varphi(x), g(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε συνάρτηση a_ν, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ ή το $\mathbb{N}^*$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ή ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Η τιμή μιας ακολουθίας στο ν συμβολίζεται a_ν και λέγεται **γενικός όρος** ή **ν-οστός όρος** της. Μια ακολουθία συμβολίζεται (a_ν).
Επίσης μια ακολουθία είναι δυνατό να οριστεί και επαγωγικά αν δοθεί ο πρώτος όρος της $a_1 = a$ και μια ισότητα της μορφής $a_{\nu+1} = f(a_\nu)$ $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$.

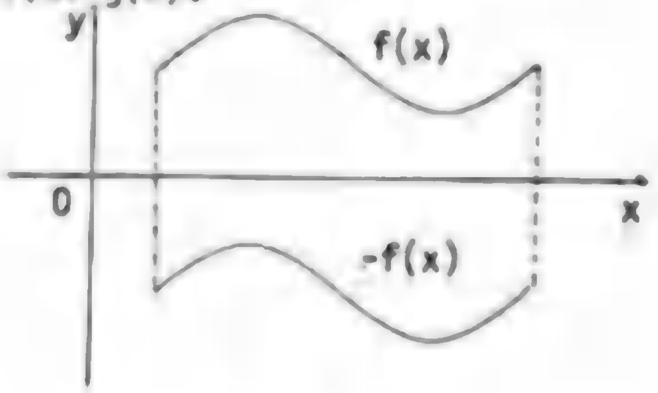
3.8. Πράξεις στις συναρτήσεις.

Έστω f_A το σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το A και $f, g \in f_A$, τότε ορίζεται:

. **Η ισότητα των f και g.** Δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες συμβολικά $f = g$ τότε και μόνο τότε όταν: $(\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$ και $f(x) = g(x) \forall\, x \in \mathcal{D}(f))$

• **Το άθροισμα f+g.** Ονομάζουμε άθροισμα των συναρτήσεων f και g συμβολικά f+g την συνάρτηση με τύπο $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.

• **Αντίθετη -f** της f την συνάρτηση με τύπο $(-f)(x) = -f(x)$.
Οι γραφικές παραστάσεις της f και -f είναι:



• **Διαφορά f-g** την συνάρτηση με τύπο $[f+(-g)](x) = f(x)-g(x)$.

• **Γινόμενο λ.f** του πραγματικού $\lambda \in \mathbb{R}$ επί την f την συνάρτηση με τύπο: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

• **Γινόμενο των f και g** την συνάρτηση με τύπο $(fg)(x) = f(x) g(x)$.

• **Το πηλίκο (λόγος) των f και g** την συνάρτηση με τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ που ορίζεται στο σύνολο $A' = \{x \in A: g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$.

• **Συμμετρική της f.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f^*(x)f(x) = 1$ τότε η συνάρτηση $f^*(x) = \frac{1}{f}(x)$ με $A^* = \mathcal{D}(f^*) = \{\mathcal{D}(f): f(x) \neq 0\}$ λέγεται συμμετρική της f.

• **Η συνάρτηση max ή min f,g** είναι οι συναρτήσεις με τύπους:

$$h(x) = \max\{f,g\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \quad \text{και}$$

$$\varphi(x) = \min\{f,g\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

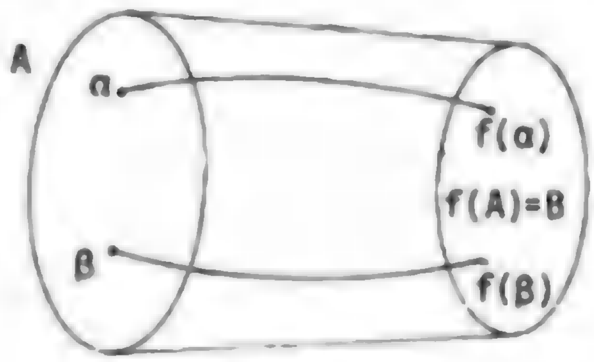
Ειδικότερα αν f,g είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μ και ν αντίστοιχα τότε το **άθροισμα τους.**
$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση **βαθμού maximum(μ,ν)**. (maximum = μέγιστος).

Το γινόμενό του $(fg)(x) = f(x) g(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση **βαθμού μ+ν.**

Ο λόγος $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ που λέγεται **ρητή συνάρτηση** και ορίζεται στο σύνολο $A' = \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\}$.

Περιορισμός μιας συνάρτησης f. Έστω μια συνάρτηση $f: A \to B$ τότε αν $A_1 \subset A$ ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $f_1: A_1 \to B$.
Αν για κάθε $x \in A_1$ ισχύει $f_1(x) = f(x)$ τότε η f_1 λέγεται **περιορισμός** της f στο A_1, και η f λέγεται **επέκταση** της f_1 στο A.

Η συνάρτηση επί.
Αν το σύνολο τιμών $f(A) = \mathcal{R}(f)$ της f ταυτίζεται με το πεδίο τιμών της B η συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται επί του B.
Δηλαδή αν $f(A) = B$.



Η συνάρτηση (1-1). Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται (1-1) τότε και μόνο τότε όταν $\forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$.
Δηλαδή σε διαφορετικά x μέσα από το πεδίο ορισμού της αντιστοιχούν διαφορετικά y (εικόνες).
Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ίσα y μέσα από το σύνολο τιμών της f προέρχονται από ίσα x μέσα από το πεδίο ορισμού της f συμβολικά $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ (μόνο).

Η συνάρτηση (1-1) και επί. Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται 1-1 και επί τότε και μόνο τότε όταν
α) $f(A) = B$ και β) $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in A$.

3.9. Πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης με τύπο $y = f(x)$.

Ορισμός. Ονομάζουμε πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης με τύπο $y = f(x)$ και το συμβολίζουμε με A ή $\mathcal{D}(f)$ ένα σύνολο που τα στοιχεία του είναι τα πραγματικά x για τα οποία η $f(x)$ έχει έννοια πραγματικού αριθμού.
Συμβολικά: $A = \mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}: \exists y \in \mathbb{R}$ με $y = f(x)\}$.
Πεδίο ορισμού της **πολυωνυμικής συνάρτησης** είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δηλ.: Αν $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu, \ldots, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ τότε $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
Πεδίο ορισμού της **ρητής συνάρτησης** είναι το $\mathbb{R}$, αν αφαιρέσουμε τις πραγματικές ρίζες του παρανομαστή.
Δηλ. Αν $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$ τότε $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$.
Πεδίο ορισμού της **άρρητης συνάρτησης** με τύπο $y = \sqrt{\varphi(x)}$ είναι τα πραγματικά x για τα οποία το υπόριζο είναι μεγαλύτερο είτε ίσο του μηδενός.
Δηλ. Αν $y = \sqrt{\varphi(x)}$ τότε $A = \mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}: \varphi(x) \geq 0\}$.
Της συνάρτησης **απόλυτος τιμή** με τύπο $y = |x|$ είναι $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
Της συνάρτησης με τύπο $y = \sqrt[2\nu+1]{\varphi(x)}$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
Των συναρτήσεων με τύπους:
$f(x) = \eta\mu x$ είναι $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

$f(x)$ = συνx είναι $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
$f(x)$ = εφx είναι $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}$: συνx $= 0\} = \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: x = \kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}\}$.
$f(x)$ = σφx είναι $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}$: ημx $= 0\} = \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: x = \kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}\}$.

Της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{αν } x\in A_1 \\ g(x) & \text{αν } x\in A_2 \end{cases}$ (πολλαπλός τύπος)

πεδίο ορισμού είναι η ένωση των συνόλων που μεταβάλλεται το x κάθε φορά
Δηλαδή είναι: $A = \mathcal{D}(f) = A_1 \cup A_2$.
Της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$ πεδιο ορισμού είναι το $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξετε ότι $\forall\ \nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει:

i) $2^\nu > \nu$ **ii)** $\frac{\nu^2}{2} < 1+2+3+..+\nu < \frac{(\nu+1)^2}{2}$ **iii)** $\alpha^\nu \geq \nu+1$ με $\alpha \geq 2$

Λύση: i) Με επαγωγή:
Για $\nu = 1$ ισχύει επειδή $2^1 > 1$. Έστω ότι για $\nu = \kappa$ ισχύει $2^\kappa > \kappa$ (α)
Θα αποδείξουμε ότι για $\nu = \kappa+1$ ισχύει $2^{\kappa+1} > \kappa+1$ (β).
Αντί να αποδείξουμε την (β) αρκεί να δείξουμε λόγω της (α) την
$\kappa\cdot 2 > \kappa+1 \iff \kappa > 1$ που είναι αληθινή. Επομένως η (i) ισχύει $\forall\ \nu\in\mathbb{N}^*$
ii) 1ος τρόπος. Γνωρίζουμε ότι $1+2+3+...+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\frac{\nu^2}{2} < \frac{\nu(\nu+1)}{2} < \frac{(\nu+1)^2}{2}$. Ή αρκεί να αποδείξουμς τις ανισότητες (1) $\frac{\nu^2}{2} < \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ και $\frac{\nu(\nu+1)}{2} < \frac{(\nu+1)^2}{2}$ (2)
Η (1) $\iff \nu < \nu+1$ που ισχύει και η (2) $\iff \nu < \nu+1$ που επίσης ισχύει.
2ος τρόπος. Με επαγωγή.
Για $\nu = 1$ είναι $\frac{1^2}{2} < 1 < 2$ που ισχύει. Έστω ότι για $\nu = \kappa$ ισχύει
$\frac{\kappa^2}{2} < 1+2+3+...+\kappa < \frac{(\kappa+1)^2}{2}$ (2), και θα αποδείξουμε ότι για $\nu = \kappa+1$ ισχύει: $\frac{(\kappa+1)^2}{2} < 1+2+3+...+\kappa+(\kappa+1) < \frac{(\kappa+2)^2}{2}$ (β)
Αντί της (β) αρκεί να δέιξουμε λόγω της (α) τις $\frac{(\kappa+1)^2}{2} < \frac{\kappa^2}{2}+\kappa+1$ και
$\frac{(\kappa+1)^2}{2}+\kappa+1 < \frac{(\kappa+2)^2}{2}$ ή αντί αυτών τις $\kappa^2+2\kappa+1 < \kappa^2+2\kappa+2$ και

$\kappa^2+2\kappa+1+2\kappa+2 < \kappa^2+4\kappa+4$ που είναι προφανές. Επομένως η (ii) ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$

iii) 1ος τρόπος. Με επαγωγή: Για $\nu = 1$ είναι $a^1 \geq 1+1 \rightarrow a \geq 2$ που ισχύει. Έστω ότι για $\nu = \kappa$ ισχύει $a^\kappa \geq \kappa+1$ (1) και θα αποδείξουμε ότι για $\nu = \kappa+1$ ισχύει $a^{\kappa+1} \geq \kappa+2$ (2). Λόγω δε της (1) αρκεί να δείξουμε ότι $a(\kappa+1) \geq \kappa+2 \leftrightarrow \kappa(a-1) \geq 2-a$ που ισχύει γιατί το πρώτο μέλος είναι > 0 και το δεύτερο ≤ 0.

2ος τρόπος. Επειδή $a \geq 2$ αρκεί να δείξουμε ότι $2^\nu \geq \nu+1 \leftrightarrow (1+1)^\nu \geq \nu+1$ που ισχύει λόγω της ανισότητας Bernoulli.

2. Δείξετε ότι $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει: $(\nu+1)^\nu \geq 2^\nu \nu!$ ($\nu! = 1.2.3...\nu$)

Λύση: Με επαγωγή.

Για $\nu = 1$ είναι $2 \geq 2$ (ισχύει). Έστω ότι για $\nu = \kappa$ ισχύει $(\kappa+1)^\kappa \geq 2^\kappa \kappa!$ (1). Και θα αποδείξουμε ότι για $\nu = \kappa+1$ ισχύει $(\kappa+2)^{\kappa+1} \geq 2^{\kappa+1}(\kappa+1)!$ (2)

Η (1) γράφεται $\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^\kappa \geq \kappa!$ (3) και η (2) $\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{\kappa+1} \geq (\kappa+1)!$ (4)

Από την (3) και (4) αρκεί να δείξουμε:

$\kappa!\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{\kappa+1} \geq (\kappa+1)!\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^\kappa \leftrightarrow \left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{\kappa+1} \geq (\kappa+1)\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^\kappa \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left(\frac{\kappa+2}{2}\right)^{\kappa+1} \geq \frac{(\kappa+1)^{\kappa+1}}{2^\kappa} \leftrightarrow \left(\frac{\kappa+2}{\kappa+1}\right)^{\kappa+1} \geq 2 \leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\kappa+1}\right)^{\kappa+1} \geq 2$ που ισχύει από την ανισότητα Bernoulli.

3. Δείξετε ότι: i) $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$: $\nu \geq 5$ είναι $2^\nu \geq \nu^2$.

ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^\nu > \nu+1$ $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$: $\nu \geq 4$

Λύση: i) Με επαγωγή.

Για $\nu = 5$ ισχύει γιατί είναι: $2^5 \geq 5^2 \leftrightarrow 32 \geq 25$. Έστω ότι για $\nu = \kappa > 5$ ισχύει $2^\kappa \geq \kappa^2$ (1) και θα αποδείξουμε ότι και για $\nu = \kappa+1$ ισχύει $2^{\kappa+1} \geq (\kappa+1)^2$ (2). Από τις (1) και (2) αρκεί να δείξουμε ότι:

$2\kappa^2 \geq (\kappa+1)^2 \leftrightarrow \kappa\sqrt{2} \geq \kappa+1 \leftrightarrow \kappa(\sqrt{2}-1) \geq 1 \leftrightarrow \kappa \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ που ισχύει γιατί $\kappa > 5$

Επομένως η (1) ισχύει $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$: $\nu \geq 5$.

ii) Με επαγωγή.

Για $\nu = 4$ ισχύει γιατι είναι $\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 5 \leftrightarrow 81 > 80$. Έστω ότι για $\nu = \kappa > 4$ ισχύει $\left(\frac{3}{2}\right)^\kappa > \kappa+1$ (1) και θα αποδείξουμε ότι για $\nu = \kappa+1$ ισχύει $\left(\frac{3}{2}\right)^{\kappa+1} > \kappa+2$ (2).

Από την (1) και (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$(\kappa+1)\frac{3}{2} > \kappa+2 \Leftrightarrow 3\kappa+3 > 2\kappa+4 \Leftrightarrow \kappa > 1$ που ισχύει.

Επομένως η (ii) ισχύει $\forall\, \nu\in\mathbb{N}$: $\nu \geq 4$.

4. Αν $0<\alpha\leq 1$ δείξετε ότι: $(1-\alpha)^{\nu} \leq \frac{1}{1+\nu\alpha}$ $\forall\, \nu\in\mathbb{N}$.

Λύση: Για ν = 1 ισχύει γιατί είναι $1-\alpha \leq \frac{1}{1+\alpha} \Leftrightarrow 1-\alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow -\alpha^2 \leq 0$

'Εστω ότι για ν = κ ισχύει $(1-\alpha)^{\kappa} \leq \frac{1}{1+\kappa\alpha}$ (1) και θα αποδείξουμε ότι για

$\nu = \kappa+1$ ισχύει $(1-\alpha)^{\kappa+1} \leq \frac{1}{1+(\kappa+1)\alpha}$ (2).

Από τις (1) και (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$(1-\alpha)\frac{1}{1+\kappa\alpha} \leq \frac{1}{1+(\kappa+1)\alpha} \Leftrightarrow (1-\alpha)(1+\kappa\alpha+\alpha) \leq 1+\kappa\alpha \Leftrightarrow 1+\kappa\alpha+\alpha-\alpha-\kappa\alpha^2-\alpha^2 \leq 1+\kappa\alpha$

$\Leftrightarrow -\alpha^2(\kappa+1) \leq 0$ που ισχύει. Επομένως η δοσμένη πρόταση ισχύει $\forall\, \nu\in\mathbb{N}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3-x+5$ και $A = \mathcal{D}(f) = \{-1,0,1\}$
Δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση: Στον τύπο της f βάζουμε όπου x τις τιμές -1,0,1 και θα πρέπει τα y που θα βρούμε (εικόνες) να είναι ο ίδιος σταθερός αριθμός.

'Εχουμε: $f(-1) = (-1)^3-(-1)+5 = -1+1+5 = 5$

$f(0) = 0^3-0+5 = 5$

$f(1) = 1^3-1+5 = 5$

'Αρα η f είναι σταθερή.

6. Δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι σταθερές.

α) $f:\{-2,0,2\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3-4x+3$

β) $g:\{0,1,2,-1\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x(x-1)(x-2)(x+1)+4$

Λύση: α) Είναι: $f(-2) = (-2)^3-4(-2)+3 = -8+8+3 = 3$

$f(0) = 0^3-4.0+3 = 3$

$f(2) = 2^3-4.2+3 = 3$

Επομένως η f είναι σταθερή γιατί $\forall\, x\in\{-2,0,2\} \Rightarrow f(x) = 3$

β) Είναι: $f(0) = 0(0-1)(0-2)(0+1)+4 = 4$

$f(1) = 1(1-1)(1-2)(1+1)+4 = 4$

$f(2) = 2(2-1)(2-2)(2+1)+4 = 4$

$f(-1) = (-1)(-1-1)(-1-2)(-1+1)+4 = 4$

'Αρα f είναι σταθερή γιατί $\forall\, x \in\{0,1,2,-1\} \Rightarrow f(x) = 4$.

7. Δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ταυτοτικές.

α) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x+1)^2-x^2-(x+1)$.

β) $g:\{-3,0,3\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^3-8x$.

γ) $h:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = 3x^5-2x^3$.

Λύση: α) Για να είναι η f ταυτοτική πρέπει για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ το y_1 (εικόνα) να είναι ίση με x_0.

Είναι: $f(x_0) = (x_0+1)^2-x_0^2-x_0-1 = x_0^2+2x_0+1-x_0^2-x_0-1 = x_0$.

Επομένως η f είναι ταυτοτική γιατί $\forall\ x_0\in\mathbb{R} \to f(x_0) = x_0$.

β) Είναι $g(-3) = (-3)^3-8(-3) = -27+24 = -3$

$g(0) = 0^3-8.0 = 0$

$g(3) = 3^3-8.3 = 27-24 = 3$

Δηλαδή $\forall\ x\in\{-3,0,3\} \to g(x) = x$ οπότε η g είναι ταυτοτική.

γ) Είναι $h(-1) = 3(-1)^5-2(-1)^3 = -3+2 = -1$

$h(0) = 3.0^5-2.0^3 = 0$

$h(1) = 3.1^5-2.1^3 = 1$

Δηλαδή $\forall\ x\in\{-1,0,1\} \to h(x) = x$ οπότε η h είναι ταυτοτική.

7α. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x(x-2)(x-1)}{x^2-3x+2}$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να δειχτεί ότι είναι ταυτοτική.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι όλα τα πραγματικά x εκτός από εκείνα που κάνουν μηδέν τον παρανομαστή.

Επειδή $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) \neq 0 \leftrightarrow x\neq 1,\ x\neq 2$. Άρα $A = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{1,2\}$ και η f γίνεται: $f(x) = \dfrac{x(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = x$.

Δηλαδή η f είναι ταυτοτική αφού $\forall\ x\in A \to f(x) = x$.

8. Έστω η συνάρτηση $f: [0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x) = 2|x-1|+|x-2|-3|x|$ και η $g: [0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(x) = -6x+4$. Δείξετε ότι η $f = g$.

Λύση: Οι συναρτήσεις έχουν κοινό πεδίο ορισμού επομένως είναι αρκετό να δείξουμε ότι $f(x) = g(x)\ \forall\ x\in[0,1]$.

Αλλά με $x\in[0,1]$ είναι $f(x) = -2x+2-x+2-3x = -6x+4$ και $g(x) = -6x+4$

Άρα $\forall\ x\in[0,1]$ είναι $f(x) = g(x)$.

9. Έστω οι συναρτήσεις $f: (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$ και $g: (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$. Δείξετε ότι $f = g$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) = g(x)$ $\forall$ $x \in (0,+\infty)$ επειδή οι συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

'Εχουμε: $f(x) = g(x) \longleftrightarrow \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \longleftrightarrow \frac{x+2}{x} = \frac{x+2}{x}$

που είναι αληθινό.

10. **'Εστω οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \frac{2\lambda^2 x+\lambda}{x+1-\lambda}$ και $\varphi(x) = \frac{(3\lambda-1)x+\lambda}{x+\lambda}$**

Να προσδιοριστεί ο πραγματικός λ έτσι ώστε $f = \varphi$.

Λύση: Θα πρέπει οι συναρτήσεις να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(\varphi) \longleftrightarrow \mathbb{R}-\{\lambda-1\} = \mathbb{R}-\{-\lambda\}$. Επομένως $\lambda-1 = -\lambda \longleftrightarrow \lambda = 1/2$.

Για την τιμή αυτή του λ εξετάζουμε αν ισχύει $f(x) = g(x)$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$

αλλά είναι $\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{3}{2}-1)x+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} \longleftrightarrow \frac{x+1}{x+\frac{1}{2}} = \frac{x+1}{x+\frac{1}{2}}$ που είναι αληθινό. 'Αρα με $\lambda = 1/2$ η $f = g$.

11. **'Εστω οι συναρτήσεις f: $[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ και**

φ: $[1+\infty)$ $\mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & 1 \le x \le 2 \\ 2\sqrt{x-1}, & x > 2 \end{cases}$

Δείξετε ότι $f = \varphi$

Λύση: Οι συναρτήσεις έχουν κοινό πεδίο ορισμού επομένως πρέπει να αποδείξουμε ότι $f(x) = \varphi(x)$ $\forall$ $x \in [1,+\infty)$ και επειδή δεν γνωρίζουμε από ποιό κλάδο καθορίζεται η f διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

i) $1 \le x \le 2$ τότε $g(x) = 2$ και $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ και έχουμε:

$g(x) = f(x) \longleftrightarrow \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2 \longleftrightarrow x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)} = 4 \longleftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-4(x-1)} = 4 \longleftrightarrow x+\sqrt{(x-2)^2} = 2 \longleftrightarrow |x-2| = 2-x \longleftrightarrow 2-x \ge 0 \longleftrightarrow x \le 2$ που είναι αληθινή.

ii) $x > 2$ τότε $g(x) = 2\sqrt{x-1}$ και $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ και έχουμε:

$g(x) = f(x) \longleftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \longleftrightarrow 4(x-1) = 2x+2\sqrt{x^2-4(x-1)}$
$\longleftrightarrow 2x-4 = \sqrt{x^2-4(x-1)} \longleftrightarrow x-2 = \sqrt{(x-2)^2} \longleftrightarrow |x-2| = x-2 \longleftrightarrow x-2 \ge 0$
$\longleftrightarrow x \ge 2$ που είναι αληθινή. 'Αρα είναι $f(x) = g(x)$ $\forall$ $x \in [1,+\infty)$.

12. **Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις**

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 4x^2-2x+1$ και g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -x^3+2x^2+2x-1$.

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $f-g$, $3f-5g$, $-f+g$, $f.g$.

Λύση: Για να ορίζεται το άθροισμα f+g πρέπει το πεδίο ορισμού της f και της g να έχουν κοινά στοιχεία δηλαδή να είναι ένα σύνολο διάφορο από το κενό.

Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$ επομένως $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset$.

Άρα έχουμε: $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 4x^2-2x+1+(-x^3+2x^2+2x-1) =$
$= 4x^2-2x+1-x^3+2x^2+2x-1 = -x^3+6x^2$.

Όμοια: $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 4x^2-2x+1-(-x^3+2x^2+2x-1) = 4x^2-2x+1+x^3-2x^2-$
$-2x+1 = x^3+2x^2-4x+2$.

Επίσης $(3f-5g)(x) = 3f(x)-5g(x) = 3(4x^2-2x+1)-5(-x^3+2x^2+2x-1) =$
$= 12x^2-6x+3+5x^3-10x^2-10x+5 = 5x^3+2x^2-16x+8$.

$(-f+g)(x) = (-f)(x)+g(x) = -f(x)+g(x) = -(4x^2-2x+1)+(-x^3+2x^2+2x-1) =$
$= -4x^2+2x-1-x^3+2x^2+2x-1 = -x^3-2x^2+4x-2$

και $(f.g)(x) = f(x)g(x) = (4x^2-2x+1)(-x^3+2x^2+2x-1) =$
$= -4x^5+8x^4+8x^3-4x^2+2x^4-4x^3-4x^2+2x-x^3+2x^2+2x-1 = -4x^5+10x^4+3x^3-6x^2+4x-1$.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2-3x+2$ και $g(x) = x(x-1)$
Να οριστεί η συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

Λύση: Το πηλίκο $h = \frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο $A' = \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: g(x) = 0\}$ και επειδή $g(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1$ είναι $A' = \mathbb{R}-\{0,1\}$.

Άρα η $\frac{f}{g}$: έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}-\{0,1\}$ και έχει τύπο:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-3x+2}{x(x-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x} = 1-\frac{2}{x}$$

14. Έστω οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = 3x+1$ και $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Να βρεθούν τα $f+g$, $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$

Λύση: Το άθροισμα η διαφορά το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων ορίζεται στο κοινό πεδίο ορισμού τους δηλαδή στην τομή $\mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$ που πρέπει να είναι σύνολο διάφορο του κενού.

Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{D}(g) = (-1,1) \Rightarrow \mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}\cap(-1,1) =$
$= (-1,1) \neq \emptyset$ επομένως είναι:

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 3x+1+\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$

$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 3x+1-\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$

$(f.g)(x) = f(x)g(x) = (3x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

15. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [2,5] \\ -x+8, & x \in [5,10] \end{cases}$ **και**

$g(x) = \begin{cases} x^2-x+1, & x \in [1,6] \\ 2x+6, & x \in [6,9] \end{cases}$

Να οριστεί η συνάρτηση f+g.

Λύση: Επειδή $\mathcal{D}(f) = [2,10]$ και $\mathcal{D}(g) = [1,9]$ έχουμε $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) =$ $= [1,9] \neq \emptyset$ άρα ορίζεται η συνάρτηση f+g.

Και επειδή οι τύποι των συναρτήσεων είναι πολλαπλοί διακρίνουμε 4 περιπτώσεις πρόσθεσης.

i) Αν $f(x) = x+3$ και $g(x) = x^2-x+1$ οπότε $\mathcal{D}_1(f) \cap \mathcal{D}_1(g) =$ $= [2,5] \cap [1,6] = [2,5] \neq \emptyset \rightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x) = (x+3)+(x^2-x+1) =$ $= x^2+4$.

ii) Αν $f(x) = x+3$ και $g(x) = 2x+6$ οπότε $\mathcal{D}_1(f) \cap \mathcal{D}_2(g) = [2,5] \cap [6,9] =$ $= \{\emptyset\}$ έπεται ότι δεν ορίζεται το άθροισμα $f(x)+g(x)$.

iii) Αν $f(x) = -x+8$ και $g(x) = x^2-x+1$ οπότε $\mathcal{D}_2(f) \cap \mathcal{D}_1(g) =$ $= [5,10] \cap [1,6] = [5,6] \neq \emptyset \rightarrow (f+g)(x) = -x+8+x^2-x+1 = x^2-2x+9$.

iv) Αν $f(x) = -x+8$ και $g(x) = 2x+6$ και επειδή $\mathcal{D}_2(f) \cap \mathcal{D}_2(g) =$ $= [5,10] \cap [6,9] \neq \emptyset \rightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x) = -x+8+2x+6 = x+14$.

Επομένως η συνάρτηση $(f+g)\colon [1,9] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+4, & x \in [1,5] \\ x^2-2x+9, & x \in [5,6] \\ x+14, & x \in [6,9] \end{cases}$$

16. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους

α) $f(x) = \frac{3}{(x-2)(x-3)}$ **και β)** $g(x) = \frac{3x}{(x^2-4)(x^2-9)}$

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{g}$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{x \in \mathbb{R}: (x-2)(x-3) = 0\} =$ $= \mathbb{R}-\{2,3\}$.

Όμοια το πεδίο ορισμού της g είναι $(g) = \mathbb{R}-\{x \in \mathbb{R}: (x^2-4)(x^2-9) = 0\} =$ $= \mathbb{R}-\{x \in \mathbb{R}: (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = 0\} = \mathbb{R}-\{2,-2,3,-3\}$.

Επομένως η συνάρτηση f+g είναι ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}-\{2,-2,3,-3\}$ και έχει τύπο $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{3}{(x-2)(x+3)} + \frac{3x}{(x^2-4)(x^2-9)} =$

$= \frac{3}{(x-2)(x-3)} + \frac{3x}{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+2)(x+3)+3x}{(x^2-4)(x^2-9)} = \frac{3(x^2+5x+6+x)}{(x^2-4)(x^2-9)} =$

$= \frac{3(x^2+6x+6)}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

'Ομοια η συνάρτηση f.g είναι ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}-\{2,3,-2,-3\}$ και έχει τύπο $(f.g)(x) = f(x)g(x) = \frac{3}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{3x}{(x^2-4)(x^2-9)} =$

$= \frac{9x}{(x-2)^2(x-3)^2(x+3)(x+2)}$

Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι ορισμένη στην τομή των συνόλων $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{2,3\}$ και $B = \{x\in\mathbb{R}: g(x) \neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: 3x \neq 0,\ (x^2-4)(x^2-9) \neq 0\} = \mathbb{R}-\{0,2,-2,3,-3\}$

Επομένως η $\frac{f}{g}$ είναι ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-3,-2,0,2,3\}$.

και έχει τύπο $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{(x-2)(x-3)} : \frac{3x}{(x^2-4)(x^2-9)} =$

$= \frac{3(x^2-4)(x^2-9)}{3x(x-2)(x-3)} = \frac{(x+2)(x+3)}{x}$

Η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ (συμμετρική της f) είναι ορισμένη στο σύνολο $A = \{x\in\mathbb{R}: f(x) \neq 0\} = \mathbb{R}-\{2,3\}$ και έχει τύπο $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)} =$

$= \frac{(x-2)(x-3)}{3}$. Η συνάρτηση $\frac{1}{g}$ (συμμετρική της g) είναι ορισμένη στο σύνολο $A = \{x\in\mathbb{R}: g(x) \neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: 3x \neq 0,\ (x^2-4)(x^2-9) \neq 0\} =$

$= \mathbb{R}-\{0,-3,-2,2,3\}$ και έχει τύπο $(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{(x^2-4)(x^2-9)}{3x}$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = 2x^2+3x+1$ και με πεδίο ορισμού το $[0,4]$ και g με $g(x) = 2x+4$ και πεδίο ορισμού το $[-1,2]$.
Να εξετάσετε αν ορίζονται οι συναρτήσεις: $f+g$, f^2, fg , $-g$.

Λύση: Η συνάρτηση f+g είναι ορισμένη στην τομή των συνόλων $[0,4]\cap[-1,2] = [0,2]$ και έχει τύπο $(f+g)(x) = f(x)+g(x) =$
$= (2x^2+3x+1)+(2x+4) = 2x^2+5x+5$.
Η συνάρτηση f^2 είναι ορισμένη στο συνολο $[0,4]$ και έχει τύπο $f^2(x) =$
$= f(x)f(x) = (2x^2+3x+1)^2$.
Η f.g είναι ορισμένη στην τομή των συνόλων $[0,4]\cap[-1,2] = [0,2]$ και έχει τύπο $(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x^2+3x+1)(2x+4) = 4x^3+6x^2+2x+8x^2+12x+4 =$
$= 4x^3+14x^2+14x+4$.
Η -g είναι ορισμένη στο σύνολο $[-1,2]$ και έχει τύπο $(-g)(x) = -g(x) =$
$= -2x-4$.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x-1, & 0 \leq x \leq 5 \\ 2x-3, & x<0 \text{ ή } x>5 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-2, & 1 \leq x \leq 4 \\ -x^2-7x+1, & x<1 \text{ ή } x>4 \end{cases}$$

Να εξετάσετε πότε ορίζεται η συνάρτηση f-g και να βρεθεί ο τύπος της

Λύση: Για να ορίζεται η f-g θα πρέπει η τομή των πεδίων ορισμού των f και g να είναι ένα σύνολο διάφορο από το κενό.

i) Επομένως αν η $f(x) = x^2+4x-1$ με $x \in [0,5]$ και $g(x) = x-2$ με $x \in [1,4]$ έχουμε $[0,5] \cap [1,4] = [1,4] \neq \emptyset$, άρα υπάρχει η $(f-g)(x) = f(x)-g(x) =$ $= x^2+4x-1-x+2 = x^2+3x+1$.

ii) Αν η $f(x) = x^2+4x-1$ με $x \in [0,5]$ και $g(x) = -x^2-7x+1$ με $x \in (-\infty,1) \cup (4,+\infty)$ έχουμε $[0,5] \cap (-\infty,1) \cup (4,+\infty) = [0,1) \cup (4,5] \neq \emptyset$.

Άρα υπάρχει η $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = x^2+4x-1+x^2+7x-1 = 2x^2+11x$.

iii) Αν η $f(x) = 2x-3$ με $x \in (-\infty,0) \cup (5,+\infty)$ και $g(x) = x-2$ με $x \in [1,4]$ έχουμε $(-\infty,0) \cup (5,+\infty) \cap [1,4] = \emptyset$ άρα δεν υπάρχει η $(f-g)(x)$.

iv) Αν η $f(x) = 2x-3$ με $x \in (-\infty,0) \cup (5,+\infty)$ και $g(x) = -x^2-7x+1$ με $x \in (-\infty,1) \cup (4,+\infty)$ έχουμε $(-\infty,0) \cup (5,+\infty) \cap (-\infty,1) \cup (4,+\infty) =$ $= (-\infty,0) \cup (5,+\infty) \neq \emptyset$.

Άρα υπάρχει η $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 2x-3+x^2+7x-1 = x^2+9x-4$.

Τελικά η f-g ορίζεται στις περιπτώσεις (i), (ii), (iv) και έχει τον παρακάτω πολλαπλό τύπο.

$$(f-g)(x) = \begin{cases} x^2+3x+1, & x \in [1,4] \\ 2x^2+11x, & x \in [0,1) \cup (4,5] \\ x^2+9x-4, & x \in (-\infty,0) \cup (5,+\infty) \end{cases}$$

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ **και** $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

Να εξετάσετε αν η f είναι περιορισμός της g.

Λύση: Για να είναι η f περιορισμός της g θα πρέπει το πεδίο ορισμού της f που είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{1\}$ να είναι γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της g που είναι $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$ γιατί $x^2+x+1 \neq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι φανερό $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(g)$ και οι τύποι των f και g να είναι οι ίδιοι $\forall \ x \in \mathcal{D}(f)$.

Αλλά ο τύπος της f είναι $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{x+1}{x^2+x+1} = g(x)$

Η απλοποίηση με το x-1 μπορεί να γίνει γιατί στο $\mathcal{D}(f)$ είναι $x \neq 1$. Επομένως είναι η f περιορισμός της g, και η g επέκταση της f.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = |2x-1|+|x-2|$ **και**

$g(x) = x+1$ με $\mathcal{D}(g) = [\frac{1}{2}, 2]$.

Να εξετάσετε αν η g είναι περιορισμός της f.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Επομένως ισχύει $\mathcal{D}(g) \subset \mathcal{D}(f)$

Όταν το $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ο τύπος της f είναι $f(x) = 2x-1+2-x = x+1$ γιατί $2x-1 \geq 0$ και $x-2 \leq 0$. Άρα είναι και $f(x) = g(x)$ $\forall$ $x \in \mathcal{D}(g)$.

Συνεπώς η g είναι περιορισμός της f και η f επέκταση της g.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1,3] \to [-7,1]$ με $f(x) = 2x-5$.

Να εξετάσετε αν η f είναι (1-1) και επί.

Λύση: Από τον τύπο της f έχουμε αν θεωρήσουμε τα $x_1, x_2 \in [-1,3]$ με $x_1 \neq x_2 \to 2x_1 \neq 2x_2 \to 2x_1-5 \neq 2x_2-5 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ και η f είναι (1-1)

Επίσης από τον τύπο της f βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f([-1,3]) = \mathcal{R}(f)$.

Αν θέσουμε $y = 2x-5$ και λύσουμε ως προς x έχουμε: $x = \frac{y+5}{2}$ και θα πρέπει

το $x \in [-1,3] \leftrightarrow -1 \leq \frac{y+5}{2} \leq 3 \leftrightarrow -2 \leq y+5 \leq 6 \leftrightarrow -7 \leq y \leq 1 \to \mathcal{R}(f) = [-7,1]$

Επειδή δε το $\mathcal{R}(f)$ ταυτίζεται με το πεδίο τιμών της f η f είναι και επί του $[-7,1]$.

Άρα η f είναι (1-1) και επί του $[-7,1]$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1,1) \to (\frac{1}{3}, 1)$ με $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$.

Να εξετάσετε αν είναι (1-1) και επί.

Λύση: Είναι η f (1-1) γιατί αν θεωρήσουμε δύο τυχαία $x_1, x_2 \in (-1,1)$ τότε

$f(x_1) = \frac{2x_1+3}{x_1+4}$ και $f(x_2) = \frac{2x_2+3}{x_2+4}$ και αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$

$\leftrightarrow \frac{2x_1+3}{x_1+4} = \frac{2x_2+3}{x_2+4} \leftrightarrow (2x_1+3)(x_2+4) = (2x_2+3)(x_1+4) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 2x_1x_2+8x_1+3x_2+12 = 2x_1x_2+8x_2+3x_1+12 \leftrightarrow 5x_1 = 5x_2 \leftrightarrow x_1 = x_2$ (μόνο)

Για να είναι η f επί θα πρέπει το σύνολο τιμών της $\mathcal{R}(f)$ να είναι ίσο με $(\frac{1}{3}, 1)$. Θέτουμε $y = \frac{2x+3}{x+4}$ λύνουμε ως προς x και έχουμε: $xy+4y = 2x+3$

$\leftrightarrow x(y-2) = 3-4y \leftrightarrow x = \frac{3-4y}{y-2}$ με $y \neq 2$.

Θα πρέπει δε το $x \in (-1,1) \leftrightarrow -1 < \frac{3-4y}{y-2} < 1 \leftrightarrow (\frac{3-4y}{y-2} > -1$ και $\frac{3-4y}{y-2} < 1)$

$\leftrightarrow (\frac{3-4y+y-2}{y-2} > 0$ και $\frac{3-4y-y+2}{y-2} < 0) \leftrightarrow (\frac{-3y+1}{y-2} > 0$ και $\frac{-5y+5}{y-2} < 0) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ ((-3y+1)(y-2) > 0 και (-5y+5)(y-2) < 0) $\leftrightarrow$ ($\frac{1}{3}$ < y < 2 ∧ y > 2 ή y < 1)

$\leftrightarrow \frac{1}{3} < y < 1 \leftrightarrow \mathcal{R}(f) = (\frac{1}{3}, 1)$. Επομένως η f είναι (1-1) και επί του $\mathcal{R}(f)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{0\} \to (-\infty,-2] \cup [2,+\infty) = B$ με $f(x) = x+\frac{1}{x}$

Να εξετάσετε αν η f είναι (1-1) και επί του B.

Λύση: Η f δεν είναι (1-1) γιατί με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{0\}$ τότε $f(x_1) = x_1+\frac{1}{x_1}$ και $f(x_2) = x_2+\frac{1}{x_2}$ και αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow x_1+\frac{1}{x_1} = x_2+\frac{1}{x_2} \leftrightarrow x_1-x_2+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2} = 0 \leftrightarrow x_1-x_2-\frac{x_1-x_2}{x_1x_2} = 0$$

$$\leftrightarrow (x_1-x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2}) = 0 \leftrightarrow x_1-x_2 = 0 \text{ ή } 1-\frac{1}{x_1x_2} = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ή}$$

$x_1x_2 = 1$ δηλαδή δεν ισχύει μόνο $x_1 = x_2$ αλλά και $x_1x_2 = 1$ επομένως η f δεν είναι (1-1).

Για να είναι η f επί πρέπει το $\mathcal{R}(f) = f(A) = B$.

Θέτουμε $y = x+\frac{1}{x} \leftrightarrow xy = x^2+1 \leftrightarrow x^2-xy+1 = 0$ (1) και επειδή $x \in \mathbb{R}$ πρέπει η διακρίνουσα της (1) να είναι μεγαλύτερη είτε ίση με το μηδέν.

Δηλαδή $\Delta \geq 0 \leftrightarrow y^2-4 \geq 0 \leftrightarrow (y-2)(y+2) \geq 0 \leftrightarrow y \geq 2$ ή $y \leq -2 \leftrightarrow \mathcal{R}(f) = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$.

Επομένως η f είναι επί του B.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f: [3,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \max(2x-3, x)$.

Να εξετάσετε αν η f είναι (1-1) και επί.

Λύση: Βρίσκουμε τον τύπο της f χωρίς το max που είναι

$$f(x) = \frac{2x-3+x+|2x-3-x|}{2} = \frac{3x-3+|x-3|}{2}$$ και με $x \in [3,+\infty) \to x-3 \geq 0$

$\to |x-3| = x-3$ οπότε η f γίνεται $f(x) = \frac{3x-3+x-3}{2} = 2x-3$

Η f είναι (1-1) στο διάστημα $[3,+\infty)$ γιατί με $x_1, x_2 \in [3,+\infty)$ και $x_1 \neq x_2$ $\to 2x_1 \neq 2x_2 \leftrightarrow 2x_1-3 \neq 2x_2-3 \leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Για να είναι η f επί το $\mathbb{R}$ πρέπει το σύνολο τιμών της $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$.

Αλλά αν θέσουμε $y = 2x-3 \leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$ και επειδή $x \in [3,+\infty)$

$\to \frac{y+3}{2} \geq 3 \leftrightarrow y+3 \geq 6 \leftrightarrow y \geq 3 \leftrightarrow \mathcal{R}(f) = [3,+\infty)$.

Είναι δε $[3,+\infty) \subset \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι επί.

25. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}$ δ) $h(x) = x-\sqrt{4-x^2}$

β) $g(x) = \dfrac{x+4}{(2x+5)^2-(x+1)^2}$ ε) $t(x) = \sqrt{x^2-4x+4}$

γ) $\varphi(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9} + \dfrac{12-4x}{x^2-6x+9}$ στ) $\theta(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$

Λύση: α) Η f είναι ρητή συνάρτηση και για να είναι ορισμένη πρέπει $(x^2+1)(x-2) \neq 0 \Longleftrightarrow x-2 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 2$ γιατί $x^2+1>0 \ \forall\ x\in\mathbb{R}$.
Επομένως το πεδίου ορισμού της f είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{2\}$.

β) Το πεδίο ορισμού της g είναι $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: (2x+5)^2-(x+1)^2 = 0\}$.
Αλλά $(2x+5)^2-(x+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow (2x+5-x-1)(2x+5+x+1) = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x+4)(3x+6) = 0 \Longleftrightarrow 3(x+4)(x+2) = 0 \Longleftrightarrow x = -4,\ x = -2$.
Άρα $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}-\{-4,-2\}$.

γ) Πεδίο ορισμού της φ είναι $\mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: x^2-9 = 0 \wedge x^2-6x+9 = 0\}$.
Αλλά $\{x^2-9 = 0 \wedge x^2-6x+9 = 0\} \Longleftrightarrow \{(x-3)(x+3) = 0 \wedge (x-3)^2 = 0\} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x = 3,\ x = -3$.
Άρα $\mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{R}-\{3,-3\}$.

δ) Όμοια για να είναι η h ορισμένη πρέπει $4-x^2 \geq 0$ επειδή είναι άρρητη
Αλλά $4-x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Άρα πεδίο ορισμού της h είναι το $\mathcal{D}(h) = [-2,2]$.

ε) Το πεδίο ορισμού της t είναι τα πραγματικά x για τα οποία ισχύει:
$x^2-4x+4 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$ που ισχύει $\forall\ x\in\mathbb{R}$. Άρα $\mathcal{D}(t) = \mathbb{R}$.

στ) Όμοια πεδίο ορισμού της θ είναι το $\mathcal{D}(\theta) = \{x\in\mathbb{R}: x^2-4x+3 \geq 0\}$.
Αλλά $x^2-4x+3 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2-3x-x+3 \geq 0 \Longleftrightarrow x(x-3)-(x-3) \geq 0 \Longleftrightarrow (x-3)(x-1) \geq 0$
$\Longleftrightarrow x \geq 3 \vee x \leq 1$. Άρα $\mathcal{D}(\theta) = (-\infty,1] \cup [3,+\infty)$.

26. Έστω η συνάρτηση με τύπο $y = f(x) = \sqrt{|x^2-3x+2|-4}$.
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $\mathcal{D}(f)$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της f θα αποτελέσουν τα $x\in\mathbb{R}$: $|x^2-3x+2|-4 \geq 0$
$\Longleftrightarrow |x^2-3x+2| \geq 4 \Longleftrightarrow (x^2-3x+2)^2 \geq 16 \Longleftrightarrow (x^2-3x+2-4)(x^2-3x+2+4) \geq 0$
$\Longleftrightarrow (x^2-3x-2)(x^2-3x+6) \geq 0 \Longleftrightarrow x^2-3x-2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$ ή $x \leq \dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$

γιατί το $x^2-3x+6 > 0 \ \forall\ x\in\mathbb{R}$ επειδή έχει $\Delta = 9-24 < 0$.
Επομένως το $\mathcal{D}(f) = (-\infty, \dfrac{3-\sqrt{11}}{2}] \cup [\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}, +\infty)$.

27. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}\,\eta\mu(x+1)}{x^2-3x+2}$　　β) $f(x) = \dfrac{\log(x^2-1)}{x^2+1}$

γ) $f(x) = \dfrac{3x^2+5x-6}{(x^2-2)(x^2+x+1)}$　　δ) $\sqrt[[x]]{x}$

ε) $f(x) = \min(2x+1, x+2)$　　στ) $f(x) = \dfrac{3}{1-\eta\mu x}$

ζ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|2x+1|-1}}{|x-1|}$　　η) $f(x) = \sqrt{|x^2-3|x|+4|-2}$

Λύση: α) Πρέπει $x^2-4 \geq 0$ και $x^2-3x+2 \neq 0$. Δηλαδή $((x-2)(x+2) \geq 0$ και $x \neq 1,2) \longleftrightarrow (x \geq 2 \vee x \leq -2$ και $x \neq 1,2) \longleftrightarrow x > 2 \vee x \leq -2$ $\longleftrightarrow x \in (-\infty,-2] \cup (2,+\infty)$. Άρα $\mathcal{D}(f) = (-\infty,-2] \cup (2,+\infty)$.

β) Πρέπει $\{x^2-1 > 0$ και $x^2+1 \neq 0\} \longleftrightarrow |x| > 1 \longleftrightarrow x > 1 \vee x < -1$ $\longleftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Άρα $\mathcal{D}(f) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

γ) Επειδή η συνάρτηση είναι ρητή έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{x \in \mathbb{R}: (x^2-2)(x^2+x+1) = 0\}$. Αλλά $(x^2-2)(x^2+x+1) = 0 \longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ επειδή η $x^2+x+1 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{+\sqrt{2},-\sqrt{2}\} = (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty)$.

δ) Θα πρέπει για να έχει νόημα η ρίζα ο δείχτης να είναι φυσικός αριθμός ≥ 2. Δηλαδή πρέπει: $[x] \geq 2$ με $[x] \in \mathbb{N}$ όπου $[x]$ = ακέραιο μέρος.
Αλλά γνωρίζουμε ότι $\forall\, x \in \mathbb{R}$ είναι $[x] \leq x < [x]+1$ οπότε αν $2 \leq x < 3$ $\longrightarrow [x] = 2$ οπότε $\mathcal{D}(f) = [2,+\infty)$.

ε) Ο τύπος της f είναι: $f(x) = \dfrac{2x+1+x+2-|2x+1-x-2|}{2} \longrightarrow f(x) = \dfrac{3x+3-|x-1|}{2}$ και αν $x \geq 1 \longrightarrow f(x) = x+2$, και αν $x < 1 \longrightarrow f(x) = 2x+1$.

Επομένως η f γράφεται με πολλαπλό τύπο $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{αν } x \geq 1 \\ 2x+1 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

Άρα $\mathcal{D}(f) = (-\infty,1) \cup [1,+\infty)$.

στ) Η f είναι ορισμένη για κείνες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ο παρανομαστής $1-\eta\mu x \neq 0 \longleftrightarrow \eta\mu x \neq 1 \longleftrightarrow x \neq \kappa\pi+(-1)^{\kappa}\dfrac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Άρα $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{x \in \mathbb{R}: x = \kappa\pi+(-1)^{\kappa}\cdot\dfrac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$.

ζ) Θα πρέπει ο παρανομαστής να είναι διάφορος από το μηδέν δηλαδή $x-1 \neq 0 \longleftrightarrow x \neq 1$ και $|2x+1|-1 \geq 0 \longleftrightarrow |2x+1| \geq 1 \longleftrightarrow (2x+1)^2 \geq 1 \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow (2x+1-1)(2x+1+1) \geq 0 \longleftrightarrow 2x(2x+2) \geq 0 \longleftrightarrow x(x+1) \geq 0 \longleftrightarrow x \geq 0 \vee x \leq -1$.
Επομένως $\mathcal{D}(f) = (-\infty,-1] \cup [0,1) \cup (1,+\infty)$.

η) Πρέπει $|x^2-3|x|+4|-2 \geq 0 \longleftrightarrow |x^2-3|x|+4| \geq 2 \longleftrightarrow (x^2-3|x|+4)^2 \geq 4$ $\longleftrightarrow (x^2-3|x|+4-2)(x^2-3|x|+4+2) \geq 0 \longleftrightarrow (x^2-3|x|+2)(x^2-3|x|+6) \geq 0 \longleftrightarrow$

$x^2-3|x|+2 \geq 0$ γιατί $x^2-3|x|+6 \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x|^2-3|x|+2 \geq 0$ επειδή $x^2 = |x|^2 \ \forall \ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (|x|-1)(|x|-2) \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \vee |x| \leq 1$
$\Leftrightarrow x^2 \geq 4 \vee x^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x \geq 2 \vee x \leq -2) \vee -1 \leq x \leq 1$
$\Leftrightarrow \mathcal{D}(f) = (-\infty,-2] \cup [-1,1] \cup [2,+\infty)$.

28. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

1. $f(x) = \log_x \frac{x-1}{x^2-2}$ 2. $g(x) = \log_{x-2}\sqrt{16-x^2}$

Λύση: 1. Πρέπει $\frac{x-1}{x^2-2} > 0$ και $0 < x \neq 1$. Η πρώτη ισοδυναμεί με
$(x-1)(x^2-2) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0$,

$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$		$+$	

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < 1$ ή $x > \sqrt{2}$ και $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (\sqrt{2},+\infty)$.
Άρα πεδίο ορισμού της f είναι $\mathcal{D}(f) = (0,1) \cup (\sqrt{2},+\infty)$.

2. Πρέπει $16-x^2 > 0$ και $0 < x-2 \neq 1$.
Δηλαδή πρέπει $\{(4-x)(4+x) > 0 \wedge x \neq 3, x > 2\} \Leftrightarrow \{-4 < x < 4$ και $x \neq 3$, $x > 2\} \Leftrightarrow x \in (2,3) \cup (3,4)$.
Άρα πεδίο ορισμού της g είναι $\mathcal{D}(g) = (2,3) \cup (3,4)$.

ΛΥΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξετε ότι $\forall \ \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει: $(1-\frac{1}{\nu^2})^\nu \geq 1-\frac{1}{\nu}$

2. $\forall \ \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $(1+\frac{1}{\nu})^\nu > (1+\frac{1}{\nu-1})^{\nu-1}$

3. Εάν $0 < \alpha < \frac{1}{\nu}$ δείξετε ότι $(1+\alpha)^\nu < \frac{1}{1-\nu\alpha} \quad \forall \ \nu \in \mathbb{N}^*$

4. $\forall \ \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $(1+\frac{1}{6\nu})^{-\nu} > \frac{5}{6}$

5. Εάν $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ δείξετε ότι i) $\sqrt[\nu]{\alpha} < 1$

6. Εάν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$.

7. $\forall \ \nu \in \mathbb{N}$: $\nu \geq 10$ δείξετε ότι $2^\nu > \nu^3$.

8. Αν $\mu,\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\mu > \nu$ δείξετε ότι όταν $x > 1 \rightarrow x^\mu > x^\nu$ και όταν $0 < x < 1$ $x^\mu < x^\nu$.

9. $\forall \ \nu \in \mathbb{N}$: $\nu \geq 2$ και $\alpha \geq 0$ δείξετε ότι: $(1+\alpha)^\nu \geq 1+\frac{\nu(\nu-1)}{2}\alpha^2$

10. Δείξετε ότι:

1. $|\alpha-\beta| = \max\{\alpha,\beta\}-\min\{\alpha,\beta\}$
2. $|x| = \max\{x,-x\}$.
3. $2|x| = \max\{0,2x\}-\min\{0,2x\}$.
4. $2|\beta-\gamma|+|2\alpha-\beta-\gamma|-|\beta-\gamma|+|2\alpha-\beta-\gamma+|\gamma-\beta|| = 4\max\{\alpha,\beta,\gamma\}-4\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$

11. $\forall\ x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x\in[-2,2] \longleftrightarrow \max\{x,-x\}\leq 2$.

12. $\forall\ \nu\in\mathbb{N}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $\beta^{\nu+1}\geq\alpha^{\nu}(\nu+1)-\nu\alpha^{\nu+1}$.

13. $\forall\ \nu\in\mathbb{N}$: $\nu\geq 3$ ισχύει $\nu^{\nu+1}<(\nu+1)^{\nu}$.

14. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού στις παρακάτω συναρτήσεις με τύπους:

α) $f(x) = \sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{|x+1|-2|x|+|x-1|-\frac{2x+4}{5}}$

β) $f(x) = \log_{x-1}(x+1)$ γ) $f(x) = \log(3^{2x}-3^{x+1}+6)$

δ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^4-4x^2+4}}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

15. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+3)}$.

α) Να βρεθεί το $\mathcal{D}(f)$ αυτής.

β) Για ποιά x μέσα από το $\mathcal{D}(f)$ είναι $f(x) = f(-x)$

16. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x^2+4}+\sqrt{x^3-x^2-x+1}}{\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}-\sqrt{x^3+5x^2+8x+4}}$$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού αυτής $\mathcal{D}(f)$.

17. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f)$ των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x) = \sqrt{\text{συν}x-1}$ β) $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

γ) $f(x) = \dfrac{\text{ημ}x}{2\text{ημ}x-1}$ δ) $f(x) = \max(x,-x)+\min(x,3x+1)$

18. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } 1\leq x<2 \\ x+1 & \text{αν } 2\leq x\leq 3 \\ \sqrt{x-4} & \text{αν } 4\leq x<+\infty \end{cases}$$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $\mathcal{D}(f)$.
2. Να βρεθούν τα $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(x+1)$, με $x\in\mathcal{D}(f)$.

19. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

1. $f(x) = \log \frac{2-x}{3-x}$
2. $g(x) = \log(x^2-4x)$
3. $h(x) = \sqrt{\log \frac{3x-x^2}{x+1}}$
4. $\varphi(x) = \log[\log(x+1)]$
5. $t(x) = \sqrt{\log|x+2|}$
6. $\theta(x) = \frac{\log(x^2-5x+6)}{\sqrt{16-x^2}}$
8. $A(x) = \log_{x^2-x-2} \sqrt[9-x^2]{9-x^2}$
7. $\omega(x) = \log_{x-3}(\sqrt{x^2-2x})$

20. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ και $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ είναι ίσες.

21. Δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^2-4}{(x+2)^2}$ και η $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$ είναι ίσες.

22. Έστω η συνάρτηση $f: \left[\frac{1}{2}, 3\right] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |2x-1| + |x-3|$ και $g: \left[\frac{1}{2}, 3\right] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x+2$ είναι ίσες;

23. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός λ έτσι ώστε οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{x+\lambda+2}{x-\lambda-4}$ και $g(x) = \frac{9x+4\lambda-11}{3x+\lambda}$ είναι ίσες.

24. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους: $g(x) = \max\{x-2, 1-x\}$ και

$$h(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 3/2 \\ 1-x, & x > 3/2 \end{cases}$$

Δείξετε ότι $h = g$.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

Να οριστούν οι συναρτήσεις $f \pm g$, $f.g$, f/g.

26. Όμοια για τις συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -2 < x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x+1, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g$, $f.g$, f/g.

27. Δίδονται οι συναρτήσεις f και g με

$f(x) = \frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-1}$ και $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$

Να εξετάσετε αν η f είναι περιορισμός της g.

28. Όμοια για τις συναρτήσεις φ και h με

$\varphi(x) = \sqrt{x-1}+\sqrt{|x|}$ και $h(x) = \sqrt{|1-x|}+\sqrt{x}$ αν φ είναι περιορισμός της h.

29. Δίνεται η συνάρτηση f: $[0,4] \to [0,2]$ με τύπο $f(x) = \min(x,4-x)$.
Να εξετάσετε αν είναι (1-1) και επί.

30. Επίσης αν η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ αν είναι (1-1) και επί.

31. Εξετάσετε αν η συνάρτηση f: $\mathbb{R}-\{-4\} \to \mathbb{R}-\{1\}$ με $f(x) = \frac{x+3}{x+4}$ είναι (1-1) και επί.

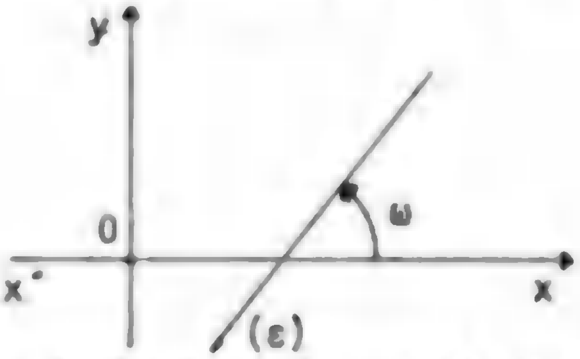
32. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4+\lambda x^3+\mu$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Δείξετε ότι η f δεν είναι (1-1).

3.10. Η ευθεία σαν συνάρτηση.

Συντελεστής διευθύνσεως ευθείας.

Ορισμός. Ονομάζουμε **συντελεστή διευθύνσεως** μιας ευθείας (ε) την εφαπτομένη της θετικής γωνίας ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα xx', και συμβολίζεται με λ.

Δηλ. $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$ (1).



"Δεχόμαστε ότι η (ε) δεν είναι παράλληλη με τον άξονα yy' γιατί τότε δεν είναι συνάρτηση".

Ο αριθμός λ καθορίζει τελείως την διεύθυνση της ευθείας και αν $\lambda > 0$ τότε η (ε) ανέρχεται από κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά.

Αν $\lambda < 0$ τότε η (ε) κατέρχεται από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά και αν $\lambda = 0$ τότε η (ε) είναι παράλληλη με τον άξονα xx'.

Αν η ευθεία (ε) καθορίζεται από δύο σημεία της $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ τότε ο συντελεστής διευθύνσεως δίνεται από τον τύπο: $\lambda = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ (2)

3.11. Οι μορφές εξίσωσης μιας ευθείας.

1. Εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από ένα γνωστό σημείο (x_0,y_0) και έχει γνωστό συντελεστή διευθύνσεως λ είναι:

$$y-y_0 = \lambda(x-x_0) \quad (3)$$

2. Εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι:

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} \quad (\text{αν } \varepsilon \not\parallel xx') \quad (4)$$

ή

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Σημείωση 1. Από την (3) αν το γνωστό σημείο είναι το $(0,\beta)$ αν η (3) γίνεται

$$y = \lambda x+\beta$$

Αν δε το σημείο είναι η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων η (3) γίνεται:

$$y = \lambda x$$

και αν $\lambda = 0$ τότε η (3) γίνεται: $y = y_0$

που είναι εξίσωση ευθείας παράλληλης με τον άξονα xx'.

Ακόμη η (ε) περνά από τα σημεία $A(\alpha,0)$, $B(0,\beta)$ η (4) γίνεται

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

και ονομάζεται εξίσωση ευθείας επί την αρχή.

Επομένως μόνο η **ομοιοπαραλληλική συνάρτηση** $y = \lambda x+\beta$ έχει γραφική παράσταση ευθεία.

3.12. Η γενική μορφή εξίσωσης ευθείας είναι: $Ax+By+\Gamma = 0$, $|A|+|B| \neq 0$

Ορισμός. Συντελεστής κλίσεως ή συντελεστής διευθύνσεως μιας ευθείας (ε) με εξίσωση $Ax+By+\Gamma = 0$ λέγεται ο συντελεστής του x όταν η εξίσωση λυθεί ως προς y. Δηλ. $\lambda = -\frac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Αν $A = 0$ τότε η ευθεία $Ax+By+\Gamma = 0 \Longleftrightarrow y = -\frac{\Gamma}{B} = y_0$ και είναι // με τον άξονα xx'.

Αν $B = 0$ τότε η ευθεία $Ax+By+\Gamma = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{A} = x_0$ και είναι // με τον άξονα yy'.

Αν $\Gamma = 0$ τότε η ευθεία $Ax+By+\Gamma = 0 \Longleftrightarrow y = -\frac{A}{B}x = \lambda x$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3.13. Παράλληλες ευθείες.

Δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) με συντελεστές διευθύνσεως λ_1 και λ_2 είναι παράλληλες τότε και μόνο τότε όταν $\lambda_1 = \lambda_2$ και αν οι εξισώσεις τους είναι $(\varepsilon_1): \alpha_1 x+\beta_1 y = \gamma_1$ και $(\varepsilon_2): \alpha_2 x+\beta_2 y = \gamma_2$ θα είναι $(\varepsilon_1) /\!/ (\varepsilon_2) \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

3.14. Ευθείες κάθετες

Δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) με συντελεστές διευθύνσεως λ_1 και λ_2 είναι κάθετες αν και μόνο αν: $\lambda_1\lambda_2 = -1$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Η ευθεία διέρχεται από το σημείο (-1,2) και έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda = 3$.

ii) Διέρχεται από το σημείο (-2,-3) και είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$.

iii) Διέρχεται από το σημείο (-1,0) και είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -x$.

iv) Διέρχεται από το σημείο (1,2) και είναι παράλληλη με την ευθεία $x-2y+2 = 0$

Λύση: i) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση κάθε ευθείας που περνά από ένα γνωστό σημείο (x_0,y_0) και έχει γνωστό συντελεστή κλίσεως λ έχει εξίσωση $y-y_0 = \lambda(x-x_0)$ και αν θέσουμε $(x_0,y_0) = (-1,2)$ και $\lambda = 3$ έχουμε: $y-2 = 3(x+1)$.

ii) Επειδή η ζητούμενη ευθεία θα είναι παράλληλη με την $y = x$ θα έχουν ίσους συντελεστές διευθύνσεως και επειδή ο συντελεστής διευθύνσεως της $y = x$ είναι $\lambda = 1$ θα έχουμε ότι η εξίσωση της θα είναι: $y+3 = 1(x+2) \longleftrightarrow x-y-1 = 0$

iii) Όμοια η ζητούμενη ευθεία θα έχει τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως με την ευθεία $y = -x$ που είναι $\lambda = -1$. Άρα η εξίσωσή της θα είναι: $y-0 = -1(x+1) \longleftrightarrow x+y+1 = 0$.

iv) Επειδή η ζητούμενη ευθεία θα είναι παράλληλη με την ευθεία $x-2y+2=0$ θα έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda = 1/2$ γιατί ο συντελεστής διευθύνσεως της $x-2y+2 = 0 \longleftrightarrow y = 1/2x+1$ είναι το $1/2$.

'Αρα η ζητούμενη ευθεία θα έχει εξίσωση την: $y-2 = \frac{1}{2}(x-1)$

$\Longleftrightarrow x-2y+3 = 0$

2. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(-2,3) και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ω = π/3.

Λύση: Ο συντελεστής διευθύνσεως της (ε) θα είναι $\lambda = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

'Αρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $y-3 = \sqrt{3}(x+2) \Longleftrightarrow \sqrt{3}x-y+3+2\sqrt{3} = 0$.

3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α(-1,2), Β(0,3).

Λύση: 1ος τρόπος: Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση κάθε ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία (x_1,y_1), (x_2,y_2) είναι:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-x_1}$ και για τα δοσμένα σημεία γίνεται:

$\frac{x+1}{0+1} = \frac{y-2}{3-2} \Longleftrightarrow x+1 = y-2 \Longleftrightarrow x-y+3 = 0$

2ος τρόπος: Αν εφαρμόσουμε τον τύπο με την ορίζουσα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -x+y-3 = 0 \Longleftrightarrow x-y+3 = 0$$

3ος τρόπος: Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση κάθε ευθείας έχει εξίσωση $y = \alpha x+\beta$. Είναι επομένως αρκετό να υπολογίσουμε τα α και β. Επειδή η ευθεία μας θα περνά από τα σημεία Α(-1,2), Β(0,3) θα την επαληθεύουν και επομένως θα έχουμε τις εξισώσεις:

$(2 = -\alpha+\beta$ και $3 = \beta) \Longleftrightarrow (\beta = 3$ και $\alpha = 1)$.

'Αρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση την $y = x+3 \Longleftrightarrow x-y+3 = 0$

4. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) που ορίζουν τα σημεία Α(10,3), Β(14,+7) με τον άξονα x'x και σε συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(10,3) και είναι κάθετη στην (ε).

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) που ορίζεται από δύο σημεία δίνεται από τον τύπο:

$\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{3-7}{10-14} = \frac{-4}{-4} = 1 \Longrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \omega = 45°$.

Εάν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της κάθετης στην (ε) απ' το σημείο A(10,3) θα έχουμε $\lambda\lambda_1 = -1 \rightarrow \lambda_1 = -1$ και η εξίσωση της θα είναι: $y-3 = -1(x-10) \leftrightarrow x+y-13 = 0$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(1,2) και από το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις x-y = 0 και 2x+y =1

Λύση: Θα βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών αν λύσουμε το σύστημα

$$\left.\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=1 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=y \\ 3y=1 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$$

Επομένως η ζητούμενη ευθεία θα διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, άρα η εξίσωση της θα είναι: $\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{y-2}{\frac{1}{3}-2} \leftrightarrow \frac{3x-3}{-2} = \frac{3y-6}{-5}$

$\leftrightarrow 15x-15 = 6y-12 \leftrightarrow 15x-6y-3 = 0 \leftrightarrow 5x-2y-1 = 0$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τους άξονες στα σημεία A(4,0) και B(0,-2) και σε συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλος με την AB

Λύση: Η εξίσωση μιας ευθείας επί την αρχή είναι $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$

Αρκεί να βρούμε τα α και β και επειδή θα περνά και από τα σημεία A(4,0) και B(0,-2) θα την επαληθεύουν. Άρα θα έχουμε για λύση το σύστημα: $(\frac{4}{\alpha} = 1 \wedge \frac{-2}{\beta} = 1) \leftrightarrow \alpha = 4 \wedge \beta = -2$.

Επομένως η εξίσωση είναι $x-2y = 4$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda = \frac{1}{2}$ επομένως η εξίσωση της ευθείας που θα περνά από το σημείο O(0,0) και θα είναι παράλληλη με την AB θα έχει εξίσωση $y-0 = \frac{1}{2}(x-0) \leftrightarrow y = \frac{x}{2}$.

7. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ, αν οι κορυφές του έχουν συντεταγμένες A(1,2), B(-2,3), Γ(0,4). Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του. Σε συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου AM όπου M το μέσο της ΒΓ και η εξίσωση του ύψους AH από την κορυφή A στην ΒΓ.

Λύση: Είναι: εξίσωση της AB = $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \leftrightarrow \frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-2}{3-2} \leftrightarrow \frac{x-1}{-3}$

$= y-2 \leftrightarrow x-1 = -3y+6 \leftrightarrow x+3y-7 = 0$

Εξίσωση της ΒΓ: $\frac{x-x_B}{x_Γ-x_B} = \frac{y-y_B}{y_Γ-y_B} \Leftrightarrow \frac{x+2}{0+2} = \frac{y-3}{4-3} \Leftrightarrow x+2 = 2y-6$

$\Leftrightarrow x-2y+8 = 0$.

Εξίσωση της ΑΓ: $\frac{x-x_A}{x_Γ-x_A} = \frac{y-y_A}{y_Γ-y_A} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-2}{4-2} \Leftrightarrow 1-x = \frac{y-2}{2}$

$\Leftrightarrow 2x+y-4 = 0$

Γνωρίζουμε ότι οι συντεταγμένες του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι γνωστές οι συντεταγμένες των άκρων του δίδονται από τους τύπους: $x_M = \frac{x_B+x_Γ}{2}$, $y_M = \frac{y_B+y_Γ}{2}$ όπου (x_B, y_B), $(x_Γ, y_Γ)$ οι συντεταγμένες των άκρων. Άρα οι συντεταγμένες του μέσου Μ είναι $M(-1, \frac{7}{2})$.

Επομένως η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ είναι: $\frac{x-x_A}{x_M-x_A} = \frac{y-y_A}{y_M-y_A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{\frac{7}{2}-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{2y-4}{3} \Leftrightarrow 3x-3 = -4y+8 \Leftrightarrow 3x+4y-11 = 0$

Το ύψος ΑΗ θα διέρχεται από το γνωστό σημείο Α(1,2) και θα είναι κάθετο στην ΒΓ αρκεί επομένως να βρούμε τον συντελεστή κλίσεως του. Έστω $λ_{AH}$ ο συντελεστής κλίσεως του ύψους τότε θα είναι $λ_{BΓ}λ_{AH} = -1$.

Επειδή δε $λ_{BΓ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow λ_{AH} = -2$.

Επομένως η εξίσωση του ύψους ΑΗ είναι: $y-2 = -2(x+1) \Leftrightarrow 2x+y \quad = 0$

8. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις $2y+(3λ-1)x+2μ = 0$ και $y-(4λ+3)x+4λ+1 = 0$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός λ έτσι ώστε:

i) Οι ευθείες να είναι παράλληλες.

ii) Να είναι κάθετες.

Λύση: i) Για να είναι παράλληλες οι ευθείες πρέπει να έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης και αν $λ_1$ και $λ_2$ είναι οι συντελεστές διεύθυνσης τους θα είναι $λ_1 = λ_2 \Leftrightarrow -\frac{3λ-1}{2} = 4λ+3 \Leftrightarrow 11λ = -5 \Leftrightarrow λ = -\frac{5}{11}$

ii) Για να είναι κάθετες πρέπει $λ_1λ_2 = -1 \Leftrightarrow -\frac{3λ-1}{2}(4λ+3) = -1$

$\Leftrightarrow (3λ-1)(4λ+3) = 2 \Leftrightarrow 12λ^2+5λ-5 = 0 \Leftrightarrow λ = \frac{-5\pm\sqrt{25+240}}{24} \Leftrightarrow$

$λ = \frac{-5+\sqrt{265}}{24}$ ή $λ = \frac{-5-\sqrt{265}}{24}$

9. Να αποδειχτεί ότι το τετράπλευρο με κορυφές Α(-1,-5), Β(2,1), Γ(1,5), Δ(-2,-1) είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: Για να είναι το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευ-

ρές του να έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{1+5}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$, $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{y_\Delta-y_\Gamma}{x_\Delta-x_\Gamma} = \frac{-1-5}{-2-1} = 2$ άρα ΑΒ // ΓΔ

Όμοια $\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B} = \frac{5-1}{1-2} = -4$, $\lambda_{\Delta A} = \frac{y_A-y_\Delta}{x_A-x_\Delta} = \frac{-5+1}{-1+2} = -4$ άρα ΒΓ // ΔΑ

Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

10. Δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(4,3), Β(0,1), Γ(-2,5) είναι ορθογώνιο.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης δύο πλευρών του έχουν γινόμενο -1.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{1-3}{0-4} = \frac{1}{2}$ και $\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A} = \frac{5-3}{-2-4} = -\frac{1}{3}$,

$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B} = \frac{5-1}{-2-0} = -2$. Άρα $\lambda_{AB}\lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{2}(-2) = -1$.

Επομένως η ΑΒ ⊥ ΒΓ και το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β.

11. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία Α(-3,4), Β(3,2), Γ(6,1) είναι στην ίδια ευθεία και να βρείτε την εξίσωσή της.
Σε συνέχεια να γράψετε την εξίσωση αυτή με την μορφή:
$y = \alpha x+\beta$ και $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

Λύση: Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ που είναι $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$\Leftrightarrow \frac{x+3}{3+3} = \frac{y-4}{2-4} \Leftrightarrow -2x-6 = 6y-24 \Leftrightarrow x+3y-9 = 0 \ (1)$

Θα πρέπει και το σημείο Γ(6,1) να βρίσκεται πάνω στην ΑΒ, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, πράγμα που ισχύει. Άρα τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Η (1) γράφεται: $3y = -x+9 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x+3 = \alpha x+\beta$ με $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = 3$.

Επίσης η (1) γράφεται αν διαιρέσουμε τα μέλη της με 9

$\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ με $\alpha = 9$, $\beta = 3$.

12. Δίνονται οι εξισώσεις i) $x^2+y^2 = 25$, ii) $x^2-y^2 = 15$, iii) $y^2 = 4x$. Να βρεθούν τα σημεία τους με τετμημένες 0,-4,-8.

Λύση: Για την (i) με $x = 0 \Rightarrow y = \pm 5$ με $x = -4 \Rightarrow y = \pm 3$, με $x = -8$ δεν υπάρχουν y. Επομένως τα σημεία είναι (0,5),(0,-5), (-4,3),(-4,-3)

Για την (ii) με $x = 0 \rightarrow$ δεν υπάρχουν y με $x = -4 \rightarrow y = \pm 1$ και με $x = -8 \rightarrow y = \pm 7$ και τα σημεία είναι: (-4,1),(-4,-1),(-8,7),(-8,-7).
Για την (iii) με $x = 0 \rightarrow y = 0$, με $x = -4$ και $x = -8$ δεν υπάρχουν y.
Άρα το σημείο είναι μόνο το (0,0).

13. Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραμμών με εξισώσεις:
$x^2+y^2 = 8$ και $x-y = 0$.

Λύση: Θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x-y = 0 \\ x^2+y^2 = 8 \end{array}\right| \longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y \\ 2x^2 = 8 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y \\ x^2 = 4 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{array}{l} x = y \\ x = \pm 2 \end{array}$$

Άρα τα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες (2,2), (-2,-2).

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2-y^2+\lambda x+(\lambda-1)y+\lambda = 0$ (1). Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η (1) να περνά
i) από το σημείο (0,0), ii) από το σημείο (-1,2).

Λύση: i) Θα πρέπει το (0,0) να επαληθεύει την (1) δηλ. $\lambda = 0$
ii) Θα πρέπει $(-1)^2-4-\lambda+2(\lambda-1)+\lambda = 0 \longleftrightarrow 2\lambda = 5 \longleftrightarrow \lambda = \frac{5}{2}$

15. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda-2)x+(\lambda-2)y+3\lambda-1 = 0$ (1). Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:
i) Η (1) να είναι παράλληλη με τον x'x.
ii) Η (1) να είναι παράλληλη με τον y'y.
iii) Η (1) να περνά από το σημείο (0,0).

Λύση: i) Για να είναι η (1) παράλληλη με τον x'x πρέπει y = σταθ.

$$\left|\begin{array}{c} \lambda^2-\lambda-2 = 0 \\ \wedge \\ \lambda-2 \neq 0 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \\ \wedge \\ \lambda \neq 2 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \lambda = -1$$

ii) Για να είναι η (1) παράλληλη με τον y'y πρέπει x = σταθ.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda-2 = 0 \\ \lambda^2-\lambda-2 \neq 0 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda \neq -1,2 \end{array}$$

Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) // y'y

iii) Για να περνά από την αρχή των αξόνων πρέπει
$(3\lambda-1 = 0$ και $\lambda^2-\lambda-2 \neq 0$ ή $\lambda-2 \neq 0) \longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

16. Δίνονται οι ευθείες: $\alpha x+(\alpha+1)y-2\alpha+3 = 0$, $(\alpha+1)x-y+3\alpha = 0$

Να βρεθεί ο α έτσι ώστε να είναι παράλληλες.

Λύση: Για να είναι παράλληλες πρέπει:

$\frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{-1} \neq \frac{3-2\alpha}{3\alpha}$ με $\alpha \neq -1,0$ $\leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}-\alpha = \alpha^2+2\alpha+1\\ \alpha \neq 0,-1\end{array}\right\} \leftrightarrow \alpha = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

Με $\alpha = -1$ οι εξισώσεις γίνονται: $\left.\begin{array}{l}-x+5 = 0\\ -y-3 = 0\end{array}\right\}$ που δεν είναι παράλληλες.

Όμοια και με $\alpha = 0$ δεν είναι παράλληλες.

ΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα σημεία τομής της $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1$ με τους άξονες.

Απ.: (0,3),(2,0)

2. Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραμμών

1. $\left.\begin{array}{l}y = 3x+2\\ x^2+y^2 = 4\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2 = 41\\ xy = 20\end{array}\right\}$

Απ.: 1: $(0,2),(-\frac{6}{5},-\frac{8}{5})$

2: $(\pm5,\pm4),(\pm4,\pm5)$

3. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2-2\lambda xy+\lambda y^2-\mu x+(\lambda+\mu)y+2\lambda+1 = 0$.

Να τέμνει τους άξονες στα σημεία O(0,0) και A(1,0).

Απ.: $(\lambda,\mu)=(-\frac{1}{2},1)$

4. Να βρεθεί η γωνία φ που σχηματίζουν με τον άξονα x'x οι ευθείες που ορίζονται από τα σημεία

i) A(4,8), B(-6,-3) και ii) A(5,-7), B(5,-2) και iii) Γ(7,3),Δ(7,-5)

5. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών στις εξής περιπτώσεις:

i) Περνούν από τα σημεία (-2,1) και (2,2)

ii) Περνούν από το σημείο (-3,-2) και είναι παράλληλες με την $y = x$.

iii) Περνούν από το σημείο (-4,0) και από το σημείο τομής των ευθειών $x-y = 0$ και $2x+3y = 1$.

iv) Περνούν από το σημείο (1,2) και έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{1}{2}$

v) Περνά από το σημείο (0,0) και είναι κάθετος στην ευθεία $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1$

6. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (-1,0) και

είναι κάθετη στην ευθεία $y+2 = -3(x+1)$.

7. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που περνούν από τις κορυφές $A(2,-1)$, $B(4,-5)$, $\Gamma(-3,4)$ τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές.

8. Για ποιά τιμή το $\kappa \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\kappa x+y+1 = 0$, $x+\kappa y+1 = 0$, $x+y+\kappa = 0$ περνούν από το ίδιο σημείο.

9. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(2,5)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\pi/4$.

10. Να βρεθούν τα μ,ν ώστε η ευθεία $(2\mu+\nu+1)x+(\mu+\nu-2)y+3\mu+\nu+2 = 0$ νάναι παράλληλη στον $x'x$ άξονα και να έχει τεταγμένη επί την αρχή 2.

Απ.: $(\mu,\nu) = (-5,9)$

11. Δείξετε ότι τα σημεία $A(\beta+\gamma,\alpha)$, $B(\alpha+\gamma,\beta)$, $\Gamma(\alpha+\beta,\gamma)$ είναι στην ίδια ευθεία.

12. Δείξετε ότι οι ευθείες $x\sqrt{3}+y\sqrt{2} = 2$, $x\sqrt{6}-3y = -3$ είναι κάθετες.

12α. Έστω τα σημεία $A(0,5)$ και $B(4,1)$ και η ευθεία $x-4y+7 = 0$ (ε). Να βρεθούν οι συντεταγμένες σημείου Γ της (ε) έτσι ώστε το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές (ΓΑ = ΓΒ).

13. Για ποιά τιμή των λ και μ οι ευθείες $\lambda x-2y-1 = 0$ και $6x-4y-\mu = 0$.
i) Τέμνονται, ii) είναι παράλληλες, iii) συμπίπτουν.

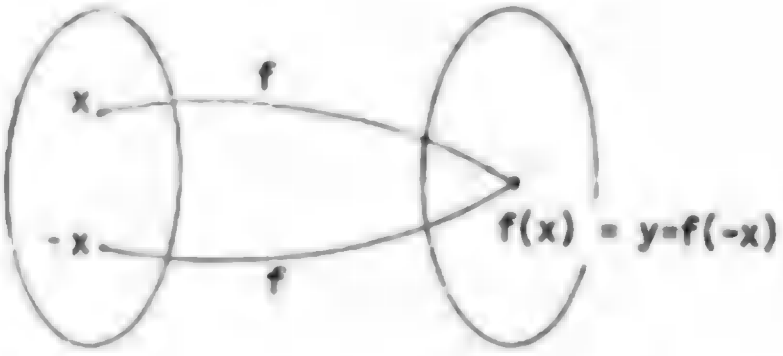
14. Δείξετε ότι τα σημεία $A(-6,-7)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

Αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης.

3.15. Άρτια συνάρτηση.

Ορισμός. Μια συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και $\mathcal{D}(f) = (-\alpha,\alpha)$ λέγεται άρτια στο $\mathcal{D}(f)$, τότε και μόνο τότε όταν $\forall\ x,-x \in \mathcal{D}(f)$ είναι $f(x) = f(-x)$

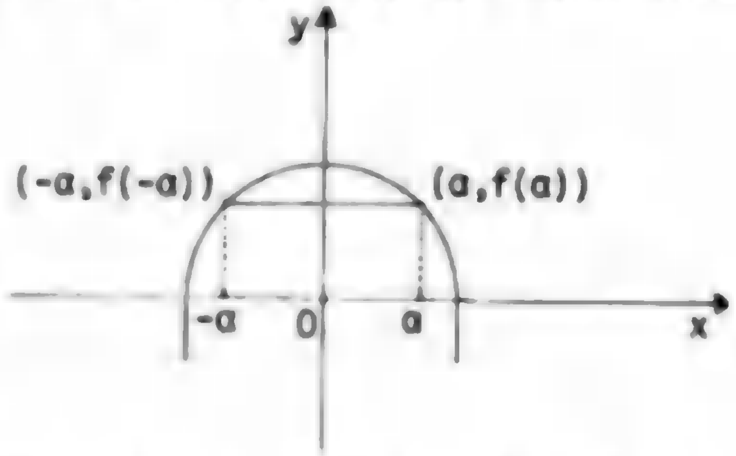
Δηλαδή: αντίθετα x μέσα από το $\mathcal{D}(f)$ αντιστοιχούνε στο ίδιο $y \in \mathcal{R}(f)$



Σημείωση:

1. Όταν μια συνάρτηση είναι άρτια το διάγραμμά της έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy'.

2. Ισχύει το θεώρημα η ευθεία $x = a \in \mathbb{R}$ είναι άξονας συμμετρίας του διαγράμματος της f τότε και μόνο τότε όταν $f(x) = f(2a-x)\ \forall\ x \in \mathcal{D}(f)$.



3. Για να είναι μια συνάρτηση άρτια πρέπει το $\mathcal{D}(f)$ να είναι ένα σύνολο της μορφής $(-a,a)$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες.

1. $f(x) = |x|+\sigma\upsilon\nu x$ 2. $g(x) = x^4-3x^2+4$

3. $h(x) = 4+\eta\mu(|x|+\frac{\pi}{4})$ 4. $\theta(x) = \sqrt[3]{|1-x|}+\sqrt[3]{|1+x|}$

Λύση: 1) Είναι $f(-x) = |-x|+\sigma\upsilon\nu(-x) = |x|+\sigma\upsilon\nu x = f(x)$.

2) Είναι $g(-x) = (-x)^4-3(-x)^2+4 = x^4-3x^2+4 = g(x)$

3) Είναι $h(-x) = 4+\eta\mu(|-x|+\frac{\pi}{4})=4+\eta\mu(|x|+\frac{\pi}{4}) = h(x)$

4) Έχουμε $\theta(-x) = \sqrt[3]{|1+x|}+\sqrt[3]{|1-x|} = \theta(x)$.

2. Δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες.

i) $f(x) = |x-2|+|x+2|$ ii) $f(x) = x^4+\sigma\upsilon\nu x$

iii) $f(x) = \log\frac{1-x^2}{1+x^2}$ iv) $f(x) = 3^x+3^{-x}+2$

Λύση: i) Η συνάρτηση έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ που είναι συμμετρικό διάστημα, άρα, μπορούμε να μιλάμε για άρτια συνάρτηση. Έχουμε τώρα για κάποιο $-x \in \mathcal{D}(f)$
$f(-x) = |-x-2|+|-x+2| = |-(x+2)|+|(x-2)| = |x+2|+|x-2| = f(x)$
Άρα η f είναι άρτια.

ii) Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ που είναι συμμετρικό διάστημα και με $-x \in \mathcal{D}(f)$ έχουμε: $f(-x) = (-x)^4 + συν(-x) = x^4 + συνx$ γιατί $συν(-x) = συνx$. Επομένως η f είναι άρτια.

iii) Η συνάρτηση έχει $\mathcal{D}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}: \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \right\}$ αλλά $\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ που είναι συμμετρικό διάστημα. Άρα με $-x \in \mathcal{D}(f)$ έχουμε:

$$f(-x) = \log \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \log \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$$ και η f είναι άρτια.

iv) Η συνάρτηση έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και με $-x \in \mathcal{D}(f)$ έχουμε $f(-x) = 3^{-x} + 3^{x} + 2 = f(x)$. Άρα είναι άρτια.

3. Δείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{x^2}συν3x$, είναι άρτια

Λύση: Πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$ διάστημα συμμετρικό. Είναι $f(-x) = e^{(-x)^2}συν(-3x) = e^{x^2}συν3x = f(x)$, επομένως η f είναι άρτια.

4. Εάν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι (1-1) τότε δείξετε ότι δεν είναι άρτια.

Λύση: Επειδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη ισχύει $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ και επομένως αν $x \in \mathcal{D}(f)$ και $-x \in \mathcal{D}(f)$ με $x \neq -x$ θα έπρεπε $f(x) \neq f(-x)$ αν η f ήταν άρτια που είναι άτοπο.
Άρα η f δεν είναι άρτια.

5. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι άρτια. Δείξετε ότι η συνάρτηση δεν είναι (1-1).

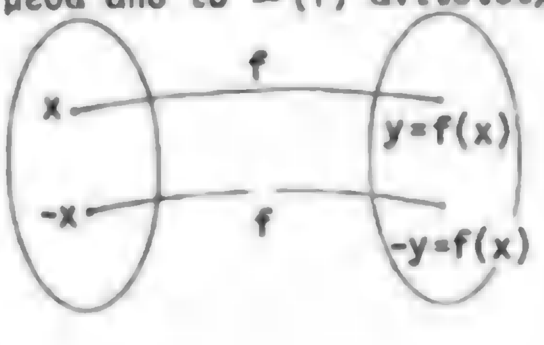
Λύση: Επειδή η f είναι άρτια ισχύει $\forall x, -x \in \mathcal{D}(f)$ με $x \neq -x \Rightarrow f(x) = f(-x)$. Επομένως η f δεν είναι (1-1).

3.16. Περιττή συνάρτηση.

Ορισμός: Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = (-α, α)$ λέγεται περιττή στο $\mathcal{D}(f)$, τότε και μόνο τότε όταν $\forall x, -x \in \mathcal{D}(f)$ είναι

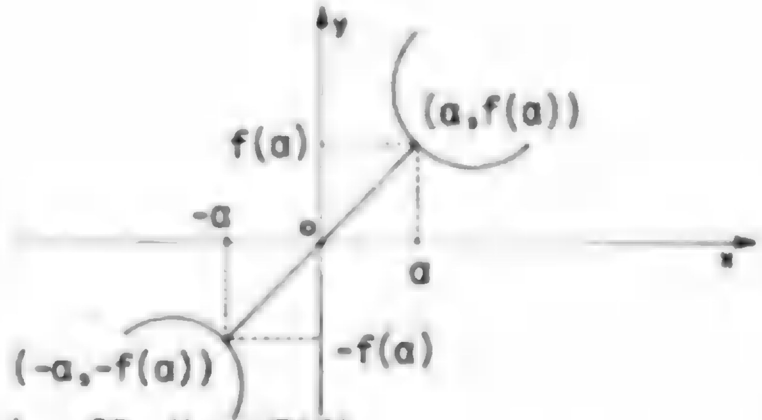
$$-f(x) = f(-x)$$

Δηλαδή: Αντίθετα x μεσα από το $\mathcal{D}(f)$ αντιστοιχίζονται σε αντίθετα $y \in \mathcal{R}(f)$.



Σημείωση:

1. Το διάγραμμα μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
2. Ισχύει το θεώρημα, ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ είναι κέντρο συμμετρίας του διαγράμματος της f, τότε και μόνο τότε όταν ισχύει: $f(x)+f(2\alpha-x) = 2\beta$, $\forall x\in\mathcal{D}(f)$.



3. Το $\mathcal{D}(f)$ για μια περιττή συνάρτηση πρέπει να είναι της μορφής $(-\alpha,\alpha)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές.

1. $f(x) = \eta\mu x+\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x}+x+x^3$
3. $h(x) = \dfrac{x^3+2}{\sqrt[3]{x^2}}$
4. $\varphi(x) = f(x)g(x)$ όπου f άρτια και g περιττή.

Λύση: 1. Είναι $f(-x) = \eta\mu(-x)+\varepsilon\varphi(-x)+\sigma\varphi(-x) = -\eta\mu x-\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x = -(\eta\mu x+\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x) = -f(x)$.

2. Είναι $g(-x) = \sqrt[3]{-x}-x+(-x)^3 = -\sqrt[3]{x}-x-x^3 = -(\sqrt[3]{x}+x+x^3) = -g(x)$.

3. Είναι $h(-x) = \dfrac{(-x)^3+2(-x)}{\sqrt[3]{(-x)^2}} = -\dfrac{x^3+2}{\sqrt[3]{x^2}} = -h(x)$

4. Είναι $\varphi(-x) = g(-x)f(-x) = -g(x)f(x) = -\varphi(x)$.

2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x))+x = 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (1)
Δείξετε ότι η f είναι περιττή.

Λύση: Η σχέση (1) για $f(x) = \omega$ γίνεται $f(\omega)+x = 0 \Leftrightarrow x = -f(\omega)$ (2)
και για $x = \omega$ γίνεται $f(f(\omega))+\omega = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} f(-x)+\omega = 0 \Rightarrow \omega = -f(-x)$ (3)
Από τις σχέσεις $\omega = f(x)$ και (3) έχουμε $f(x) = -f(-x)$.
Δηλαδή η f είναι περιττή.

3. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Δείξετε ότι η $\varphi(x)$ είναι άρτια και η $g(x)$ είναι περιττή.

Λύση: Πεδίο ορισμού της $\varphi(x)$, $g(x)$ είναι το ίδιο με την $f(x)$ που πρέπει να είναι συμμετρικό διάστημα.

Έχουμε: $\varphi(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \varphi(x)$ οπότε $\varphi(x)$ = άρτια.

Όμοια : $g(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -g(x)$ οπότε $g(x)$ = περιττή.

4. Εάν για μια συνάρτηση ισχύει $2f(x)+3f(-x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \ \forall \ x\in\mathbb{R}$ (1)

i) Δείξετε ότι είναι περιττή.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση: i) Αφού η (1) ισχύει $\forall \ x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει και για $x = -x\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε: $2f(-x)+3f(x) = 2\eta\mu(-x)\sigma\upsilon\nu(-x) \Rightarrow 2f(-x)+3f(x) = -2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ (2)
$\Rightarrow 2f(x)+3f(-x) = -2f(-x)-3f(x) \Leftrightarrow 5f(-x)+5f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$.
Δηλαδή η f περιττή.

ii) Από τις σχέσεις (1) και (2) απαλοίφουμε το $f(-x)$ και έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}4f(x)+6f(-x) &= 4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\\ -9f(x)-6f(-x) &= 6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\end{aligned}\right\} \Rightarrow -5f(x) = 10\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow f(x) = -\eta\mu 2x.$$

5. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους

i) $f(x) = \eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x$, ii) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{1,-1\}$.

Να γραφούν σαν άθροισμα μιας άρτιας f_α και μιας περιττής f_π συναρτήσεων.

Λύση: i) Γνωρίζουμε ότι κάθε συνάρτηση με τύπο $f_\alpha(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ είναι άρτια και με τύπο $f_\pi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ είναι περιττή.

Επομένως η άρτια για την (i) είναι:

$$f_\alpha(x) = \frac{\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x+\eta\mu(-2x)+\sigma\upsilon\nu(-x)+\varepsilon\varphi(-x)}{2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{2} = \sigma\upsilon\nu x$$

και η περιττή $f_\pi(x) = \frac{\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x-\eta\mu(-2x)-\sigma\upsilon\nu(-x)-\varepsilon\varphi(-x)}{2} = \frac{2(\eta\mu 2x+\varepsilon\varphi x)}{2}$

$= \eta\mu 2x+\varepsilon\varphi x$. Άρα $f(x) = f_\alpha(x)+f_\pi(x) = \sigma\upsilon\nu x+(\eta\mu 2x+\varepsilon\varphi x)$.

ii) Γι' αυτήν έχουμε: $f_\alpha(x) = \frac{\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}}{2} = \frac{2(1+x^2)}{2(1-x^2)} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ και

$$f_\pi(x) = \frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{2} = \frac{4x}{2(1-x^2)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

και ισχύει $f(x) = f_\alpha(x)+f_\pi(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}+\frac{2x}{1-x^2} = \frac{(1+x)^2}{1-x^2} = \frac{1+x}{1-x}$

6. Δείξετε ότι κάθε συνάρτηση f: [-a,a] → ℝ μπορεί να γραφεί με ένα και μόνο τρόπο, σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

Λύση: Έστω ότι ∀ $x \in [-a,a]$ είναι $f(x) = f_a(x)+f_\pi(x)$ (1) όπου $f_a(x)$ = = άρτια και $f_\pi(x)$ = περιττή.

Επειδή η (1) ισχύει ∀ $x \in [-a,a]$ θα ισχύει και για $-x \in [-a,a]$ οπότε έχουμε: $f(-x) = f_a(-x)+f_\pi(-x) \to f(-x) = f_a(x)-f_\pi(x)$ (2) επειδή $f_a(x)$ άρτια και $f_\pi(x)$ περιττή.

Θεωρούμε το σύστημα (Σ) των (1) και (2) ως προς $f_a(x)$ και $f_\pi(x)$.

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} f_a(x)+f_\pi(x) = f(x) \\ f_a(x)-f_\pi(x) = f(-x) \end{cases}$$

Επειδή είναι: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Άρα οι $f_a(x)$ και $f_\pi(x)$ είναι μοναδικές.

7. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{\kappa+\lambda\eta\mu x}{\mu+\nu\sigma\upsilon\nu x}$ με $\mu+\nu\sigma\upsilon\nu x \neq 0$

Δείξετε ότι η f είναι περιττή στο $[-a,a] \subseteq \mathcal{D}(f)$ όταν $\kappa = 0$.

Λύση: Για να είναι η f περιττή στο $[-a,a]$ πρέπει ∀ $x,-x \in [-a,a]$ να ισχύει: $f(-x) = -f(x) \leftrightarrow \dfrac{\kappa+\lambda\eta\mu(-x)}{\mu+\nu\sigma\upsilon\nu(-x)} = -\dfrac{\kappa+\lambda\eta\mu x}{\mu+\nu\sigma\upsilon\nu x} \leftrightarrow \dfrac{\kappa-\lambda\eta\mu x}{\mu+\nu\sigma\upsilon\nu x} = -\dfrac{\kappa+\lambda\eta\mu x}{\mu+\nu\sigma\upsilon\nu x}$

$\leftrightarrow \dfrac{1}{\mu+\nu\sigma\upsilon\nu x}(\kappa-\lambda\eta\mu x+\kappa+\lambda\eta\mu x) = 0 \leftrightarrow 2\kappa = 0 \leftrightarrow \kappa = 0.$

Άρα η f είναι περιττή στο $[-a,a] \subseteq \mathcal{D}(f)$ όταν $\kappa = 0$

8. Έστω η μη σταθερή συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ∀ $x,y \in \mathbb{R}$ (1). Δείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$, ii) $-f(x) = f(-x)$ ∀ $x \in \mathbb{R}-\{0\}$, iii) $f(\nu x) = \nu f(x)$ ∀ $\nu \in \mathbb{N}^*$

Λύση: i) Επειδή η (1) ισχύει ∀ $x,y \in \mathbb{R}$ θα ισχύει και για $x = y = 0$ οπότε $f(0) = f(0)+f(0) \to f(0) = 0$.

ii) Όμοια για $x = -y$ παίρνουμε: $f(0) = f(x)+f(-x) \to 0 = f(x)+f(-x)$ $\leftrightarrow -f(x) = f(-x)$ (Δηλαδή f περιττή).

iii) Εφαρμόζουμε την μέθοδο της επαγωγής με $\nu = 1$ είναι $f(x) = f(x)$ και ισχύει. Έστω ότι με $\nu = \kappa$, κ ορισμένος φυσικός ισχύει $f(\kappa x) = \kappa f(x)$ (2) θα δείξουμε ότι με $\nu = \kappa+1$ ισχύει: $f((\kappa+1)x) = (\kappa+1)f(x)$ (3)

Το πρώτο μέλος της (3) γράφεται:

$f(\kappa x+x) \overset{(1)}{=} f(\kappa x)+f(x) \overset{(2)}{=} \kappa f(x)+f(x) = (\kappa+1)f(x)$.

Δηλαδή η (3) ισχύει, επομένως η (iii) ισχύει ∀ $\nu \in \mathbb{N}$.

3.17. Περιοδική συνάρτηση.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f: A→B λέγεται περιοδική με περίοδο τον πραγματικό αριθμό ω διάφορο του μηδέν και ανεξάρτητο του x, τότε και μόνο τότε όταν ισχύει: $f(x+\omega) = f(x)\ \forall\ x, x+\omega \in A$.
Ο σταθερός πραγματικός αριθμός ω λέγεται **περίοδος** της f.

Πρόταση 1.

Αν η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο ω τότε και ο αριθμός κω με $\kappa\in \mathbb{Z}-\{0\}$ είναι επίσης περίοδος της f.

Απόδειξη: Είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\forall\ x\in\mathbb{R}$ και $\kappa\in \mathbb{Z}-\{0\}$ ισχύει $f(x+\omega) = f(x) \Rightarrow f(x+\kappa\omega) = f(x)$.

i) Αν $\kappa\in\mathbb{N}$ τότε με επαγωγή έχουμε:
Με κ = 1 είναι φανερό γιατί ισχύει $f(x+\omega) = f(x)$. Έστω ότι με κ = ν ισχύει $f(x+\nu\omega) = f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ (1). Και θα δείξουμε ότι ισχύει και για κ = = ν+1. Δηλαδή ότι: $f(x+(\nu+1)\omega) = f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.
Είναι όμως: $f(x+(\nu+1)\omega) = f(x+\nu\omega+\omega) = f((x+\omega)+\nu\omega) = f(x+\omega) = f(x)$ επομένως $f(x+\kappa\omega) = f(x)\ \forall\ \kappa\in\mathbb{N}$.

ii) Έστω $\kappa\in \mathbb{Z}^-$ τότε $-\kappa\in\mathbb{Z}^+$ δηλαδή $-\kappa\in\mathbb{N}$ και βάση της (i) έχουμε $f(x-\kappa\omega) = f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ και $-\kappa\in\mathbb{N}$ (2) και αν θέσουμε στην (2) όπου x = x+κω παίρνουμε: $f(x+\kappa\omega-\kappa\omega) = f(x+\kappa\omega)\ \forall\ \kappa\in \mathbb{Z}^- \Rightarrow f(x) = f(x+\kappa\omega)\ \forall\ \kappa\in\mathbb{Z}-\{0\}$.

Σημείωση: Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι μια περιοδική συνάρτηση είναι δυνατό να έχει άπειρες περιόδους.
Τον μικρότερο θετικό αριθμό ω για τον οποίο ισχύει $f(x+\omega) = f(x)\forall\ x\in\mathbb{R}$ τον ονομάζουμε **Βασική περίοδο** ή **πρώτη περίοδο** της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δείξετε ότι οι συναρτήσεις με τύπους:
1) f(x) = ημx 2) f(x) = συνx 3) f(x) = εφx 4) f(x) = σφx
είναι περιοδικές και να βρεθεί η πρώτη θετική περίοδος τους.

Λύση: 1) Για να είναι η f(x) = ημx περιοδική πρέπει να υπάρχει $\omega\in\mathbb{R}-\{0\}$ και ανεξάρτητος του x έτσι ώστε $f(x+\omega) = f(x)\ \forall\ x, x+\omega\in\mathcal{D}(f)$ (α)

$$\eta\ (\alpha) \Leftrightarrow \eta\mu(x+\omega) = \eta\mu x \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x+\omega = 2\kappa\pi+x,\ \kappa\in\mathbb{Z}\ \text{(i)} \\ \quad\quad \acute{\eta} \\ x+\omega = (2\kappa+1)\omega-x,\ \kappa\in\mathbb{Z}\ \text{(ii)} \end{array}\right.$$

Η (i) δίνει ω = 2κπ, $\kappa\in\mathbb{Z}$ (iii) και η (ii) δίνει ω = (2κ+1)π-2x, $\kappa\in\mathbb{Z}$

που δεν είναι δεχτή γιατί εξαρτάται από το x.
Η (iii) με $\kappa = 1$ δίνει την μικρότερη θετική περίοδο $\omega = 2\pi$.

2. Όμοια έχουμε $f(x+\omega) = f(x) \Longleftrightarrow$ συν$(x+\omega)$ = συν$x \Rightarrow x+\omega = 2\kappa\pi \pm x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\omega = 2\kappa\pi + x, \ \kappa \in \mathbb{Z} \\ \quad \text{ή} \\ x+\omega = 2\kappa\pi - x, \ \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Η πρώτη δίνει $\omega = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ που με $\kappa = 1$ παίρνουμε σαν ελάχιστη θετική περίοδο την $\omega = 2\pi$. Η δεύτερη δίνει $\omega = 2\kappa\pi - 2x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ που δεν είναι δεχτή γιατί εξαρτάται από το x.

3. Για να είναι η $f(x)$ = εφx περιοδική πρέπει $\forall\, x, x+\omega \in \mathcal{D}(f)$ να υπάρχει $\omega \in \mathbb{R}-\{0\}$ και ανεξάρτητο του x έτσι ώστε $f(x+\omega) = f(x) \Longleftrightarrow$ εφ$(x+\omega)$ = εφx $\Rightarrow x+\omega = \kappa\pi + x$, $\kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \omega = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ που με $\kappa = 1$ παίρνουμε $\omega = \pi$ (ελάχιστη θετική περίοδος).

4. Όμοια έχουμε σφ$(x+\omega)$ = σφ$(x) \Rightarrow x+\omega = \lambda\pi + x$, $\lambda \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \omega = \lambda\pi$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ που με $\lambda = 1$ παίρνουμε $\omega = \pi$ (ελάχιστη θετική περίοδος).

2. Δείξετε ότι οι συναρτήσεις με τύπους:
1. $f(x)$ = ημ^2x, 2) $f(x)$ = |ημx| είναι περιοδικές και να βρεθεί η μικρότερη θετική περίοδός τους.

Λύση: 1. Για να είναι περιοδική πρέπει να υπάρχει $\omega \in \mathbb{R}-\{0\}$ και ανεξάρτητος του x τέτοιος ώστε: $f(x+\omega) = f(x) \Longleftrightarrow$ ημ$^2(x+\omega)$ = ημ^2x
$\Longleftrightarrow$ (ημ$(x+\omega)$−ημx)(ημ$(x+\omega)$+ημx) = 0 $\Longleftrightarrow$ ημ$(x+\omega)$−ημx = 0 (α) ή ημ$(x+\omega)$+ημx = 0 (β).
Οι λύσεις της (α) δίνονται από τους τύπους $x+\omega = 2\kappa\pi + x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x+\omega = (2\kappa+1)\omega - x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Η πρώτη εξίσωση δίνει $x = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, ενώ η δεύτερη δεν δίνει λύση ανεξάρτητη του x.
Η (β) γράφεται ημ$(x+\omega)$ = ημ$(-x) \Rightarrow x+\omega = 2\kappa\pi - x$ ή $x+\omega = (2\kappa+1)\pi + x$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$, όπου η πρώτη δεν δίνει δεχτό ω γιατί εξαρτάται από το x ενώ η δεύτερη δίνει $\omega = (2\kappa+1)\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
Άρα η f είναι περιοδική με περίοδο κάθε αριθμό της μορφής $\omega = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}-\{0\}$ ή $\omega = (2\kappa+1)\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ (γ)
Από την (γ) η πρώτη με $\kappa = 1$ δίνει $\omega = 2\pi$ και η δεύτερη με $\kappa = 0$ δίνει $\omega = \pi$.
Επομένως η ελάχιστη θετική περίοδος είναι η $\omega = \pi$.

2. Όμοια η $f(x)$ = |ημx| γράφεται |ημ$(x+\omega)$| = |ημx| $\Longleftrightarrow$ ημ$(x+\omega)$ = ±ημx = ημ$(\pm x)$, και κάνουμε την παραπάνω εργασία.

Βρίσκουμε σαν ελάχιστη θετική περίοδο την $\omega = \pi$.

3. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q. \\ 1, & x \notin Q. \end{cases}$

Να εξεταστεί αν είναι περιοδική.

Λύση: Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο τον $\omega \in Q-\{0\}$ και ανεξάρτητο του x. Τότε $f(x+\omega) = f(x) = 0$ (1) αν $x \in Q$ και

$f(x+\omega) = f(x) = 1$ (2) αν $x \notin Q$

Αλλά στην (1) επειδή $x \in Q$ πρέπει και $x+\omega \in Q$ δηλαδή $\omega \in Q$.

Όμοια στην (2) επειδή $x \notin Q$ πρέπει $x+\omega \notin Q$ δηλαδή πρέπει ο ω να είναι ρητός. Άρα οι (1) και (2) ισχύουν $\forall\, \omega \in Q-\{0\}$.

Επομένως η f είναι περιοδική με περίοδο τον οποιοδήποτε ρητό διάφορο από το μηδέν.

Σημείωση: Η παραπάνω συνάρτηση δεν έχει αρχική περίοδο.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -\eta\mu x+5x$. Δείξετε ότι δεν είναι περιοδική.

Λύση: Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $\omega \in R-\{0\}$ και ανεξάρτητη του x τότε είναι: $f(x+\omega) = f(x) \Rightarrow -\eta\mu(x+\omega)+5(x+\omega) = -\eta\mu x+5x$

$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{5}\left[\eta\mu(x+\omega)-\eta\mu x\right]$ (i) $\forall\, x \in R$.

Η (i) για $x = 2\kappa\pi, \kappa \in Z$ γίνεται $\omega = \frac{1}{5}\eta\mu\omega$ (2)

και για $x = 2\kappa\pi+\pi, \kappa \in Z$ γίνεται $\omega = -\frac{1}{5}\eta\mu\omega$ (3)

Από τις (2) και (3) παίρνουμε με πρόσθεση $2\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$. Επομένως η f δεν είναι περιοδική.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

1. $f(x) = \eta\mu\pi x$ **2.** $g(x) = \eta\mu\frac{x}{\pi}$

Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές.

Λύση: 1. Αν ω είναι η περίοδος τότε θα έχουμε:

$f(x+\omega) = f(x) \Rightarrow \eta\mu\pi(x+\omega) = \eta\mu\pi x \Rightarrow \pi(x+\omega) = 2\kappa\pi+x$ ή $\pi(x+\omega) = (2\kappa+1)\pi-x$, $\kappa \in Z$ η πρώτη δίνει: $\omega = 2\kappa$, $\kappa \in Z$ και με $\kappa = 1$ παίρνουμε την βασική περίοδο που είναι $\omega = 2$.

Από την δεύτερη παίρνουμε $\omega = (2\kappa+1)-2x$ που δεν είναι περίοδος γιατί εξαρτάται από το x.

2. Αν T η περίοδος θα έχουμε: $f(x+T) = f(x) \rightarrow ημ\frac{x+T}{π} = ημ\frac{x}{π}$

$\rightarrow \frac{x+T}{π} = 2κπ + \frac{x}{π}$ ή $\frac{x+T}{π} = (2κ+1)π - \frac{x}{π}$, $κ \in Z$.

Η πρώτη δίνει: $T = 2κπ^2$ και με $κ = 1 \rightarrow T = 2π^2$.

Η δεύτερη δίνει $T = (2κ+1)π^2 - 2x$ που δεν είναι περίοδος γιατί εξαρτάται από το x.

3.18. Μονότονες συναρτήσεις.

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση $f: A \mapsto B$ με $y = f(x)$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 > x_2$ έπεται $f(x_1) > f(x_2)$.

Συμβολικά: f↑ στο A $\leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ορισμός: Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 > x_2$ έπεται $f(x_1) < f(x_2)$

Συμβολικά: f↓ στο A $\leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Ορισμός: Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι απλά αύξουσα στο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έπεται $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Συμβολικά: f↑ στο A $\leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

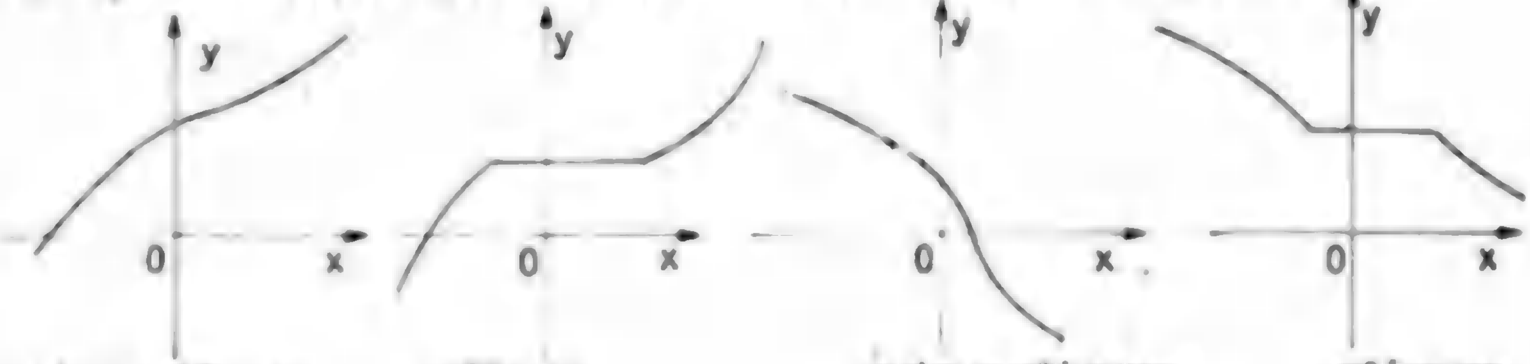
Ορισμός: Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι απλά φθίνουσα στο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έπεται $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Συμβολικά: f↓ στο A $\leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ορισμός: Αν μια συνάρτηση f είναι στο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα τότε λέγεται **γνήσια μονότονη στο A.**

Ορισμός: Αν μια συνάρτηση είναι στο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ απλά φθίνουσα ή αύξουσα λέγεται **Μονότονη στο A.**

Οι παραπάνω ορισμοί έχουν τις παρακάτω γεωμετρικές σκιαγραφήσεις



γνήσια αύξουσα   αύξουσα   γνήσια φθίνουσα   φθίνουσα

Παρατηρήσεις: 1. Αν μία συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα τότε είναι και απλά αύξουσα, το αντίστροφο δεν ισχύει και όμοια αν μια συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα τότε είναι και απλά φθίνουσα, το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$

είναι αύξουσα προφανώς αλλά δεν είναι γνήσια αύξουσα.

2. Αν μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη στο Α δεν μπορεί να είναι μια σταθερά.

3. Μια συνάρτηση f μπορεί να μην είναι μονότονη στο $\mathcal{D}(f)$ ενώ σε κάποιο υποσύνολο του $\mathcal{D}(f)$ να είναι μονότονη. Γιαυτό όταν λέμε ότι η f είναι μονότονη πρέπει η απάντηση να συνοδεύεται και με το διάστημα που αναφερόμαστε.

4. Σε μια μονότονη συνάρτηση μπορεί να υπάρχουν δύο τουλάχιστο σημεία με διαφορετικές τετμημένες και ίσες τεταγμένες.

Σχόλιο:

Για να μελετήσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της εφαρμόζουμε ένα από τους τρόπους:

1. Θεωρούμε δύο τυχαία x μέσα από το $\mathcal{D}(f)$ έστω τα x_1, x_2 με $x_1 > x_2$ και βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $\Delta = f(x_1) - f(x_2)$.

Τότε αν: $\Delta > 0 \rightarrow f\underline{\uparrow}$ και αν $\Delta \geq 0 \rightarrow f\uparrow$

$\Delta < 0 \rightarrow f\overline{\downarrow}$ και αν $\Delta \leq 0 \rightarrow f\downarrow$

2. Θεωρούμε το πηλίκο $\delta = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ με $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ και $x_1 \neq x_2$.

Τότε αν: $\delta > 0 \rightarrow f\underline{\uparrow}$ και αν $\delta \geq 0 \rightarrow f\uparrow$

$\delta < 0 \rightarrow f\overline{\downarrow}$ και αν $\delta \leq 0 \rightarrow f\downarrow$

3. Θεωρούμε το γινόμενο $\Gamma = (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2))$ με $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ και $x_1 \neq x_2$.

Τότε αν $\Gamma > 0 \rightarrow f\underline{\uparrow}$ και αν $\Gamma \geq 0 \rightarrow f\uparrow$

$\Gamma < 0 \rightarrow f\overline{\downarrow}$ και αν $\Gamma \leq 0 \rightarrow f\downarrow$

4. Θεωρούμε $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ και υποθέτουμε $x_1 < x_2$ ή $x_1 > x_2$ και με εφαρμογή της συνθετικής μεθόδου βρίσκουμε ποιά διάταξη πληρούνε τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

5. Αν μπορέσουμε να κάνουμε την γραφική παράσταση της f τότε η προβολή

αυτής στον άξονα xx' δίνει το $\mathcal{D}(f)$ της f. Οπότε στα διαστήματα εκείνα του $\mathcal{D}(f)$ που η γραφική της f είναι γραμμή ανερχόμενη από κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά η f είναι γνήσια αύξουσα σ'εκείνα που η γραφική της f είναι παράλληλη με τον άξονα xx' είναι σταθερή και σ' εκείνα που η γραφική παράσταση της f είναι γραμμή κατερχόμενη από άνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά, η f είναι γνήσια φθίνουσα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $\forall\, x_1,x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ και $f(x_1) \ge f(x_2)$ $\leftrightarrow$ $f(x_1) = f(x_2)$ και η f είναι σταθερή.

Λύση: Ευθύ. Έστω f σταθερή στο A τότε αν $x_1,x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2) = c$ οπότε ισχύει $(f(x_1) \le f(x_2)$ και $f(x_1) \ge f(x_2)) \rightarrow$ ότι η f είναι αύξουσα και f φθίνουσα στο A.

Αντίστροφο. Έστω $f\uparrow$ και $f\downarrow$ τότε $\forall\, x_1,x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ και $f(x_1) \ge f(x_2)$ οπότε $f(x_1) = f(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A$ και η f είναι σταθερά.

2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x+\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

Λύση: 1ος τρόπος. Θεωρούμε την διαφορά $\Delta = f(x_1)-f(x_2) = \alpha x_1+\beta-\alpha x_2-\beta = \alpha(x_1-x_2)$. Τότε $\forall\, x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 > x_2$ το πρόσημο της διαφοράς Δ εξαρτάται μόνο από τον α οπότε:

i) Αν $\alpha > 0 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

ii) Αν $\alpha < 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow f\downarrow$ στο $\mathbb{R}$

iii) Αν $\alpha = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow f = ct$ στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το πηλίκο $\delta = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{\alpha x_1+\beta-\alpha x_2-\beta}{x_1-x_2} = \alpha$

i) Αν $\alpha > 0 \rightarrow \delta > 0 \rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

ii) Αν $\alpha < 0 \rightarrow \delta < 0 \rightarrow f\downarrow$ στο $\mathbb{R}$

iii) Αν $\alpha = 0 \rightarrow \delta = 0 \rightarrow f = ct$ στο $\mathbb{R}$.

3ος τρόπος. Θεωρούμε το γινόμενο $\Gamma = (x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2)) = (x_1-x_2)(\alpha x_1+\beta-\alpha x_2-\beta) = \alpha(x_1-x_2)^2$ με $x_1 \neq x_2$.

Άρα το πρόσημο του Γ εξαρτάται μόνο από τον α οπότε:

i) με $\alpha > 0 \rightarrow \Gamma > 0 \rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

ii) με $\alpha < 0 \rightarrow \Gamma < 0 \rightarrow f\downarrow$ στο $\mathbb{R}$

iii) με $\alpha = 0 \rightarrow \Gamma = 0 \rightarrow f = ct$ στο $\mathbb{R}$.

4ος τρόπος. Θεωρούμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και έστω $x_1 > x_2 \overset{\alpha>0}{\longrightarrow} \alpha x_1 > \alpha x_2 \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow \alpha x_1+\beta > \alpha x_2+\beta \longleftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \longrightarrow f\Uparrow$ στο $\mathbb{R}$.
Εάν $\alpha < 0$ έχουμε με $x_1 > x_2 \longrightarrow \alpha x_1 < \alpha x_2 \longleftrightarrow \alpha x_1+\beta < \alpha x_2+\beta \longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$\longleftrightarrow f\Downarrow$ στο $\mathbb{R}$.
Εάν $\alpha = 0 \longrightarrow f(x_1) = f(x_2) = \beta$ και η f είναι σταθερή.

3. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3+x+2$.
Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

Λύση: 1ος τρόπος. Θεωρούμε την διαφορά $\Delta = f(x_1)-f(x_2) =$
$= 2x_1^3+x_1+2-2x_2^3-x_2-2 = 2(x_1^3-x_2^3)+(x_1-x_2) = 2(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(x_1-x_2) =$
$= (x_1-x_2)\left[2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+1\right] = (x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2+x_1^2+x_2^2+1\right].$
Αν επομένως $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 > x_2 \longrightarrow \Delta > 0 \longrightarrow f\Uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το πηλίκο $\delta = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} =$

$$= \frac{2x_1^3+x_1+2-2x_2^3-x_2-2}{x_1-x_2} = \frac{2(x_1^3-x_2^3)+(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1-x_2)(2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+1)}{x_1-x_2} =$$

$= (x_1+x_2)^2+x_1^2+x_2^2+1$ όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$.

Επειδή είναι $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\delta > 0 \longrightarrow f\Uparrow$.

3ος τρόπος. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 > x_2 \longrightarrow x_1^3 > x_2^3 \longrightarrow 2x_1^3 > 2x_2^3 \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow 2x_1^3+x_1 > 2x_2^3+x_2 \longrightarrow 2x_1^3+x_1+2 > 2x_2^3+x_2+2 \longleftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \longrightarrow f\Uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

4ος τρόπος. Θεωρούμε το γινόμενο $\Gamma = (x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2)) =$
$= (x_1-x_2)(2x_1^3+x_1+2-2x_2^3-x_2-2) = (x_1-x_2)\left[2(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(x_1-x_2)\right] =$
$= (x_1-x_2)^2\left[(x_1+x_2)^2+x_1^2+x_2^2+1\right]$ με $x_1 \neq x_2$, οπότε $f\Uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

4. Εάν οι συναρτήσεις f και φ είναι μονότονες επί του $A = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ τότε ισχύουν:

i) $f\uparrow$ και $\varphi\uparrow \longrightarrow f+\varphi\uparrow$
ii) $f\uparrow$ και $\varphi\Uparrow \longrightarrow f+\varphi\Uparrow$
iii) $f\downarrow$ και $\varphi\downarrow \longrightarrow f+\varphi\downarrow$
iv) $f\downarrow$ και $\varphi\Downarrow \longrightarrow f+\varphi\Downarrow$
v) $f\uparrow$ και $\varphi\downarrow \longrightarrow f+\varphi$ (;)

Λύση: i) Έχουμε, με $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow\varphi\uparrow}{\longrightarrow} f(x_1) \leq f(x_2)$ και $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in A$ και με πρόσθεση παίρνουμε $f(x_1)+\varphi(x_1) \leq f(x_2)+\varphi(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in A$
$\longrightarrow (f+\varphi)(x_1) \leq (f+\varphi)(x_2) \longrightarrow f+\varphi\uparrow$ στο A.

ii) Έχουμε με $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ και $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in A$ και με πρόσθεση παίρνουμε $f(x_1)+\varphi(x_1) < f(x_2)+\varphi(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in A$
$\longleftrightarrow (f+\varphi)(x_1) < (f+\varphi)(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in A \longrightarrow f+\varphi\Uparrow$ στο A.

iii) Έχουμε με $x_1 < x_2$ επειδή $f\downarrow$ και $\varphi\downarrow$ τις συνεπαγωγές $f(x_1) \geq f(x_2)$ και $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A$ και με πρόσθεση παίρνουμε $f(x_1)+\varphi(x_1) \geq f(x_2)+\varphi(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A$ $\Rightarrow (f+\varphi)(x_1) \geq (f+\varphi)(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A \Rightarrow f+\varphi\downarrow$ στο A.

iv) Έχουμε με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ και $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A$ και με πρόσθεση παίρνουμε $f(x_1)+\varphi(x_1) > f(x_2)+\varphi(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A$ $\Leftrightarrow (f+\varphi)(x_1) > (f+\varphi)(x_2)$, $\forall\, x_1,x_2 \in A \Rightarrow f+\varphi\Downarrow$ στο A.

v) Για την περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να δώσουμε απάντηση για το άθροισμα $f+\varphi$ γιατί π.χ αν $f(x) = 2x+5$ με $f\Uparrow$ και $\varphi(x) = -3x$ με $\varphi\Downarrow$ τότε $(f+\varphi)(x) = -x+5$ με $f+\varphi\Downarrow$ ενώ αν $\varphi(x) = -x$ με $\varphi\Downarrow$ τότε $(f+\varphi)(x) = x+5$ με $f+\varphi\Uparrow$.

5. Αν η f είναι μονότονη επί του $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε ισχύουν:

i) $f\uparrow$ επί του $A \Leftrightarrow -f\downarrow$ επί του A, ii) $f\Uparrow$ επί του $A \Leftrightarrow -f\Downarrow$ επί του A
iii) $f\downarrow$ επί του $A \Leftrightarrow -f\uparrow$ επί του A, iv) $f\Downarrow$ επί του $A \Leftrightarrow -f\Uparrow$ επί του A

Λύση: i) Έχουμε με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) \geq -f(x_2)$ $\Leftrightarrow (-f)(x_1) \geq (-f)(x_2)$, $\forall\, x_1,x_2 \in A \Rightarrow -f\downarrow$.
Όμοια εργαζόμαστε και για τις περιπτώσεις (ii), (iii), (iv).

6. Εάν η f είναι μονότονη συνάρτηση επί του $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ τότε ισχύουν:

i) Εάν $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ τότε η f και κf έχουν την ίδια μονοτονία επί του A
ii) Εάν $\kappa \in \mathbb{R}_-^*$ τότε η f και κf έχουν αντίθετη μονοτονία επί του A

Λύση: i) Έχουμε εάν $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow \kappa f(x_1) \leq \kappa f(x_2)$
$\Rightarrow (\kappa f)(x_1) \leq (\kappa f)(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A \Rightarrow \kappa f\uparrow$.
Όμοια αν $x_1 < x_2 \overset{f\Uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \kappa f(x_1) < \kappa f(x_2)$
$\Leftrightarrow (\kappa f)(x_1) < (\kappa f)(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A \Rightarrow \kappa f\Uparrow$.
Όμοια απόδειξη και όταν η f είναι $\downarrow$ αντίστοιχα $\Downarrow$.

ii) Έχουμε αν $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) \leq f(x_2) \overset{\kappa<0}{\Rightarrow} \kappa f(x_1) \geq \kappa f(x_2)$
$\Leftrightarrow (\kappa f)(x_1) \geq (\kappa f)(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A \Rightarrow \kappa f\downarrow$.
Όμοια αν $x_1 < x_2 \overset{f\Uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \overset{\kappa<0}{\Rightarrow} \kappa f(x_1) > \kappa f(x_2)$
$\Leftrightarrow (\kappa f)(x_1) > (\kappa f)(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2 \in A \Rightarrow \kappa f\Downarrow$.
Όμοια απόδειξη και όταν η f είναι $\downarrow$ αντίστοιχα $\Downarrow$.

Σημείωση: με $\kappa = 0$ τότε η κf είναι μια σταθερή συνάρτηση επί του A.

7. Εάν f είναι μια μονότονη συνάρτηση επί του $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ και είναι $f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in A$ τότε ισχύει:

Οι συναρτήσεις f και 1/f έχουν αντίθετη μονοτονία στο A.

Δηλ. αν $f\uparrow$ αντίστοιχα $\downarrow \longleftrightarrow \frac{1}{f}\downarrow$ αντίστοιχα $\uparrow$

και αν $f\Uparrow$ αντίστοιχα $\Downarrow \longleftrightarrow \frac{1}{f}\Downarrow$ αντίστοιχα $\Uparrow$

Λύση: Για την απόδειξη διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την f αν η $f(x) > 0 \ \forall \ x \in A$ και $f(x) < 0 \ \forall \ x \in A$.

i) Έστω $f(x) > 0 \ \forall \ x \in A$ τότε με $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow \frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)}$

$\rightarrow \frac{1}{f}(x_1) \geq \frac{1}{f}(x_2) \ \forall \ x_1, x_2 \in A \rightarrow \frac{1}{f}\downarrow$.

Αντίστροφα. Αν $x_1 < x_2 \overset{\frac{1}{f}\downarrow}{\longrightarrow} \frac{1}{f}(x_1) \geq \frac{1}{f}(x_2) \rightarrow \frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)} \rightarrow$

$f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow f\uparrow$.

Όμοια γίνεται και η απόδειξη και για την περίπτωση που η f είναι $\Uparrow$ ή γνήσια φθίνουσα.

ii) Έστω $f(x) < 0 \ \forall \ x \in A$ τότε με $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow}{\longrightarrow} f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow$

$\rightarrow -f(x_1) \geq -f(x_2) \rightarrow -\frac{1}{f(x_1)} \leq -\frac{1}{f(x_2)}$ (επειδή $-f(x_1), -f(x_2) > 0$)

$\rightarrow \frac{1}{f}(x_1) \geq \frac{1}{f}(x_2) \ \forall \ x_1, x_2 \in A \rightarrow \frac{1}{f}\downarrow$ στο A.

Αντίστροφο: Εάν $x_1 < x_2 \overset{\frac{1}{f}\downarrow}{\longrightarrow} \frac{1}{f}(x_1) \geq \frac{1}{f}(x_2) \rightarrow \frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)}$

$\rightarrow -\frac{1}{f(x_1)} \leq -\frac{1}{f(x_2)} \rightarrow -f(x_1) \leq -f(x_2) \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \rightarrow f\uparrow$ στο A.

Σημείωση: Η παραπάνω πρόταση ισχύει μόνο τότε που είναι $f(x) > 0 \ \forall \ x \in A$ ή $f(x) < 0 \ \forall x \in A$ και δεν εξασφαλίζεται μόνο από το μονότονο της f.

8. Εάν f μια μονότονη συνάρτηση επί του $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε ισχύει:

Οι συναρτήσεις f και $f \pm \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ έχουν την ίδια μονοτονία.

Λύση: Έστω $f\uparrow \rightarrow x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \longleftrightarrow f(x_1) \pm \kappa \geq f(x_2) \pm \kappa \longleftrightarrow f \pm \kappa\uparrow$.

Όμοια και για τις άλλες περιπτώσεις.

9. Εάν η f είναι μια μονότονη συνάρτηση επί του $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ και $f(x) > 0 \ \forall \ x \in A$ τότε ισχύει:

Οι συναρτήσεις f και f^2 ή f και $\sqrt{f}$ έχουν την ίδια μονοτονία.

Λύση: Θέτουμε $\varphi(x) = f^2(x)$ και κατασκευάζουμε το λόγο

$$\delta = \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\,(f(x_1)+f(x_2))$$

Αν τώρα $f\uparrow$ τότε $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0 \ \forall\ x_1,x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1)+f(x_2) > 0$

Επειδή $f(x_1), f(x_2) > 0\ \forall\ x \in A$ οπότε είναι $\delta \geq 0 \rightarrow \varphi\uparrow \rightarrow f^2\uparrow$.

Όμοια και όταν $f\Uparrow$ ή $\downarrow$ ή $\Downarrow$.

Για το δεύτερο θέτουμε: $\varphi(x) = \sqrt{f(x)}$ και κατασκευάζουμε τον λόγο

$$\delta = \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\sqrt{f(x_1)}-\sqrt{f(x_2)}}{x_1-x_2} = \frac{(\sqrt{f(x_1)}-\sqrt{f(x_2)})(\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)})}{(x_1-x_2)(\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)})} =$$

$$= \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}$$

Και αν $f\uparrow$ τότε $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0\ \forall\ x_1,x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και $\frac{1}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}} > 0$

γιατί $f(x_1), f(x_2) > 0\ \forall\ x_1,x_2 \in A$. Οπότε $\delta \geq 0 \rightarrow \varphi\uparrow \rightarrow \sqrt{f}\uparrow$ στο A.

Όμοια απόδειξη και στις περιπτώσεις $f\Uparrow$ ή $\downarrow$ ή $\Downarrow$.

10. Εάν f και g είναι δύο συναρτήσεις μονότονες επί του $A \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ τότε με $f(x) > 0$ και $g(x) > 0\ \ \forall x \in A$

Ισχύουν: α) $f\uparrow$ και $g\uparrow \rightarrow fg\uparrow$

β) $f\downarrow$ και $g\downarrow \rightarrow fg\downarrow$

γ) $f\Uparrow$ και $g\uparrow \rightarrow fg\Uparrow$

δ) $f\downarrow$ και $g\Downarrow \rightarrow fg\Downarrow$

Λύση: 1ος τρόπος. α) Αν $x_1 < x_2 \rightarrow \begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) \\ g(x_1) \leq g(x_2) \end{cases} \rightarrow f(x_1)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_2)$

$\leftrightarrow (fg)(x_1) \leq (fg)(x_2)\ \forall\ x_1,x_2 \in A \rightarrow fg\uparrow$ στο A.

(Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ανισότητες κατά μέλη όταν δύο διαγώνια μέλη είναι θετικά, και η ανισότητα που προκύπτει έχει την ίδια φορά με τις αρχικές).

2ος τρόπος: Θέτουμε: $\varphi(x) = f(x)g(x)$ και σχηματίζουμε το πηλίκο

$$\delta = \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)}{x_1-x_2} =$$

$$= \frac{f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)+f(x_1)g(x_2)-f(x_1)g(x_2)}{x_1-x_2} = f(x_1)\,\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} +$$

$$+g(x_2)\,\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f(x_1)\delta_1+g(x_2)\delta_2 \quad (1)$$ όπου $\delta_1 = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$,

$\delta_2 = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

Επειδή είναι $f\uparrow$ και $g\uparrow \rightarrow \delta_1 \geq 0$ και $\delta_2 \geq 0$ και επειδή ακόμη $f(x_1) > 0$ και $g(x_2) > 0\ \forall\ x_1,x_2 \in A$ έχουμε από την (1) ότι $\delta \geq 0 \rightarrow \varphi\uparrow \rightarrow fg\uparrow$ στο A.

β) **1ος τρόπος:** Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) \\ g(x_1) \geq g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1)g(x_1) \geq f(x_2)g(x_2)$

$\Leftrightarrow (fg)(x_1) \geq (fg)(x_2)\ \forall\ x_1, x_2 \in A \Rightarrow fg\downarrow$ στο Α.

2ος τρόπος. Από την παραπάνω σχέση $\delta = f(x_1)\delta_1 + g(x_2)\delta_2$ επειδή $\delta_1 \leq 0$, $\delta_2 \leq 0$ και $f(x_1) > 0$ και $g(x_2) > 0\ \forall\ x_1, x_2 \in A$ είναι $\delta \leq 0 \Rightarrow \varphi\downarrow \Rightarrow fg\downarrow$ στο Α.

γ) **1ος τρόπος.** Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) \leq g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2)$

$\Rightarrow (fg)(x_1) < (fg)(x_2)\ \forall\ x_1, x_2 \in A \Rightarrow fg\uparrow$ στο Α.

2ος τρόπος. Όμοια από την σχέση $\delta = f(x_1)\delta_1 + g(x_2)\delta_2$ επειδή $f(x_1), g(x_2) > 0\ \forall\ x_1, x_2 \in A$ και $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 > 0$ έχουμε $\delta > 0 \Rightarrow \varphi\uparrow \Rightarrow fg\uparrow$.

δ) Εάν εργαστούμε όπως με τους παραπάνω τρόπους βρίσκουμε ότι η $fg\uparrow$.

11. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\kappa > 0$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f στο $\mathbb{R}$.

ii) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα το $\mathbb{R}$.

Λύση: 1ος τρόπος. Θεωρούμε την διαφορά $\Delta = f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 + \kappa x_1 + \lambda - x_2^3 - \kappa x_2 - \lambda = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \kappa(x_1 - x_2)) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \kappa)$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 > x_2$ οπότε είναι $\Delta > 0$ γιατί $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \kappa = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2\kappa\right] > 0\ \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το πηλίκο $\delta = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^3 + \kappa x_1 + \lambda - x_2^3 - \kappa x_2 - \lambda}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + \kappa(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \kappa = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2\kappa\right] > 0$

$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$. Επομένως είναι $\delta > 0 \Rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ με συντελεστές του $x \in \mathbb{R}$ είναι περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα. Δεν μπορεί όμως να έχει δύο γιατί τότε αν x_1, x_2 ρίζες της με $x_1 \neq x_2$ θα είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ οπότε ο λόγος $\delta = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$ και η f θα ήταν σταθερή στο $\mathbb{R}$ που είναι άτοπο, γιατί η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$ τότε η γραφική της παράσταση συναντά τον άξονα xx' σε ένα μόνο σημείο που είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

3.19. Μια συνέπεια της μονοτονίας.

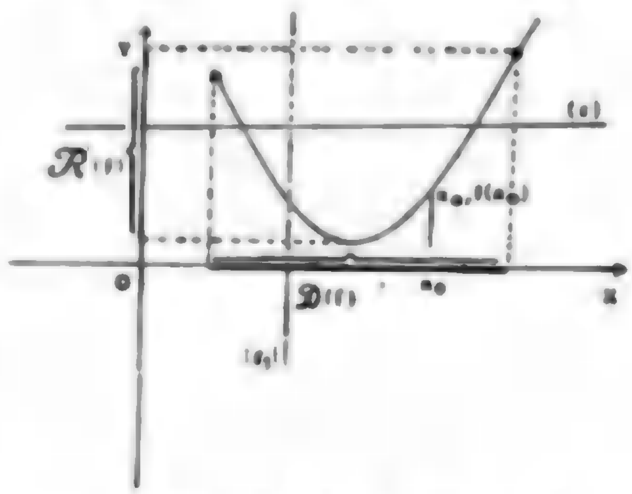
Θεώρημα: Κάθε γνήσια μονότονη συνάρτηση είναι (1-1).

Απόδειξη: Για να η f (1-1) πρέπει $\forall\ x_1,x_2 \in \mathcal{D}(f)$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Αν επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα τότε με $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ δηλαδή με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Αν δε η f είναι γνήσια φθίνουσα τότε με $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ δηλ. με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
'Αρα η f σε κάθε περίπτωση είναι (1-1).

3.20. Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f: A \to B$ με τύπο $y = f(x)$ της οποίας το γράφημα είναι: $G_f = \{(x,f(x)): x \in A\} \subseteq A \times B$.
Τα στοιχεία του G είναι ζευγάρια πραγματικών αριθμών και είναι δυνατόν να παρασταθούν σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy.
Το σύνολο των σημείων του G_f μας δίνει τη γραφική παράσταση της f ή το διάγραμμα της f.



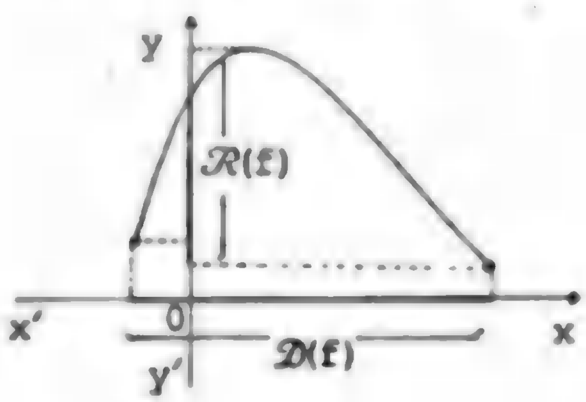
Σημείωση:
i) Η προβολή του διαγράμματος της f πάνω στον άξονα yy' δίνει το σύνολο τιμών $\mathcal{R}(f)$ της f και η προβολή του διαγράμματος της f πάνω στον xx' δίνει το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f)$ της f.
ii) Κάθε ευθεία (ε_1) παράλληλη προς τον άξονα yy' τέμνει το διάγραμμα της f το πολύ σε ένα σημείο.
Ενώ κάθε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον xx' τέμνει το διάγραμμα της f τουλάχιστο σε ένα σημείο.
iii) Για να βρούμε τα σημεία τομής του διαγράμματος της f με τον άξονα xx' αν υπάρχουν μηδενίζουμε το y της εξίσωσης $y = f(x)$.
Ενώ για να βρούμε που το διάγραμμα τέμνει τον yy' θέτουμε στον τύπο της f όπου $x = 0$.
Εάν το διάγραμμα της f τέμνει τον άξονα xx' τότε οι τετμημένες των σημείων τομής θα είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

3.21. Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης.

Η εύρεση του συνόλου τιμών $\mathcal{R}(f)$ μιας συνάρτησης $f: A \to B$ με τύπο $y = f(x)$ παρουσιάζει πολλές δυσκολίες και δεν είναι πάντα δυνατή. Βασικά εξαρτάται κάθε φορά από τον τύπο της f.

Σχόλιο.

Επειδή $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R}: y = f(x)\}$ λύνουμε τον τύπο της f ως προς x αν είναι δυνατό και βρίσκουμε για ποιά $y \in \mathbb{R}$ έχει νόημα η παράσταση που θα προκύψει.
Ακόμη αν έχουμε βρεί το $\mathcal{D}(f)$ τότε επειδή το $x \in \mathcal{D}(f)$ βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του $y \in \mathbb{R}$ κάνοντας κατάλληλες πράξεις.
Επίσης αν έχουμε κάνει την παραστατική γραμμή (γράφημα) της f τότε η προβολή της γραμμής στον άξονα yy' μας δίνει το $\mathcal{R}(f)$ και αντίστοιχα, η προβολή της παραστατικής γραμμής στον xx' μας δίνει το $\mathcal{D}(f)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ένας ακόμη τρόπος με τον οποίο βρίσκουμε το $\mathcal{R}(f)$ είναι από τον πίνακα μεταβολών μιας συνάρτησης αλλά με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο $\mathcal{D}(f)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = 2x+5$ (1).

Λύση: Επειδή το $\mathcal{D}(f) = [-1,1] \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ λύνουμε την (1) ως προς x και έχουμε $x = \frac{y-5}{2}$ οπότε πρέπει $\frac{y-5}{2} \in \mathcal{D}(f) \Leftrightarrow -1 \le \frac{y-5}{2} \le 1$ $\Leftrightarrow -2 \le y-5 \le 2 \Leftrightarrow 3 \le y \le 7 \Leftrightarrow \mathcal{R}(f) = [3,7]$. Επομένως σύνολο τιμών της f είναι το $\mathcal{R}(f) = [3,7]$.

2. Να βρεθεί το σύνολο ορισμού και τιμών της συνάρτησης με τύπο

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Λύση: Επειδή η συνάρτηση είναι κλασματική έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}: |x|+1 = 0\} \to \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ γιατί $|x|+1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών γράφουμε την f χωρίς απόλυτα, για το λόγο αυτό βρίσκουμε την ρίζα του απόλυτου που είναι $x = 0$ την θέτουμε στον άξονα των πραγματικών αριθμών $-\infty \quad 0 \quad +\infty$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

i) Αν $x \geq 0 \rightarrow y = f(x) = \frac{x}{1+x}$

ii) Αν $x < 0 \rightarrow y = f(x) = \frac{x}{1-x}$

Και η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{αν } x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Αν τώρα μια συνάρτηση έχει πολλαπλό τύπο ή μπορεί να γραφτεί με πολλαπλό τύπο τότε για να βρούμε το σύνολο τιμών της εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε κάθε κλάδο ξεχωριστά και τον λύνουμε ως προς x, σε συνέχεια απαιτούμε το x να πληροί τον δοσμένο περιορισμό τον αντίστοιχο στον κλάδο αυτό.

Άρα και η παράσταση ως προς y και ίση με το x θα πληροί τον περιορισμό αυτό απ'όπου μετά από πράξεις βρίσκουμε σε ποιό διάστημα βρίσκεται ο y. Τα διαστήματα του y, που βρίσκουμε σε κάθε περίπτωση τα ενώνουμε και η ένωση των διαστημάτων είναι το $\mathcal{R}(f)$.

Έστω λοιπόν $y = \frac{x}{1+x} \leftrightarrow y+xy = x \leftrightarrow x(1-y) = y \leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$, $y \neq 1$ και

επειδή $x \geq 0 \rightarrow \frac{y}{1-y} \geq 0,\ y \neq 1 \rightarrow y(1-y) \geq 0,\ y \neq 1 \rightarrow 0 \leq y \leq 1,\ y \neq 1$

$\rightarrow 0 \leq y < 1 \rightarrow \mathcal{R}_1(f) = [0,1)$

Όμοια αν $y = \frac{x}{1-x} \rightarrow y-xy = x \rightarrow x(y+1) = y \rightarrow x = \frac{y}{1+y}$, $y \neq -1$ και επειδή $x < 0 \rightarrow \frac{y}{1+y} < 0,\ y \neq -1 \rightarrow y(1+y) < 0,\ y \neq -1 \rightarrow -1 < y < 0$

$\mathcal{R}_2(f) = (-1,0)$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}_1(f) \cup \mathcal{R}_2(f) = (-1,0) \cup [0,1) = (-1,1)$.

3. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

Να βρεθούν τα $\mathcal{D}(f)$ και $\mathcal{R}(f)$.

Λύση: Επειδή η συνάρτηση είναι ρητή είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}: x-2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$.

Για το σύνολο τιμών λύνουμε ως προς y την εξίσωση $y = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow xy-2y =$

$= x-1 \Rightarrow x(y-1) = 2y-1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-1},\ y \neq 1.$

Επειδή η νέα ισότητα είναι ρητής μορφής ο y μπορεί να πάρει κάθε πραγματική τιμή εκτός της $y = 1$. Άρα $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}-\{y\in\mathbb{R}:\ y-1 = 0\}$

$\Rightarrow \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}-\{1\}$.

Ακόμη πρέπει $x \neq 2 \Leftrightarrow \frac{2y-1}{y-1} \neq 2 \Rightarrow 2y-1 \neq 2y-2 \Leftrightarrow -1 \neq -2$ που ισχύει $\forall\ y\in\mathbb{R}$. Επομένως σύνολο τιμών της f είναι $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}-\{1\}$.

4. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f:\ [3,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x-\sqrt{x^2-6x+9}$.

Λύση: Αν ο τύπος της f λυθεί ως προς x έχουμε: $y = x-\sqrt{(x-3)^2}$

$\Leftrightarrow |x-3| = x-y$ και επειδή $x \geq 3 \Rightarrow x-3 = x-y \Rightarrow y = 3$.

Άρα $\mathcal{R}(f) = \{3\}$.

5. Έστω η συνάρτηση $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών $\mathcal{R}(f)$ αυτής.

Λύση: Επειδή η f είναι πολυωνυμική είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Για να βρούμε το $\mathcal{R}(f)$ λύνουμε ως προς x τον τύπο της f και έχουμε:

$y = \alpha x^2+\beta x+\gamma,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma-y = 0,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha(\gamma-y) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4\alpha y \geq 4\alpha\gamma-\beta^2$.

i) Αν $\alpha > 0 \Rightarrow y \geq \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ οπότε $\mathcal{R}_1(f) = \left[\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha},+\infty\right)$

ii) Αν $\alpha < 0 \Rightarrow y \leq \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ οπότε $\mathcal{R}_2(f) = \left(-\infty,\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\right]$

Επομένως η συνάρτηση (δευτεροβάθμιο τριώνυμο) έχει σύνολο τιμών το

$\mathcal{R}_1(f) = \left[\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha},+\infty\right)$ αν $\alpha > 0$ και το $\mathcal{R}_2(f) = \left(-\infty,\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\right]$ αν $\alpha < 0$.

6. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $y = \frac{x^2+2x-1}{x^2+x+1}$

Λύση: Η συνάρτηση είναι ρητή άρα $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+x+1 = 0\}$, αλλά $x^2+x+1 \neq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ επομένως $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$y = \frac{x^2+2x-1}{x^2+x+1} \Leftrightarrow x^2y+xy+y = x^2+2x-1 \Leftrightarrow (y-1)x^2+(y-2)x+y+1 = 0$ με

$x\in\mathbb{R}$ (1) $\Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y-2)^2-4(y-1)(y+1) \geq 0 \Rightarrow y^2-4y+4-4y^2+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow -3y^2-4y+8 \geq 0 \Rightarrow 3y^2+4y-8 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2-2\sqrt{7}}{3} \leq y \leq \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}$

Η (1) όμως για $y = 1$ γίνεται $-x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ επομένως υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο η f παίρνει την τιμή 1 άρα το $1 \in \mathcal{R}(f)$ και επειδή $1 \leq \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}$ έχουμε: $\mathcal{R}(f) = \left[\frac{-2-2\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right]$

7. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο: $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$

Λύση: Η συνάρτηση είναι ρητή άρα το $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{x \in \mathbb{R}: x^2+x-12 = 0\} = \mathbb{R}-\{3,-4\}$.

Η f γράφεται: $y = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x+3}{x+4}$ με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{3,-4\}$.

Θα βρούμε τώρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $y = \frac{x+3}{x+4} \Rightarrow xy+4y = x+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(y-1) = 3-4y \Rightarrow x = \frac{3-4y}{y-1}, \; y \neq 1$ (1).

Επομένως για να υπάρχει $x \in \mathbb{R}-\{3,-4\}$ που να επαληθεύει την (1) πρέπει και αρκεί $y-1 \neq 0$ και το $x \neq 3$ και $x \neq -4$.

Δηλαδή $x = \frac{3-4y}{y-1} \neq 3, \; \frac{3-4y}{y-1} \neq -4$.

Οπότε $\mathcal{R}(f) = \; y \in \mathbb{R}: y \neq 1, \frac{3-4y}{y-1} \neq 3, \frac{3-4y}{y-1} \neq -4 \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}-\{1, \frac{6}{7}\}$

Επίσης θα μπορούσαμε από την (1) με $x = 3$ να βρούμε τα y και αν ήταν στοιχεία του $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}-\{1\}$ να τα εξαιρούσαμε απόαυτό.

Αλλά με $x = 3 \Rightarrow 3 = \frac{3-4y}{y-1} \Rightarrow 3y-3 = 3-4y \Leftrightarrow 7y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{7} \in \mathcal{R}(f)$

Οπότε $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}-\{1, \frac{7}{6}\}$.

8. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $y = f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, **αφού πρώτα γραφεί με απλούστερη μορφή.**

Λύση: Πρέπει: $x-1 \geq 0$ και $x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x \geq 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x^2 \geq 4(x-1) \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge (x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow \mathcal{D}(f) = [1,+\infty)$

Γνωρίζουμε ότι ένα ριζικό (διπλό) της μορφής $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ τότε και μόνο τότε όταν $A \geq 0$ και $A^2-B = \Gamma^2$ οπότε:

$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+|\Gamma|}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-|\Gamma|}{2}}$

Για αυτό το πρόβλημα είναι $A = x \geq 0$ και $A^2-B = x^2-4(x-1) = (x-2)^2 = \Gamma^2$ με $\Gamma = x-2$.

Άρα η f γράφεται: $f(x) = \sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}} + \sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}} - \sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}} + \sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}} \Rightarrow$

$\to f(x) = 2\sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}}$

και επειδή υπάρχουν απόλυτα με ρίζα την $x = 2$ έχουμε:

i) $x \ge 2 \to f(x) = 2$

ii) $1 \le x < 2 \to f(x) = 2\sqrt{x-1}$

και η f έχει τον πολλαπλό τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{αν } x \ge 2 \\ 2\sqrt{x-1} & \text{αν } 1 \le x < 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Με την μορφή (1) έχουμε:

α) $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ x \ge 2 \to y = 2$

β) $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ 1 \le x < 2$ έχουμε $y = 2\sqrt{x-1} \leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = 4(x-1) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = \frac{4+y^2}{4} \end{cases}$

οπότε πρέπει $\begin{cases} 1 \le \frac{4+y^2}{4} < 2 \\ y \ge 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 4 \le 4+y^2 < 8 \\ y \ge 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y^2 < 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+2) < 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -2 < y < 2 \\ y \ge 0 \end{cases} \to 0 \le y < 2$

Άρα $\mathcal{R}(f) = [0,2) \cup \{2\} = [0,2]$.

9. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων με τύπους: 1. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4}$

2. $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}$

3. $f(x) = |2x-1| + |x-2|$

Λύση: 1) Πεδίο ορισμού θα είναι τα $x \in \mathbb{R}$: $x^2+3x+4 \ge 0$ και επειδή $\Delta = 9-16 < 0$ έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Για το σύνολο τιμών $\mathcal{R}(f)$ έχουμε: $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}: \exists\, x \in \mathbb{R}$ με $y = \sqrt{x^2+3x+4}\}$

$\to y = \sqrt{x^2+3x+4} \leftrightarrow y \ge 0 \wedge y^2 = x^2+3x+4 \leftrightarrow y \ge 0 \wedge x^2+3x+4-y^2 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow y \ge 0 \wedge \Delta \ge 0 \leftrightarrow y \ge 0 \wedge 9-4(4-y^2) \ge 0 \leftrightarrow y \ge 0 \wedge 9-16+4y^2 \ge 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow y \ge 0 \wedge 4y^2-7 \ge 0 \leftrightarrow y \ge 0 \wedge (2y-\sqrt{7})(2y+\sqrt{7}) \ge 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow y \ge 0 \wedge y \ge \frac{\sqrt{7}}{2} \vee y \le -\frac{\sqrt{7}}{2} \leftrightarrow \mathcal{R}(f) = [\frac{\sqrt{7}}{2}, +\infty)$.

2. Για το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f)$ έχουμε ότι πρέπει $1+x \ge 0 \leftrightarrow x \ge -1 \to$ $\to \mathcal{D}(f) = [-1,+\infty)$. Για το σύνολο τιμών $\mathcal{R}(f)$ έχουμε:

$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}: \exists\, x \in \mathbb{R}$ με $y = \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\}$. Αλλά $y = \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} \to$

$\to y = \frac{x(1-\sqrt{1+x})}{(1+\sqrt{1+x})(1-\sqrt{1+x})} \to y = \frac{x-x\sqrt{1+x}}{1-1-x} \to y = \sqrt{1+x}-1$ με $x \ne 0$

Με $x = 0 \rightarrow y = 0 \in \mathscr{R}(f)$ (1).

Αρκεί τώχα να βρούμε και τα $y \in \mathbb{R}$ με $y = \sqrt{1+x}-1$ και για τα οποία είναι $x \geq -1$. Έχουμε: $y = \sqrt{1+x}-1 \leftrightarrow y+1 = \sqrt{1+x} \leftrightarrow \{y+1 \geq 0, (y+1)^2 = 1+x\} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \{y \geq -1, y^2+2y = x\} \leftrightarrow \{y \geq -1, y^2+2y \geq -1\} \leftrightarrow \{y \geq -1, (y+1)^2 \geq 0\} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \{y \geq -1, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow y \geq -1$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\mathscr{R}(f) = [-1, +\infty)$

3. Ρίζες των απολύτων είναι $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, οπότε ο άξονας $\mathbb{R}$ χωρίζεται

$-\infty \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad +\infty$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $x \leq \frac{1}{2} \rightarrow y = -2x+1-x+2 \rightarrow y = -3x+3$

β) $\frac{1}{2} < x \leq 2 \rightarrow y = 2x-1-x+2 \rightarrow y = x+1$

γ) $x \geq 2 \rightarrow y = 2x-1+x-2 \rightarrow y = 3x-3$

Άρα η συνάρτηση έχει πολλαπλό τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -3x+3, & x \leq 1/2 \\ x+1, & 1/2 < x \leq 2 \\ 3x-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Επομένως είναι $\mathscr{D}(f) = (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, 2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R}$.

Για το $\mathscr{R}(f)$ έχουμε: από τον τύπο $y = -3x+3 \leftrightarrow x = \frac{3-y}{3}$ και επειδή

$x \leq 1/2 \rightarrow \frac{3-y}{3} \leq \frac{1}{2} \leftrightarrow 6-2y \leq 3 \leftrightarrow 2y \geq 3 \leftrightarrow y \geq \frac{3}{2}$ (1)

Από τον τύπο $y = x+1 \leftrightarrow x = y-1$ και επειδή $1/2 < x \leq 2 \rightarrow \frac{1}{2} < y-1 \leq 2$

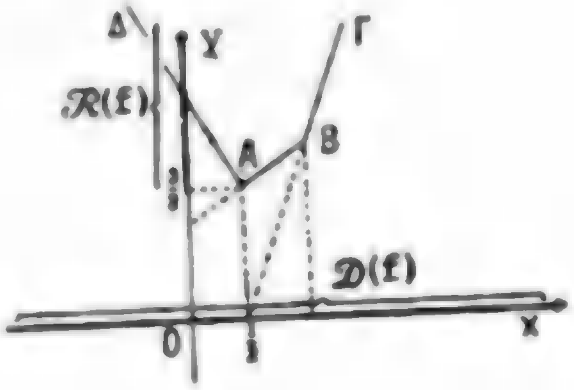
$\leftrightarrow 1+\frac{1}{2} < y \leq 3 \leftrightarrow \frac{3}{2} < y \leq 3$ (2)

και από τον τύπο $y = 3x-3 \rightarrow x = \frac{y+3}{3}$ και επειδή $x > 2 \rightarrow \frac{y+3}{3} > 2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow y > 3$ (3). Από τις (1),(2),(3) έχουμε: $\mathscr{R}(f) = [\frac{3}{2}, +\infty)$.

Σημείωση: Η γραφική παράσταση της f είναι η τεθλασμένη γραμμή ΔΑΒΓ που αν την προβάλλουμε στον άξονα yy' βρίσκουμε το $\mathscr{R}(f)$ που είναι $\mathscr{R}(f) = [\frac{3}{2}, +\infty)$

Αν δε την ΔΑΒΓ προβάλλουμε στον xx' βρίσκουμε το $\mathscr{D}(f)$ που είναι $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$.



10. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του κ έτσι ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2+x+\kappa}{x^2+2}$ **να έχει σύνολο τιμών το διάστημα** $[-\frac{1}{2}, 2]$.

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και για το $\mathcal{R}(f)$ έχουμε:

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ με } y = \frac{x^2+x+\kappa}{x^2+2}\} = \{y \in \mathbb{R} : (y-1)x^2 - x - \kappa + 2y = 0\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \Delta \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : 1 - 4(y-1)(2y-\kappa) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : 8y^2 - 4(\kappa+2)y + 4\kappa - 1 \leq 0\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \frac{\kappa+2-\sqrt{\kappa^2-4\kappa+6}}{2} \leq y \leq \frac{\kappa+2+\sqrt{\kappa^2-4\kappa+6}}{2}\}$$ και επειδή $\mathcal{R}(f) = [-\frac{1}{2}, 2]$

πρέπει: $\left\{\frac{\kappa+2-\sqrt{\kappa^2-4\kappa+6}}{2} = -\frac{1}{2} \text{ και } \frac{\kappa+2+\sqrt{\kappa^2-4\kappa+6}}{2} = 2\right\} \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \left\{\kappa+2-\sqrt{\kappa^2-4\kappa+6} = -1 \wedge \kappa+2+\sqrt{\kappa^2-4\kappa+6} = 4\right\} \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \left\{\kappa+3 = \sqrt{\kappa^2-4\kappa+6} \wedge 2-\kappa = \sqrt{\kappa^2-4\kappa+6}\right\} \longleftrightarrow$

$$\longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \kappa+3 \geq 0,\ 2-\kappa \geq 0 \Rightarrow -3 \leq \kappa \leq 2 \\ \kappa+3 = 2-\kappa \longleftrightarrow 2\kappa = -1 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως αν $\kappa = -\frac{1}{2}$ θα είναι $\mathcal{R}(f) = [-\frac{1}{2}, 2]$.

3.22. Φραγμένες συναρτήσεις.

Ορισμός 1. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)$ λέγεται **φραγμένη άνω**, αντίστοιχα **κάτω** στο σύνολο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός φ έτσι ώστε να ισχύει $f(x) \leq \varphi$, αντίστοιχα $f(x) \geq \varphi$ $\forall\, x \in A$.

Το φ ονομάζεται τότε **ένα άνω φράγμα**, αντίστοιχα **κάτω φράγμα** της f επί του A.

Ορισμός 2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)$ λέγεται **απολύτως φραγμένη** ή **απλά φραγμένη** στο σύνολο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε και μόνο τότε, εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\varphi \geq 0$, έτσι ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq \varphi$ $\forall\, x \in A$

Το φ ονομάζεται τότε ένα άνω φράγμα της f επί του A.

Σημείωση: Αν η f είναι φραγμένη άνω, αντίστοιχα κάτω ή απολύτως φραγμένη τότε άνω φράγμα αντίστοιχα κάτω ή απόλυτο φράγμα μπορεί να θεωρηθεί κάθε αριθμός μεγαλύτερος αντίστοιχα μικρότερος του.

Πρόταση: Εάν η f είναι απολύτως φραγμένη επί του $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε θα είναι άνω και κάτω φραγμένη και αντίστροφα.

Απόδειξη: Ευθύ. Εάν $\forall\, x \in A$ είναι $|f(x)| \leq \varphi$, $\varphi \geq 0 \longleftrightarrow -\varphi \leq f(x) \leq \varphi$ $\forall\, x \in A$ και επομένως η f είναι φραγμένη άνω με το φ και κάτω με το $-\varphi$.

Αντίστροφο. 'Εστω $\varphi_2 \le f(x) \le \varphi_1$ $\forall$ $x \in A$ τότε θέτουμε $\varphi = \max(|\varphi_1|, |\varphi_2|)$ οπότε έχουμε την σχέση:
$-\varphi \le -|\varphi_2| \le -\varphi_2 \le f(x) \le \varphi_1 \le |\varphi_1| \le \varphi \Rightarrow -\varphi \le f(x) \le \varphi$ $\forall$ $x \in A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |f(x)| \le \varphi$ $\forall$ $x \in A$ επομένως η f είναι απολύτως φραγμένη.

Παρατηρήσεις: 1. Το σύνολο A της f μπορεί να έχει τις μορφές $(\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta)$, $(\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\alpha)$ όπου ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$.

2. Εάν το $A = (\alpha,+\infty) \subseteq \mathcal{D}(f)$, τότε λέμε ότι η f είναι φραγμένη στην περιοχή του $+\infty$ και εννοούμε ότι υπάρχει $\varphi > 0$ έτσι ώστε $|f(x)| \le \varphi$ $\forall$ $x \in (\alpha,+\infty)$. Ανάλογα λέμε ότι η f είναι φραγμένη στην περιοχή του $-\infty$, όταν υπάρχει $\varphi > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le \varphi$ $\forall$ $x \in (-\infty,\alpha)$, και θα λέμε ότι η f είναι φραγμένη στην περιοχή το $\xi \in \mathbb{R}$, όταν υπάρχει $\varphi > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le \varphi$ $\forall$ $x \in (\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta) \subseteq \mathcal{D}(f)$.

3. Αν $|f(x)| \le \varphi_1$ $\forall$ $x \in (\xi,\beta)$ και $|f(x)| \le \varphi_2$ $\forall$ $x \in (\alpha,\xi)$ τότε λέμε ότι η f είναι φραγμένη δεξιά του ξ αντίστοιχα αριστερά του ξ.

4. Αν η f είναι φραγμένη και δεξιά του ξ και αριστερά του ξ τότε λέμε ότι είναι φραγμένη στην περιοχή του ξ.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. 'Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3}{x}$ με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$.

i) Να εξετάσετε αν είναι φραγμένη στην περιοχή $(-\infty,-2)$, δηλαδή στην περιοχή του $-\infty$.

ii) Στην περιοχή $(+2,+\infty)$ δηλαδή στην περιοχή του $+\infty$.

iii) Στην περιοχή $(-4,0) \cup (0,7)$ δηλαδή στην περιοχή του μηδενός.

Λύση: i) Επειδή είναι $x < -2 \Rightarrow \frac{1}{x} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{x} > -\frac{3}{2} \Rightarrow \left|\frac{3}{x}\right| < \frac{3}{2}$ $\forall$ $x \in (-\infty,-2)$, οπότε η f είναι φραγμένη στην περιοχή του $-\infty$.

ii) Είναι $x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{x} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left|\frac{3}{x}\right| < \frac{3}{2}$ $\forall$ $x \in (2,+\infty)$, άρα η f είναι φραγμένη στην περιοχή του $+\infty$.

iii) Επειδή $\forall$ $x \in (-4,0) \cup (0,7)$ η $\frac{3}{x}$ δεν ορίζεται συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει $\varphi > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le \varphi$ $\forall$ $x \in (-4,0) \cup (0,7)$ και επομένως η f(x) δεν είναι φραγμένη στην περιοχή του μηδενός.

2. 'Εστω η συνάρτηση $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Να εξετάσετε αν η f είναι φραγμένη στο διάστημα $2 < x \le 5$.

Λύση: Έχουμε: $2 < x \le 5$ (1) $\rightarrow 3 < x+1 \le 6 \rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{x+1} \ge \frac{1}{6}$ (2)

με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη επειδή είναι θετικά παίρνουμε: $\frac{2}{6} \le \frac{x}{x+1} < \frac{5}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{x}{x+1} < \frac{5}{3}$ $\forall\, x \in (2,5]$.

Άρα η f είναι φραγμένη.

3. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^5 συν^3 x}{x^2+1}$. Δείξετε ότι είναι φραγμένη στο διάστημα $Λ = [-3,3]$.

Λύση: Είναι: $|f(x)| = \left|\frac{x^5 συν^3 x}{x^2+1}\right| = \frac{|x^5|\,|συν^3 x|}{x^2+1} \le \frac{|x^5|}{x^2+1}$

Επειδή $|συν^3 x| \le 1$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Αλλά είναι $-3 \le x \le 3 \leftrightarrow |x| \le 3 \rightarrow |x^5| \le 3^5$ οπότε έχουμε:

$f(x) \le \frac{3^5}{x^2+1}$ (1). Ακόμη είναι $|x| \le 3 \rightarrow |x|^2 \le 3^2 \leftrightarrow 0 \le |x|^2 \le 3^2 \rightarrow$

$\rightarrow 3 \le |x|$ (2). Από την (1) και (2) παίρνουμε: $|f(x)| \le \frac{3^5}{1}$ $\forall x \in [-3,3]$.

Επομένως η f είναι απολύτως φραγμένη ή φραγμένη με ένα απόλυτο φράγμα το 3^8.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+x+5$. Να εξετάσετε αν είναι φραγμένη: i) στο σύνολο $Α = (2,+\infty)$

ii) στο σύνολο $Β = [2,5)$

Λύση: i) Επειδή $x > 2 \rightarrow x^2 > 4 \overset{(+)}{\rightarrow} x^2+x > 6 \leftrightarrow x^2+x+5 > 11 \rightarrow f(x) > 11$.

Επομένως η f είναι φραγμένη κάτω με τον πραγματικό αριθμό 11 ή και με κάθε μικρότερό του.

ii) Είναι $2 \le x < 5 \rightarrow 4 \le x^2 < 25 \overset{(+)}{\rightarrow} 6 \le x^2+x < 30 \leftrightarrow 5+6 \le x^2+x+5 < 35 \rightarrow$

$\rightarrow 11 \le f(x) < 35$, που σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη κάτω με τον 11 και άνω με τον 35.

3.23. Μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης.

Ορισμός 1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$ παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** ή απλά μέγιστο (maximum) σε ένα σημείο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν ισχύει $f(x) \le f(\xi)$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(f)$

Ορισμός 2. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$ παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** ή απλά ελάχιστο (minimum) σε ένα σημείο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν ισχύει $\forall\, x \in \mathcal{D}(f)$ $f(x) \ge f(\xi)$.

Ο αριθμος $f(\xi)$ λέγεται μέγιστο αντίστοιχα ελάχιστο της f.

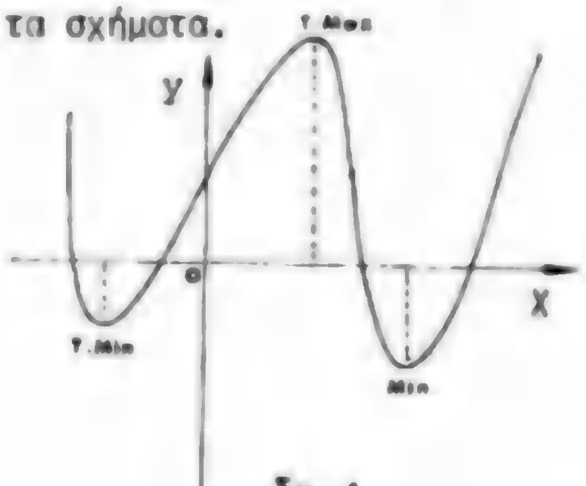
Ορισμός 3. Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** το $f(\xi)$ στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta) \subseteq \mathcal{D}(f)$ με $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε να ισχύει: $f(x) \leq f(\xi)$ $\forall$ $x \in (\alpha,\beta)$.

Ορισμός 4. Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** το $f(\xi)$ στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta) \subseteq \mathcal{D}(f)$ με $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε να ισχύει: $f(x) \geq f(\xi)$ $\forall$ $x \in (\alpha,\beta)$

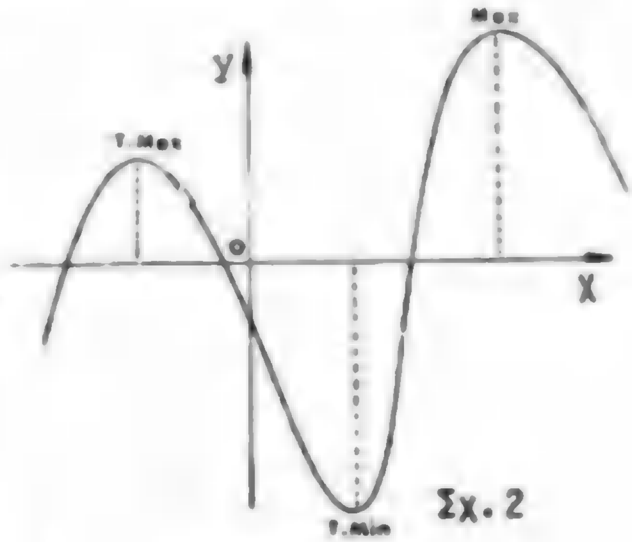
Παρατηρήσεις: 1. Το maximum και το minimum μιας συνάρτησης f αν υπάρχουν τα ονομάζουμε **ακρότατα** της f.

2. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι $(\alpha,\xi] \cup [\xi,\beta)$ και η f στο $(\alpha,\xi]$ είναι αύξουσα ενώ στο $[\xi,\beta)$ φθίνουσα τότε στο ξ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, αν δε η f στο $(\alpha,\xi]$ είναι φθίνουσα και στο $[\xi,\beta)$ αύξουσα τότε η f στο ξ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Βλέπετε τα σχήματα.



Σχ. 1



Σχ. 2

Σχόλιο.

Για να βρούμε τα ολικά ακρότατα της f βρίσκουμε:

i) Το σύνολο τιμών της $\mathcal{R}(f)$ και

αν $\mathcal{R}(f) = [\alpha,\beta]$ τότε $\max f = \beta$ και $\min f = \alpha$

αν $\mathcal{R}(f) = (\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει μόνο $\max f = \beta$

αν $\mathcal{R}(f) = [\alpha,\beta)$ τότε υπάρχει μόνο $\min f = \alpha$

αν $\mathcal{R}(f) = (\alpha,\beta)$ τότε δεν υπάρχουν ακρότατα της f.

ii) Βρίσκουμε το $\mathcal{D}(f)$.

Αν το $\mathcal{D}(f)$ είναι κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f είναι $\uparrow$ στο $\mathcal{D}(f)$ τότε το $f(\alpha) = \min f$ και $f(\beta) = \max f$

Αν δε η f είναι $\downarrow$ στο $\mathcal{D}(f)$ τότε $\max f = f(\alpha)$ και $\min f = f(\beta)$.

iii) Μετασχηματίζουμε τον τύπο της f στις μορφές $f(x) \leq f(\xi)$ ή $f(x) \geq f(\xi)$ οπότε $\max f = f(\xi)$ ή $\min f = f(\xi)$.

iv) Κάνουμε την γραφική παράσταση της f και οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης όπου η f αλλάζει μονοτονία είναι ακρότατα ολικά ή τοπικά και επιτυγχάνονται για τις αντίστοιχες τιμές του x που είναι οι τετμημένες των σημείων αυτών.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 5x-6$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακρότατα.

Λύση: 1ος τρόπος. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f. Έχουμε:

$y = 5x-6 \leftrightarrow x = \frac{1}{5}y+\frac{6}{5} \rightarrow \forall\, x\in\mathbb{R}$ υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ επομένως είναι

$\mathcal{R}(f) = (-\infty,+\infty)$ και επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

2ος τρόπος. Μελετούμε την f ως προς την μονοτονία. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1 > x_2 \rightarrow 5x_1-6 > 5x_2-6 \leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ επομένως η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f\colon [-1,2]\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x-2$ έχει ακρότατα.

Λύση: 1ος τρόπος. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f. Έχουμε:

$y = 3x-2 \leftrightarrow x = \frac{y+2}{3}$ και επειδή $x\in[-1,2] \rightarrow \frac{y+2}{3}\in[-1,2] \leftrightarrow$

$\leftrightarrow -1 \le \frac{y+2}{3} \le 2 \leftrightarrow -3 \le y+2 \le 6 \leftrightarrow -5 \le y \le 4$ οπότε $\mathcal{R}(f) = [-5,4]$.

Επομένως είναι: $\max f = 4$ και $\min f = -5$.

2ος τρόπος: Μελετούμε ως προς την μονοτονία την f στο $[-1,2]$. Θεωρούμε το λόγο $\delta = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{3x_1-2-3x_2+2}{x_1-x_2} = 3 > 0 \rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο $[-1,2]\in\mathbb{R}$ άρα επειδή είναι και συνεχής θα έχουμε $\max f = f(2) = 6-2 = 4$ και $\min f = f(-1) = -3-2 = -5$.

3ος τρόπος. Μετασχηματίζουμε τον τύπο της f για να πάρει μια από τις μορφές $f(x) \le f(\xi)$ ή $f(x) \ge f(\xi)$.

Έχουμε: $-1 \le x \le 2 \leftrightarrow -3 \le 3x \le 6 \leftrightarrow -3-2 \le 3x-2 \le 6-2 \leftrightarrow -5 \le f(x) \le 4$ άρα $\max f = 4$ και $\min f = -5$.

3. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2-3x+1$

Λύση: 1ος τρόπος. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f. Έχουμε:

$y = x^2-3x+1 \Leftrightarrow x^2-3x+1-y = 0$ (1) και επειδή το σύνολο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ το $x\in\mathbb{R}$ επομένως η εξίσωση (1) πρέπει να δώσει πραγματικές ρίζες. Άρα η διακρίνουσα $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9-4(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow 9-4+4y \geq 0 \Leftrightarrow 4y \geq -5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \geq -\frac{5}{4} \Rightarrow \mathcal{R}(f) = [-\frac{5}{4},+\infty)$

Οπότε η f έχει μόνο ελάχιστο το $-\frac{5}{4}$. Δηλαδή $\min f = -\frac{5}{4}$.

2ος τρόπος. Μελετούμε το μονότονο της f.
Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δευτεροβάθμιο τριώνυμο με $\alpha = 1 > 0$ είναι ↓ στο $(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}]$

και ↑ στο $[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty)$ επομένως στη θέση $\xi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ η f παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο) και είναι το $\min f = f(-\frac{\beta}{2\alpha}) = f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}-\frac{9}{2}+1 = -\frac{5}{4}$

3ος τρόπος. Η συνάρτηση f γράφεται:
$f(x) = x^2-2\frac{3}{2}x+1 = x^2-2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+1 \Rightarrow f(x) = (x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)+\frac{5}{4} = (x-\frac{3}{2})^2$ και επειδή $\forall\, x\in\mathbb{R}$ είναι $(x-\frac{3}{2})^2 \geq 0$ έχουμε ότι:

$f(x)+\frac{5}{4} \geq 0\ \forall\, x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq -\frac{5}{4} = f(\frac{3}{2})$, άρα η f λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του $-\frac{5}{4}$ ή ποιό μικρή που μπορεί να πάρει είναι η $-\frac{5}{4}$ επομένως $\min f = -\frac{5}{4}$.

4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+4}{2x-3}$. Να βρεθούν τα ακρότατα της αν υπάρχουν.

Λύση: 1ος τρόπος. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f, είναι:
$y = \frac{x+4}{2x-3} \Leftrightarrow 2xy-3y = x+4 \Leftrightarrow x(2y-1) = 3x+4 \Leftrightarrow x = \frac{3y+4}{2y-1},\ y \neq \frac{1}{2}$

Επομένως $\forall\, x\in\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$ υπάρχει $y\in\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ και άρα $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\} =$
$= (-\infty,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},+\infty)$.

Συνεπώς η f δεν έχει ακρότατα.

2ος τρόπος. Μελετούμε το μονότονο της f στο $\mathcal{D}(f) = (-\infty,\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2},+\infty)$

Θεωρούμε την ορίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-8 = -11 < 0$ επομένως η f είναι ↓

στο $\mathcal{D}(f)$. Άρα δεν υπάρχουν ακρότατα.

5. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+x+1}$

Να βρεθούν τα ακρότατα της f.

Λύση: Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f. Έχουμε $y = \frac{3x+2}{x^2+x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2y+xy+y = 3x+2 \Leftrightarrow yx^2+(y-3)x+y-2 = 0$ και επειδή $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $\Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow (y-3)^2-4y(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2-6y+9-4y^2+8y \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2+2y+9 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y^2-2y-9 \leq 0$ (1). Το τριώνυμο ως προς y δίνει λύσεις

$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+27}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{28}}{3}$ και η ανίσωση γίνεται: $3(y+\frac{1+\sqrt{28}}{3})(y-\frac{1-\sqrt{28}}{3}) \leq 0$

που αληθεύει για $\frac{1-\sqrt{28}}{3} \leq y \leq \frac{1+\sqrt{28}}{3}$.

Επομένως είναι $\mathcal{R}(f) = \left[\frac{1-\sqrt{28}}{3}, \frac{1+\sqrt{28}}{3}\right]$ και η f έχει ακρότατα, με

$\max f = \frac{1+\sqrt{28}}{3}$ και $\min f = \frac{1-\sqrt{28}}{3}$

Σημείωση: Για να βρούμε τα x για τα οποία υπάρχουν τα ακρότατα βάζουμε στον τύπο της f όπου y τις αντίστοιχες τιμές

$y = \frac{1+\sqrt{28}}{3}$, $y = \frac{1-\sqrt{28}}{3}$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς x κάθε φορά.

6. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = |2x-1|+|x-2|$

i) Να βρεθούν τα ακρότατα της f.

ii) Αν $x_1 \geq 2$ και $x_1+x_2 = 2$ με $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ δείξετε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Λύση: 1ος τρόπος. Γράφουμε την f με πολλαπλό τύπο.

Έχουμε: α) $x \geq 2 \Rightarrow f(x) = 3x-3$

β) $\frac{1}{2} \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x+1$

γ) $x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -3x+3$

Επομένως ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-3, & x \geq 2 \\ x+1, & \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ -3x+3, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Για τα ακρότατα ακολουθούμε την μέθοδο με την μονοτονία της f γνωρίζου-

με ότι η f είναι ↑ στο $[2,+\infty)$ γνήσια αύξουσα στο $[\frac{1}{2},2)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,\frac{1}{2})$. Άρα μια πιθανή θέση ακροτάτου (minimum) είναι η θέση $x=\frac{1}{2}\in \mathcal{D}(f)$ στην οποία η f αλλάζει μονότονο.

Άρα $\min f = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

2ος τρόπος. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f είναι:

1) $y = 3x-3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{3} \rightarrow x\in[2,+\infty) \rightarrow \frac{y+3}{3}\geq 2 \Leftrightarrow y\geq 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y\in[3,+\infty)$.

2. $y = x+1 \Leftrightarrow x = y-1 \rightarrow \frac{1}{2}\leq -1+y<2 \Leftrightarrow +1+\frac{1}{2}\leq y < +1+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\leq y<3 \Leftrightarrow y\in[\frac{3}{2},3)$

3) $y = -3x+3 \Leftrightarrow x = \frac{3-y}{3} \rightarrow \frac{3-y}{3}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 6-2y<3 \Leftrightarrow y>\frac{3}{2} \rightarrow$
$\rightarrow y\in(\frac{3}{2},+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $\mathcal{R}(f) = [\frac{3}{2},3)\cup[3,+\infty)\cup(\frac{3}{2},+\infty) =$
$= [\frac{3}{2},+\infty)$.

Άρα η f έχει μόνο min και είναι $\min f = \frac{3}{2}$.

2) Είναι $f(x_1) = |2x_1-1|+|x_1-2|$ και $f(x_2) = |2x_2-1|+|x_2-2|$ και επειδή $x_1\geq 2$ και $x_1+x_2 = 2$.

Έχουμε: $f(x_1) = 3x_1-2$ και $f(x_2) = |2(2-x_1)-1|+|2-x_1-2| =$
$= |3-2x_1|+|-x_1| = |3-2x_1|+|x_1| = 2x_1-3+x_1 = 3x_1-3$ (β) γιατί $3-2x_1\leq 0$

Άρα ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

7. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}-2$
Δείξετε ότι $\min f = 0$.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για να έχει ελάχιστο το 0 πρέπει να δείξουμε ότι $\forall\, x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2\geq 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2+2)^2\geq 4(x^2+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^4+4x^2-4-4x^2+4\geq 0 \Leftrightarrow x^4\geq 0$ που ισχύει.

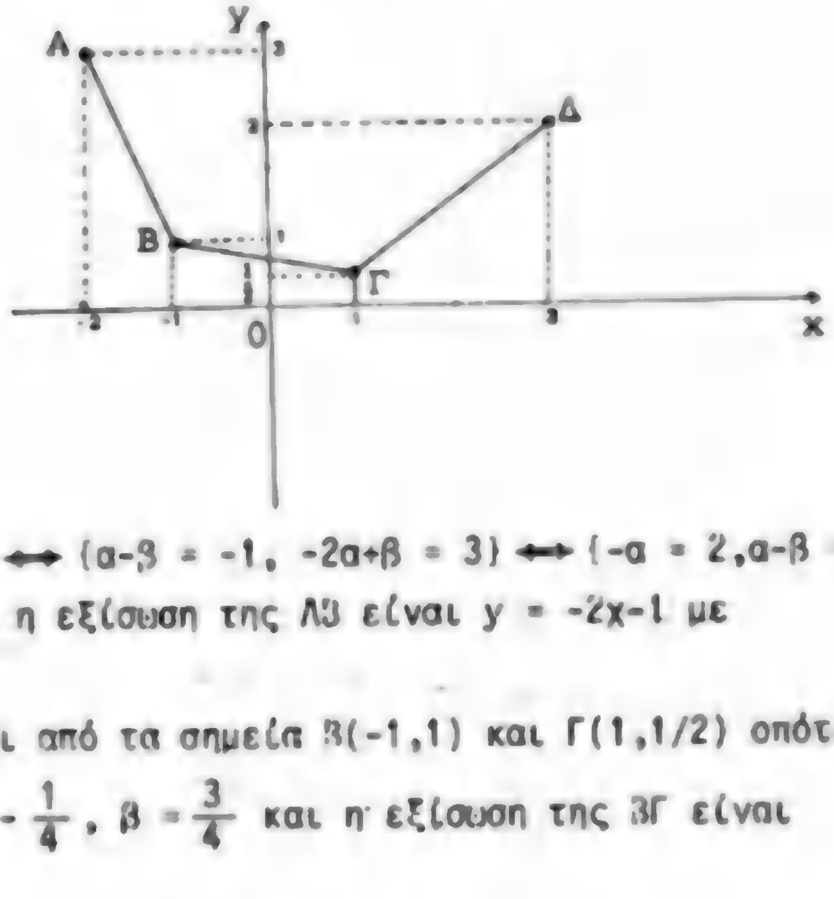
8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2(\alpha-x)(x+\sqrt{x^2+\beta^2})-\alpha^2-\beta^2$,

$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Δείξετε ότι $\max f = 0$ και να βρείτε για ποιο x επιτυγχάνεται αυτό.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \le 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$
$2(\alpha-x)(x+\sqrt{x^2+\beta^2})-\alpha^2-\beta^2 \le 0 \Longleftrightarrow 2(\alpha-x)\sqrt{x^2+\beta^2}+2\alpha x-2x^2-\alpha^2-\beta^2 \le 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 2(\alpha-x)\sqrt{x^2+\beta^2}-(x^2-2\alpha x+\alpha^2)-(x^2+\beta^2) \le 0 \Longleftrightarrow -(\alpha-x)^2-(\sqrt{x^2+\beta^2})^2+2(\alpha-x)\sqrt{x^2+\beta^2} \le 0 \Longleftrightarrow -[(\alpha-x)-\sqrt{x^2+\beta^2}]^2 \le 0$ που ισχύει $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα στη σχέση αυτή ισχύει όταν $\alpha-x-\sqrt{x^2+\beta^2} = 0 \Longleftrightarrow \alpha-x = \sqrt{x^2+\beta^2}$
$\Longleftrightarrow (\alpha-x \ge 0,\ \alpha^2-2\alpha x+x^2 = x^2+\beta^2) \Longleftrightarrow (2\alpha x = \alpha^2-\beta^2,\ x \le \alpha) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha},\ x \le \alpha \ne 0)$.

9. Μια συνάρτηση έχει τη γραφική παράσταση του σχήματος. Να βρεθεί ο τύπος της f και τα ακρότατα αν υπάρχουν.



Λύση: Η γραφική παράσταση της f είναι τμήματα ευθειών και κατά τα γνωστά η εξίσωση κάθε ευθείας είναι $y = \alpha x+\beta$ (1).
Η (1) πρέπει να περνά από τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(-1,1)$. Άρα θα επαληθεύεται από αυτά.
Δηλαδή $(3 = -2\alpha+\beta,\ 1 = -\alpha+\beta) \Longleftrightarrow (\alpha-\beta = -1,\ -2\alpha+\beta = 3) \Longleftrightarrow (-\alpha = 2, \alpha-\beta = -1) \Longleftrightarrow \alpha = -2,\ \beta = -1$ και η εξίσωση της AB είναι $y = -2x-1$ με $-2 \le x \le -1$.

Όμοια η (1) θα επαληθεύεται από τα σημεία $B(-1,1)$ και $\Gamma(1,1/2)$ οπότε $(1 = -\alpha+\beta,\ \frac{1}{2} = \alpha+\beta) \Longleftrightarrow \alpha = -\frac{1}{4},\ \beta = \frac{3}{4}$ και η εξίσωση της BΓ είναι $y = -\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ με $-1 \le x \le 1$.

Ακόμη η (1) θα επαληθεύεται από τα σημεία $\Gamma(1,\frac{1}{2})$ και $\Delta(3,2)$ οπότε έχουμε: $(\frac{1}{2} = \alpha+\beta,\ 2 = 3\alpha+\beta) \Longleftrightarrow (2\alpha = \frac{3}{2},\ \alpha+\beta = \frac{1}{2}) \Longleftrightarrow \alpha = \frac{3}{4},\ \beta = -\frac{1}{4}$ και η εξίσωση της ΓΔ είναι $y = \frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ με $1 \le x \le 3$.

Άρα η f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} -2x-1, & -2 \le x \le -1 \\ -\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}, & -1 < x \le 1 \\ \frac{3}{4}x-\frac{1}{4}, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι στο σημείο Γ αντιστοιχεί το ποιό μικρό y επομένως υπάρχει ολικό ελάχιστο και είναι η τεταγμένη του Γ. Δηλαδή $y_{min} = \frac{1}{2}$ και επιτυγχάνεται για $x = 1$

10. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2\kappa x+\lambda}{x^2+x+1}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
Να οριστούν τα πραγματικά κ,λ έτσι ώστε η f να έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το -2.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f
Έχουμε $y = \frac{2\kappa x+\lambda}{x^2+x+1} \leftrightarrow yx^2+yx+y = 2\kappa x+\lambda \leftrightarrow yx^2+(y-2\kappa)x+y-\lambda = 0$ και επειδή $x \in \mathbb{R}$ πρέπει η διακρίνουσα της Δ να είναι ≥ 0. Δηλαδή $\Delta \geq 0 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (y-2\kappa)^2-4y(y-\lambda) \geq 0 \leftrightarrow y^2-4y\kappa+4\kappa^2-4y^2+4\lambda y \geq 0 \leftrightarrow +3y^2+4(\kappa+\lambda)y-4\kappa^2 \leq 0$ (1). Αν τώρα προσδιορίσουμε τα κ,λ έτσι ώστε το πρώτο μέλος της (1) να έχει ρίζες τις 1 και -2 τότε η (1) θα αληθεύει για τα $y \in \mathbb{R}$ με $-2 \leq y \leq 1$ και επομένως τότε η f θα έχει σύνολο τιμών το κλειστό διάστημα $[-2,1]$ άρα τότε $\max f = 1$ και $\min f = -2$.
Πρέπει επομένως η εξίσωση $3y^2+4(\kappa+\lambda)y-4\kappa^2 = 0$ (2) να έχει ρίζες τις 1 και -2. Άρα θα την επαληθεύουν.
Η (2) για $y = 1$ δίνει $3+4(\kappa-\lambda)-4\kappa^2 = 0$ (3) και για $y = -2$ δίνει $12-8(\kappa-\lambda)-4\kappa^2 = 0$ (4). Λύνουμε το σύστημα των (3) και (4) και έχουμε:

$$\begin{cases} 4\kappa^2-4\kappa+4\lambda = 3 \\ 4\kappa^2+8(\kappa-\lambda) = 12 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 12\kappa-12\lambda = 9 \\ 4\kappa^2-4\kappa+4\lambda = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 4\kappa-4\lambda = 3 \\ 4\kappa^2-4\kappa+4\lambda = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 4\kappa-4\lambda = 3 \\ 4\kappa^2-3 = 3 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 4\kappa-4\lambda = 3 \\ \kappa^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \leftrightarrow \left.\begin{matrix} \kappa = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \kappa-\lambda = \frac{3}{4} \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \kappa = \sqrt{\frac{3}{2}},\ \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4} \text{ και}$$

$$\kappa = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ \lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}$$

Άρα υπάρχουν δύο ζευγάρια τιμών για τα κ,λ για τα οποία η f έχει max το 1 και min το -2.

11. **Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^3 x+\sqrt{x}$.**
Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της αν $x \in [\pi/2,\pi]$.

Λύση: Αρκεί να βρούμε το σύνολο τιμών της f. Έχουμε:

i) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \to \eta\mu\frac{\pi}{2} \geq \eta\mu x \geq \eta\mu\pi \leftrightarrow 1 \geq \eta\mu x \geq 0 \leftrightarrow 1 \geq \eta\mu^2 x \geq 0$

Όμοια αν $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \to \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \geq \sigma\upsilon\nu x \geq \sigma\upsilon\nu\pi \leftrightarrow 0 \geq \sigma\upsilon\nu x \geq -1 \leftrightarrow 0 \geq \sigma\upsilon\nu^3 x \geq -1$

(2) και αν $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \le \sqrt{x} \le \sqrt{\pi}$ (3).

Με πρόσθεση των (1),(2),(3) παίρνουμε:

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1 \le ημ^2x+συν^3x+\sqrt{x} \le 1+\sqrt{\pi} \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}-1 \le f(x) \le 1+\sqrt{\pi} \leftrightarrow \mathcal{R}(f) =$

$=\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1,\ 1+\sqrt{\pi}\right]$.

Επομένως είναι $\max f = 1+\sqrt{\pi}$ και $\min f = \sqrt{\frac{\pi}{2}}-1$.

12. Για ποιά τιμή του πραγματικού $μ \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x+1|+|x-2|-2x+μ$ έχει ελάχιστο το 10.

Λύση: Γράφουμε τη συνάρτηση με πολλαπλό τύπο διακρίνοντας τις περιπτώσεις

$-\infty \quad -1 \quad 2 \quad +\infty$

i) $x \le -1 \rightarrow f(x) = -4x+μ+1$

ii) $-1 \le x \le 2 \rightarrow f(x) = -2x+3+μ \rightarrow f(x) = \begin{cases} -4x+μ+1, & x \le -1 \\ -2x+3+μ, & -1 \le x \le 2 \\ μ-1, & x \ge 2 \end{cases}$

iii) $x \ge 2 \rightarrow f(x) = μ-1$

Επειδή η f είναι ↘ στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[-1,2]$ και στο διάστημα $[2,+\infty)$ σταθερή δηλαδή αλλάζει μονοτονία υπάρχει ακρότατο στη θέση $x = 2$ και είναι $\min f = f(2) = μ-1$.

Επειδή δε $\min f = 10 \rightarrow μ-1 = 10 \leftrightarrow μ = 11$.

Άρα με $μ = 11$ η f έχει ελάχιστο το 10.

13. Αν $x,y \in \mathbb{R}_+^*$ και έχουν σταθερό άθροισμα c τότε να βρεθούν εκείνοι που έχουν μέγιστο γινόμενο.

Λύση: Έστω $x+y = c$ και $xy = M$. Εκφράζουμε το γινόμενο συναρτήσει μόνο του x οπότε έχουμε $M = x(c-x) = -x^2+cx$ (1)

Η (1) $\leftrightarrow x^2-cx+M = 0$ και επειδή $x \in \mathbb{R}$ πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης να είναι ≥ 0. Δηλ. $Δ \ge 0 \leftrightarrow c^2-4M \ge 0 \leftrightarrow c^2 \ge 4M \leftrightarrow M \le \frac{c^2}{4}$

που σημαίνει ότι το γινόμενο xy έχει μέγιστη τιμή την $\frac{c^2}{4}$. Άρα $\max(xy) = \frac{c^2}{4}$

Για να έχει όμως το γινόμενο μεγίστη τιμή την $\frac{c^2}{4}$ πρέπει $Δ = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x = \frac{c}{2}$ οπότε η σχέση $x+y = c$ δίνει $y = \frac{c}{2}$.

Επομένως το γινόμενο xy γίνεται μέγιστο όταν τα x,y γίνουν ίσα.

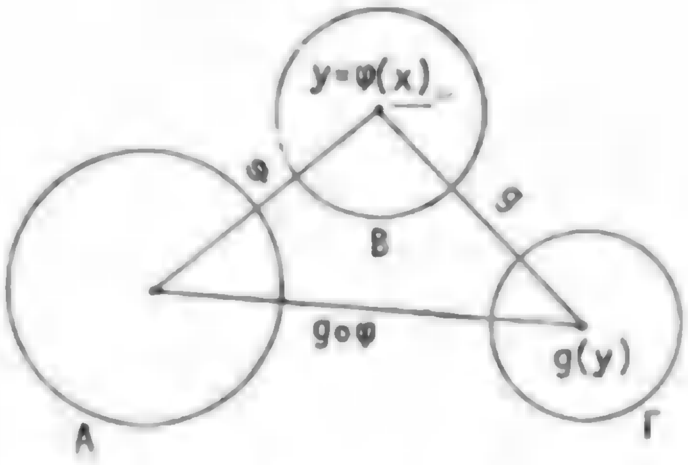
14. Αν $x,y \in \mathbb{R}_+^*$ και $xy = c$ να βρεθούν εκείνοι που έχουν ελάχιστο άθροισμα

Λύση: Θέτουμε $E = x+y$ και εκφράζουμε το άθροισμα συναρτήσει του x οπότε: $E = x+\frac{c}{x} \leftrightarrow x^2-Ex+c = 0$ και επειδή $x \in \mathbb{R}_+^*$ πρέπει η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης να είναι ≥ 0. Είναι $\Delta \geq 0 \leftrightarrow E^2-4c \geq 0 \leftrightarrow E \geq 2\sqrt{c} \rightarrow \min E = 2\sqrt{c}$.

Αλλά για να είναι το άθροισμα ελάχιστο πρέπει $\Delta = 0 \leftrightarrow x = \frac{E}{2} = \sqrt{c}$ οπότε από την $xy = c$ παίρνουμε $y = \sqrt{c}$. Επομένως το άθροισμα γίνεται ελάχιστο όταν $x = y = \sqrt{c}$.

3.24. Σύνθεση συναρτήσεων.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\varphi: A \to B$ και $g: B \to \Gamma$ με $\mathcal{R}(\varphi) \subseteq B$. Επειδή η φ είναι συνάρτηση από κάθε $x \in A$ θα προκύψει δια μέσου της φ ένα και μόνο $y \in B$. Από αυτό το y θα προκύψει δια μέσου της g ένα και μόνο $g(y) \in \Gamma$. Επομένως $\forall\, x \in A$ με τις παραπάνω δύο διαδικασίες παίρνουμε ένα και μόνο ένα στοιχείο $g(y) \in \Gamma$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση από το Α στο Γ.

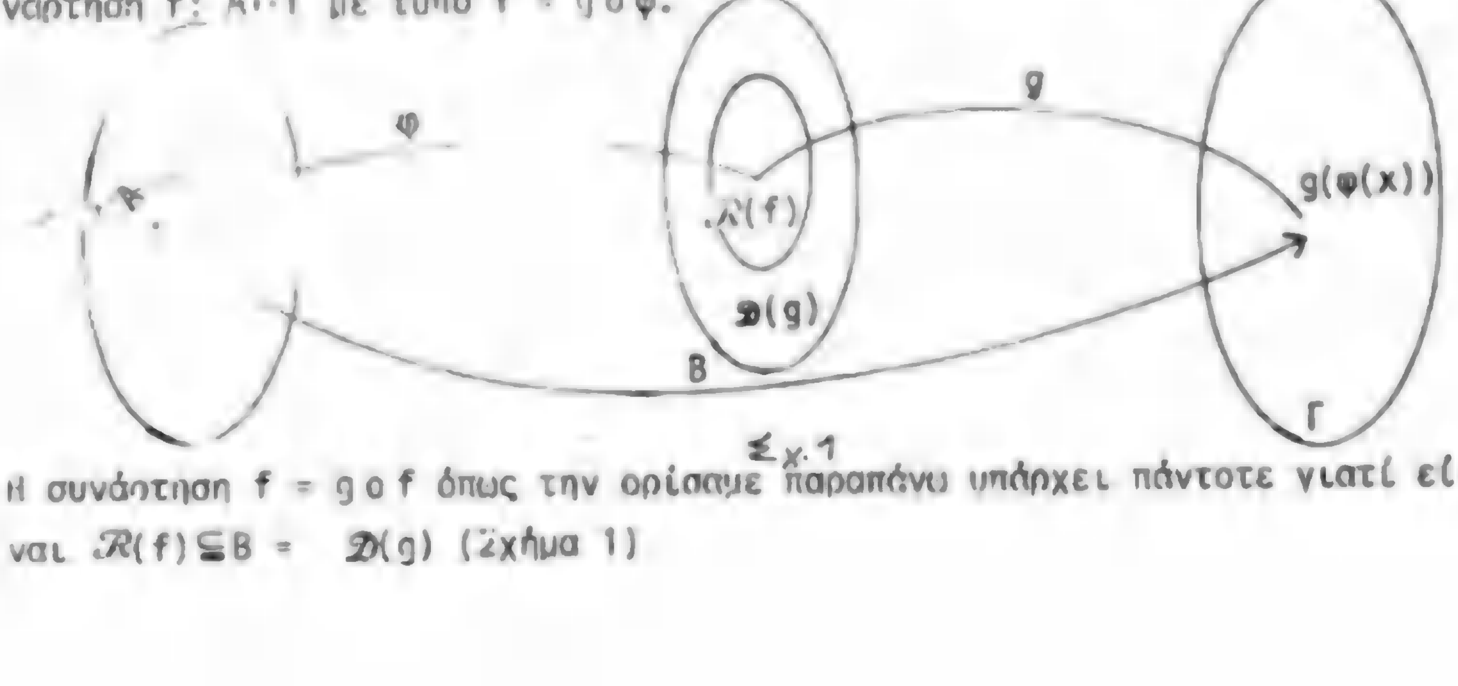


Αν την συνάρτηση αυτή την καλέσουμε f τότε αυτή έχει πεδίο ορισμού το Α και τύπο $f(x) = g(\varphi(x))$.

Δηλαδή: $\underbrace{A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{g} \Gamma}_{f} \leftrightarrow f: A \to \Gamma$ με τύπο $f(x) = g(\varphi(x))$.

Η f συμβολίζεται: $f = g \circ \varphi$ και διαβάζεται "g σύνθεση φ" ή "g κύκλος φ".

Ορισμός: Ονομάζουμε σύνθεση των συναρτήσεων $\varphi: A \to B$ και $g: B \to \Gamma$ την συνάρτηση $f: A \to \Gamma$ με τύπο $f = g \circ \varphi$.



Σχ.1

Η συνάρτηση $f = g \circ f$ όπως την ορίσαμε παραπάνω υπάρχει πάντοτε γιατί είναι $\mathcal{R}(f) \subseteq B = \mathcal{D}(g)$ (Σχήμα 1)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις φ και g με $\varphi(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = ημx$.
Να βρεθούν οι συναρτήσεις $g\circ\varphi$ και $\varphi\circ g$.

Λύση: Για να υπάρχει η συνάρτηση $g\circ f$ πρέπει το πεδίο ορισμού της $\mathcal{D}(g\circ\varphi) \neq \emptyset$. Είναι: $A_1 = \mathcal{D}(g\circ\varphi) = \{x\in\mathcal{D}(\varphi): \varphi(x)\in\mathcal{D}(g)\}$.
Είναι δε $\mathcal{D}(\varphi) = \{x\in\mathbb{R}: x-2\geq 0\} = [2,+\infty)$ και $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$.
'Αρα $A_1 = \{x\in[2,+\infty): \varphi(x)\in\mathbb{R}\} = \{x\geq 2 \wedge \sqrt{x-2}\in\mathbb{R}\} \longleftrightarrow x\geq 2$. 'Αρα $\mathcal{D}(g\circ\varphi) = [2,+\infty) \neq \emptyset$. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $g\circ f$ και έχει τύπο $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = ημ\sqrt{x-2}$.
Για την συνάρτηση $\varphi\circ g$ θα πρέπει επίσης $\mathcal{D}(\varphi\circ g) \neq \emptyset$.
Είναι $A_2 = \mathcal{D}(\varphi\circ g) = \{x\in\mathcal{D}(g): g(x)\in\mathcal{D}(\varphi)\} = \{x\in\mathbb{R}: ημx\geq 2\} = \emptyset$.
'Αρα δεν ορίζεται η συνάρτηση $\varphi\circ g$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$ και
$g: \mathbb{R} \to [-\frac{1}{4},+\infty)$ με $g(x) = x^2-5x+6$
Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi\circ g$ και να λυθεί η εξίσωση $(\varphi\circ g)(x) = 1$.

Λύση: Για να ορίζεται η συνάρτηση $\varphi\circ g$ πρέπει $\mathcal{D}(\varphi\circ g) \neq \emptyset$.
Είναι $A_1 = \mathcal{D}(\varphi\circ g) = \{x\in\mathcal{D}(g): g(x)\in\mathcal{D}(\varphi)\} = \{x\in\mathbb{R}: x^2-5x+6\geq 1\} =$
$= \{x\in\mathbb{R}: x^2-5x+5\geq 0\} = (-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{5}}{2},+\infty)$
Επομένως η συνάρτηση $\varphi\circ g$ ορίζεται και έχει τύπο:
$(\varphi\circ g)(x) = \varphi(g(x)) = \sqrt{x^2-5x+6-1} = \sqrt{x^2-5x+5}$
Η εξίσωση $\varphi(g(x)) = 1 \longleftrightarrow \sqrt{x^2-5x+5} = 1 \longleftrightarrow x^2-5x+$[illegible] $\longleftrightarrow x_1 = 4$, $x_2 = 1$ και είναι δεχτές και οι δύο γιατί ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $\varphi\circ g$.

3. 'Εστω οι συναρτήσεις $\varphi: [-1,20] \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = 2x-1$ και

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & x\in[-2,10] \\ 3x-9, & x\in[10,39] \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $g\circ\varphi$. Σε συνέχεια να υπολογίσετε τα $(g\circ\varphi)(5)$, $(g\circ\varphi)(6)$.

Λύση: Θα πρέπει να δούμε αν υπάρχει η $g\circ\varphi$, στις δύο περιπτώσεις:
α) όταν η g έχει τον τύπο $g(x) = x-1$ και β) όταν έχει τον τύπο $g(x) = 3x-9$.
'Εχουμε: $A_1 = \{x\in\mathcal{D}(\varphi): \varphi(x)\in\mathcal{D}(g)\} = \{-1\leq x\leq 20: (2x-1)\in[-2,10]\} =$

$= \{-1 \le x \le 20,\ -2 \le 2x-1 \le 10\} = \{-1 \le x \le 20,\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{11}{2}\} = [-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$

$A_2 = \mathcal{D}(g\circ\varphi) = \{x \in \mathcal{D}(\varphi): \varphi(x) \in \mathcal{D}(g)\} = \{-1 \le x \le 20,\ 10 \le 2x-1 \le 39\} =$
$= \{-1 \le x \le 20,\ \frac{11}{2} \le x \le 20\} = [\frac{11}{2}, 20]$.

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $g\circ\varphi$ σε κάθε περίπτωση και έχει τύπο:

$$(g\circ\varphi)(x) = \begin{cases} g(\varphi(x)) = 2x-2, & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}] \\ g(\varphi(x)) = 6x-12, & x \in [\frac{11}{2}, 20] \end{cases}$$

Ο αριθμός $(g\circ\varphi)(5)$ υπάρχει γιατί το $5 \in \mathcal{D}(g\circ\varphi)$ και θα τον βρούμε από τον πρώτο τύπο της $g\circ\varphi$. Είναι $(g\circ\varphi)(5) = 2.5-2 = 8$

Ο αριθμός $(g\circ\varphi)(6)$ δεν υπάρχει γιατί το $6 \notin \mathcal{D}(g\circ\varphi)$.

Παρατήρηση: Η σύνθεση των συναρτήσεων είναι μια πράξη που δεν είναι ορισμένη παντού στο σύνολο **F** των πραγματικών συναρτήσεων.

4. Εάν φ και g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει η σύνθεση με οποιαδήποτε τάξη τότε $\varphi\circ g \neq g\circ\varphi$

Λύση: Έστω οι συναρτήσεις $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x) = 5x+2$ και $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x) = 3x-1$ τότε είναι:

$$\left.\begin{array}{l}(\varphi\circ g)(x) = \varphi(g(x)) = 5(3x-1)+2 = 15x-3 \\ (g\circ\varphi)(x) = g(\varphi(x)) = 3(5x+2)-1 = 15x+5\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi\circ g \neq g\circ\varphi.$$

5. Αν φ, g, f τρείς συναρτήσεις με $\mathcal{R}(\varphi) \subseteq \mathcal{D}(g)$ και $\mathcal{R}(g) \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε $(\varphi\circ g)\circ f = \varphi\circ(g\circ f)$ (προσεταιριστική).

Λύση: Επειδή $\mathcal{R}(\varphi) \subseteq \mathcal{D}(g)$ και $\mathcal{R}(g) \subseteq \mathcal{D}(f)$ υπάρχουν οι $(\varphi\circ g)\circ f$ και $\varphi\circ(g\circ\varphi)$, και έστω Λ το κοινό πεδίο ορισμού των.

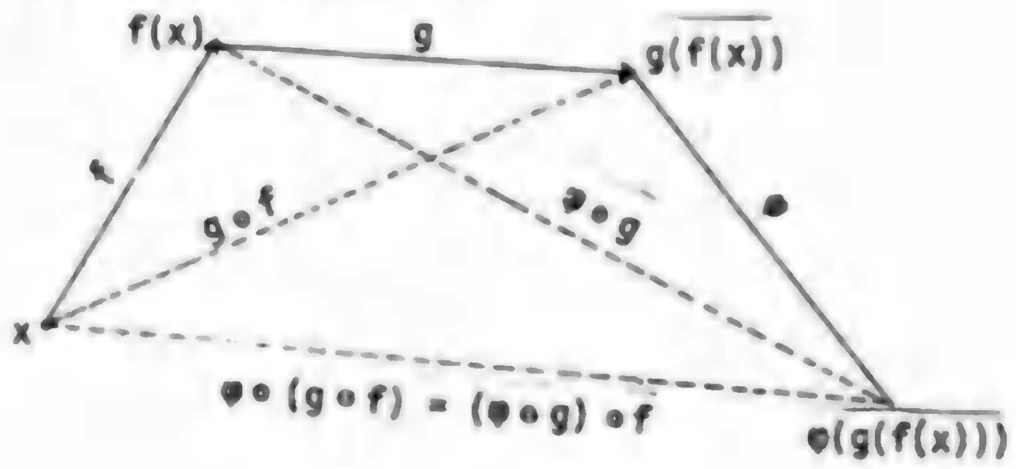
Είναι αρκετό τώρα να δείξουμε ότι $\forall\, x \in \Lambda$ παίρνουν ίσες τιμές.

Έχουμε: $[(\varphi\circ g)\circ f](x) = (\varphi\circ g)(f(x)) = \varphi(g(f(x))) = \varphi(g(f(x)))$

και $[\varphi\circ(g\circ f)](x) = \varphi((g\circ f)(x)) = \varphi(g(f(x)))$

Επομένως ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.

Γεωμετρικά η παραπάνω πρόταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



6. Εάν $f: A \to B$ και I_A, I_B οι ταυτοτικές συναρτήσεις των A,B τότε ισχύουν $I_B \circ f = f$ και $f \circ I_A = f$.

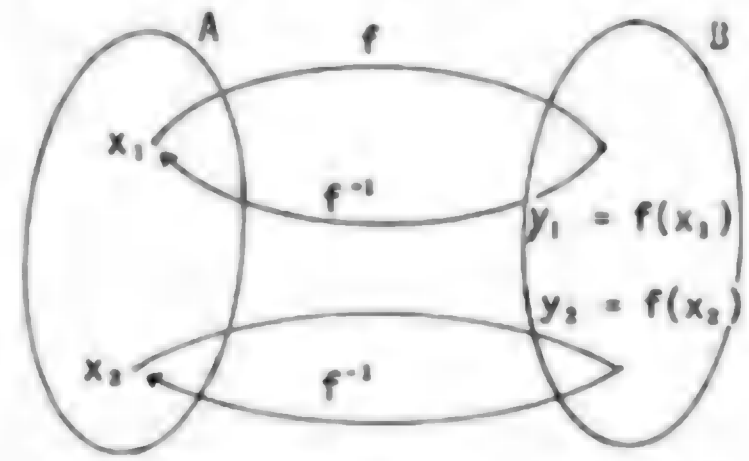
Λύση: Επειδή $(I_B) = B = \mathcal{R}(f)$ και $\mathcal{D}(f) = A = \mathcal{R}(I_A)$ ορίζονται οι συναρτήσεις $I_B \circ f$ και $f \circ I_A$ και έχουν πεδίο ορισμού το A.
Είναι αρκετό επομένως να δείξουμε ότι παίρνουν και ίσες τιμές, $\forall\, x \in A$.
Είναι $\forall\, x \in A\ (I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = I_B(y) = y = f(x)$
και $\forall\, x \in A\ (f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$
Άρα είναι $I_B \circ f = f \circ I_A = f$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = x^2-10x+2$ και $g(x) = \sqrt{x-4}$. Εξετάσετε αν υπάρχει η $g \circ f$. Σε συνέχεια να λυθεί η ανίσωση $(g \circ f)(x) \le 3$.

Λύση: Είναι $A_1 = \mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathcal{D}(f):\ f(x) \in \mathcal{D}(g)\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}:\ x^2-10x+2 \ge 4\} = \{x \in \mathbb{R}:\ x^2-10x-2 \ge 0\} = (-\infty, 5-\sqrt{27}] \cup [5+\sqrt{27}, +\infty)$
Άρα ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ και έχει τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$
$= \sqrt{x^2-10x-2}$. Η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $x^2-10x-2 \le 3^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2-10x-2-9 \le 0 \Longleftrightarrow x^2-10x-11 \le 0 \Longleftrightarrow -1 \le x \le 11$ και επειδή $x \in \mathcal{D}(g \circ f)$
δεκτά είναι τα: $-1 \le x \le 5-\sqrt{27}$ και $5+\sqrt{27} \le x \le 11$.

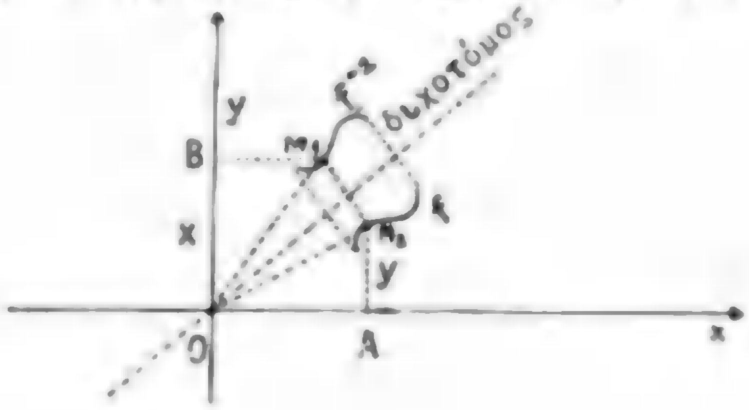
3.25. Αντίστροφη συνάρτηση της f.

Αν $f: A \to B$ και έστω ότι είναι (1-1) και επί του B. Τότε σε διαφορετικά πρότυπα θα αντιστοιχούν διαφορετικές εικόνες. Επομένως η αντίστροφη σχέση της f αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο του B ένα μόνο στοιχείο του A. Άρα η αντίστροφη σχέση είναι συνάρτηση και συμβολίζεται με $f^{-1}: B \to A$ η οποία είναι (1-1) και επί γιατί σε διαφορετικά y από το B αντιστοιχίζονται με την f^{-1} διαφορετικά x του A, γιατί αλλιώς η f δεν θα ήταν συνάρτηση, είναι δε και επί του A, γιατί $f^{-1}(B) = A$ (επειδή η f είναι επί).



Αντίστροφα. Αν η f^{-1} είναι συνάρτηση (1-1) και επί τότε και η f είναι (1-1) και επί.

Πρόταση: Αν μια συνάρτηση $f: A \to B$ με τύπο $y = f(x)$ αντιστρέφεται τα διαγράμματα των f^{-1}, f έχουν άξονα συμμετρίας την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.



Απόδειξη: Έστω $M(x,y)$ ένα τυχαίο σημείο του διαγράμματος της f, και το σημείο $M_1(x,y)$ του διαγράμματος της $f^{-1}(x)$. Είναι $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι τα M, M_1 είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο (ε)

Αυτό όμως είναι φανερό από την ισότητα των τριγώνων $O\hat{A}M$ και $O\hat{B}M$.

Σημείωση: 1. Αν η $f: A \to B$ είναι (1-1) και επί τότε $\forall\, x \in A$ έχουμε:

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x$. Δηλαδή η $f^{-1} \circ f$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο A.

Όμοια $\forall\, y \in B$ έχουμε: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f \circ f^{-1})(y) = y$. Δηλαδή η $f \circ f^{-1}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο B.

2. Για την f και f^{-1} ισχύουν: i) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f^{-1})$

ii) $\mathcal{R}(f) = \mathcal{D}(f^{-1})$

3.26. Αντίστροφη και μονοτονία.

Θεώρημα. Αν μια συνάρτηση επί είναι και γνησίως μονότονη τότε η f αντιστρέφεται και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Απόδειξη: 1ος τρόπος: Έστω ότι η f είναι γνήσια αύξουσα τότε με

$x_1 > x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow y_1 > y_2$ (1).

Ας υποθέσουμε ότι η f^{-1} δεν ήταν γνήσια αύξουσα τότε θα ήταν φθίνουσα επομένως από την (1) έχουμε:

$y_1 > y_2 \overset{f^{-1}\downarrow}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ που είναι άτοπο.

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος: Ονομάζουμε $\lambda' = \dfrac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2} = \dfrac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}} = \dfrac{1}{\lambda}$ όπου $\lambda = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

Τότε αν $f\uparrow \Rightarrow \frac{1}{\lambda} > 0 \Rightarrow \lambda' > 0 \Rightarrow f^{-1}\uparrow$

Αν δε $f\downarrow \Rightarrow \frac{1}{\lambda} < 0 \Rightarrow \lambda' < 0 \Rightarrow f^{-1}\downarrow$

Σχόλιο.

Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f: A' \to B$ με τύπο $y = f(x)$ είναι αντιστρέψιμη αρκεί να αποδείξουμε μια από τις σχέσεις:

1. $\forall y \in B$ η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μια μόνο λύση ως προς x.
2. Η f είναι (1-1) και επί.
3. $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ και επί.
4. $\forall x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ και επί.

Για να βρούμε τον τύπο της f^{-1} λύνουμε τον τύπο της f ως προς x και αλλάζουμε τις μεταβλητές είναι δε $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$ με τύπο $f(x) = x+\frac{1}{x}$
Να εξεταστεί αν είναι επί.

Λύση: Επειδή δίνεται ο τύπος της f θα βρούμε το $\mathcal{R}(f)$.

Έχουμε: $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R}$ με $y = x+\frac{1}{x}\} = \{y \in \mathbb{R}: xy = x^2+1\} =$

$= \{y \in \mathbb{R}: x^2-xy+1 = 0\}$ οπότε πρέπει: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow y^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow (y-2)(y+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow y \geq 2 \vee y \leq -2$. Άρα $\mathcal{R}(f) = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ και επειδή

$\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}-\{0\} = B$ η f δεν είναι επί.

2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x-\frac{1}{x}$
Είναι η f επί;

Λύση: 1ος τρόπος. Βρίσκουμε το $\mathcal{R}(f)$ από τον τύπο της f. Είναι:

$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R}: y = x-\frac{1}{x}\}$. Αλλά $y = x-\frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = x^2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-xy-1 = 0$ και επειδή $x \in \mathbb{R}$ πρέπει: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow y^2+4 \geq 0$ που ισχύει

$\forall y \in \mathbb{R}$ επομένως είναι $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ και η f είναι επί.

2ος τρόπος. Για να δείξουμε ότι η f είναι επί αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $y = f(x)$ έχει $\forall y \in \mathbb{R}$ μια τουλάχιστο λύση $x \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Αλλά είναι $y = f(x) \Leftrightarrow y = x-\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2-xy-1 = 0$ οπότε υπάρχει πάντοτε

$x \in \mathbb{R}$ επειδή $\forall y \in \mathbb{R}$ η διακρίνουσα της $x^2-xy-1 = 0$ είναι >0.

3. **Έστω η συνάρτηση $f: [-\sqrt{8}, \sqrt{8}] \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x) = x\sqrt{8-x^2}$.**
   Να εξετάσετε αν η f είναι επί.

Λύση: Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f από το δοσμένο τύπο.
Είναι $y = x\sqrt{8-x^2} \Longleftrightarrow \{xy \geq 0,\ y^2 = x^2(8-x^2)\} \Longleftrightarrow \{xy \geq 0,\ x^4-8x^2+y^2 = 0\}$
$\Longleftrightarrow \{xy \geq 0,\ \omega^2-8\omega+y^2 = 0,\ \omega = x^2\}$
και θα πρέπει η δευτεροβάθμια εξίσωση να δώσει λύσεις πραγματικές και θετικές.
Δηλαδή: $\{\Delta \geq 0,\ \omega_1+\omega_2 = \frac{8}{1} > 0,\ \omega_1\omega_2 = y^2 \geq 0\} \Longleftrightarrow 16-y^2 \geq 0 \Longleftrightarrow -4 \leq y \leq 4$ και

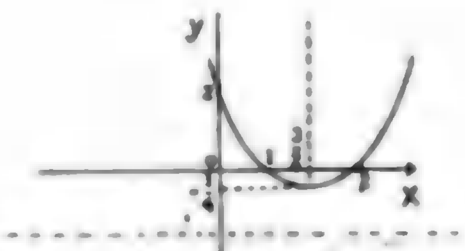
επειδή $xy \geq 0$ έχουμε $\mathcal{R}(f) = [-4,4]$.
Άρα η f δεν είναι επί.

4. **Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2-3x+2$.**
   Να εξετάσετε αν είναι επί.

Λύση: 1ος τρόπος. Βρίσκουμε το $\mathcal{R}(f)$ από τον τύπο της f.
Είναι: $y = x^2-3x+2 \Longleftrightarrow x^2-3x+2-y = 0$ και πρέπει $\Delta \geq 0 \Longleftrightarrow 9-4(2-y) \geq 0$
$\Longleftrightarrow 4y \geq -1 \Longleftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}$. Άρα $\mathcal{R}(f) = [-\frac{1}{4}, +\infty)$ και επειδή $\mathcal{R}(f) \subsetneq \mathbb{R}$ η f δεν είναι επί.

2ος τρόπος. Για να είναι επί πρέπει $\forall\, y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $y = f(x)$ να δώσει μια τουλάχιστο λύση $x \in \mathbb{R}$. Αλλά με $y = -2 \in \mathbb{R}$ παίρνουμε $-2 = x^2-3x+2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2-3x+4 = 0$ που έχει ρίζες μη πραγματικές άρα η f δεν είναι επί.

3ος τρόπος.
Παριστάνουμε γραφικά την f και βλέπουμε από το (σχήμα 1) ότι υπάρχουν παράλληλες προς τον xx' που δεν τέμνουν το διάγραμμα της f. Επομένως η f δεν είναι επί.



Σχ. 1

5. **Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ με τύπο $f(x) = 3^{2x-1}+2\cdot 3^{x-1}$.**
   Να εξετάσετε αν είναι επί.

Λύση: Βρίσκουμε το $\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R}: \exists\, x \in \mathbb{R}$ με $y = 3^{2x-1}+2\cdot 3^{x-1}\}$.
Αλλά είναι: $y = 3^{2x-1}+2\cdot 3^{x-1} \Longleftrightarrow y = 3^{2x}3^{-1}+2\cdot 3^{x}3^{-1} \Longleftrightarrow 3y = 3^{2x}+2\cdot 3^{x} \Longleftrightarrow$

$\leftrightarrow (3^x = \omega > 0,\ 3y = \omega^2+2\omega) \leftrightarrow (\omega^2+2\omega-3y = 0,\ 3^x = \omega > 0)$.

Πρέπει τώρα να βρούμε τα $y \in \mathbb{R}$: η εξίσωση $\omega^2+2\omega-3y = 0$ να δώσει πραγματική και θετική λύση. Δηλαδή πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις.

$(\Delta \geq 0,\ \omega_1 > 0$ ή $\omega_2 > 0) \leftrightarrow (1+3y \geq 0,\ \omega_1 = -1+\sqrt{1+3y} > 0$ ή $-1-\sqrt{1+3y} > 0) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (y \geq -\frac{1}{3},\ \sqrt{1+3y} > 1$ ή $\sqrt{1+3y} < -1) \leftrightarrow (y \geq -\frac{1}{3},\ y > 0) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow y > 0 \leftrightarrow \mathcal{R}(f) = (0,+\infty) = \mathbb{R}^*$. Άρα η f είναι επί.

6. Έστω η συνάρτηση f: $[0,6] \to (-\infty,10]$ που καθορίζεται από την σχέση $f(x,y) = 0 \leftrightarrow x^2+y^2+9 = 2(3x+4y)$. Να εξετάσετε αν είναι επί.

Λύση: Θα βρούμε το $\mathcal{R}(f)$ αφού μας έχει δοθεί η εξίσωση $f(x,y) = 0 \leftrightarrow$

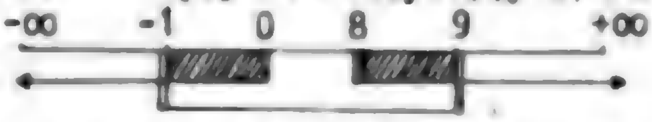
$\leftrightarrow x^2+y^2+9-6x-8y = 0 \leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2-16 = 0 \leftrightarrow (x-3)^2-16 = (y-4)^2$

$\leftrightarrow (x-3)^2 = y^2-8y$ (1) και επειδή $0 \leq x \leq 6 \leftrightarrow -3 \leq x-3 \leq 3 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow |x-3| \leq 3 \leftrightarrow 0 \leq (x-3)^2 \leq 9$ οπότε η (1) γίνεται:

$0 \leq y^2-8y \leq 9 \leftrightarrow (y^2-8y \geq 0,\ y^2-8y-9 \leq 0) \leftrightarrow (y(y-8) \geq 0, (y+1)(y-9) \leq 0)$

$\leftrightarrow (y \geq 8 \vee y \leq 0$ και $-1 \leq y \leq 9) \leftrightarrow$



$\leftrightarrow (-1 \leq y \leq 0$ ή $8 \leq y \leq 9)$ και επειδή $\leftrightarrow \mathcal{R}(f) = [-1,0] \cup [8,9] \subseteq (-\infty,10]$.

Άρα η f δεν είναι επί.

7. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+2, & x > 2 \\ +x+\frac{1}{4}, & x \leq 2 \end{cases}$

Δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Λύση: Εξετάζουμε πρώτα αν κάθε κλάδος της f είναι 1-1.

α) Αν $x_1,x_2 \in (2,+\infty)$ και $f(x_1) = f(x_2) \to x_1^2-3x_1+2 = x_2^2-3x_2+2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)-3(x_1-x_2) = 0 \leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-3) = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2$

γιατί $x_1+x_2-3 \neq 0$ επειδή με $x_1>2,\ x_2>2 \to x_1+x_2>4 \leftrightarrow x_1+x_2-3>1>0$.

Άρα η $f(x) = x^2-3x+2$ όταν $x>2$ είναι 1-1. Όμοια αν $x_1,x_2 \in (-\infty,2]$ και $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1+\frac{1}{4} = x_2+\frac{1}{4} \leftrightarrow x_1 = x_2$.

Άρα και η $f(x) = x+\frac{1}{4}$ είναι 1-1 όταν $x \leq 2$. Ακόμη θα πρέπει αν $\mathcal{R}_1(f)$ είναι το σύνολο τιμών της f με τύπο $f(x) = x^2-3x+2$ αν $x>2$ και $\mathcal{R}_2(f)$ είναι το σύνολο τιμών της f με τύπο $f(x) = x+\frac{1}{4}$ αν $x \leq 2$ να ισχύουν.

1) $\mathcal{R}_1(f) \cup \mathcal{R}_2(f) = \mathbb{R}(f)$ και $\mathcal{R}_1(f) \cap \mathcal{R}_2(f) = \emptyset$.

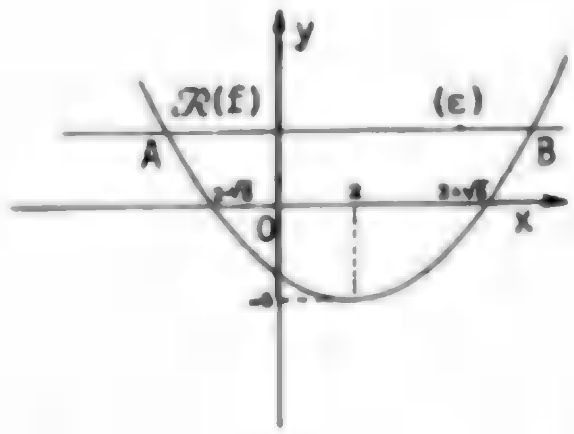
Αλλά είναι $\mathcal{R}_1(f) = (0,+\infty)$ και $\mathcal{R}_2(f) = (-\infty,0]$ οπότε έχουμε:

$\mathcal{R}(f) = (-\infty,0] \cup (0,+\infty) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{R}_1(f) \cap \mathcal{R}_2(f) = \emptyset$

Επομένως η f είναι 1-1.

8. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2-4x-1$.
Να εξετάσετε αν είναι (1-1). Αν δεν είναι σε ποιά υποσύνολα του πεδίου ορισμού της η f είναι 1-1.

Λύση: **1ος τρόπος.** Η f έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ και $f(x_1) = f(x_2)$
$\Leftrightarrow x_1^2-4x_1-1 = x_2^2-4x_2-1 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)-4(x_1-x_2) = 0$
$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ή $x_1+x_2-4 = 0$.
Άρα η f δεν είναι 1-1.
2ος τρόπος. Σύνολο τιμών της f είναι τα $y\in\mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $y = x^2-4x-1$ έχει λύση και είναι μοναδική.
Όμως είναι $\mathcal{R}(f) = [-5,+\infty)$ και η εξίσωση δίνει για το x δύο λύσεις για κάποιο $y\in[-5,+\infty)$ γιατί είναι $x = 2\pm\sqrt{4+(y+1)} = 2\pm\sqrt{y+5}$.
Άρα η f δεν είναι (1-1).
3ος τρόπος. Η γραφική παράσταση της f είναι το διπλανό σχήμα σύνολο τιμών της f είναι τα σημεία του άξονα yy' που αντιστοιχούν στην προβολή του διαγράμματος της f.



Αν από κάποιο σημείο φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα xx' αυτή τέμνει το διάγραμμα της f σε δύο σημεία Α και Β. Επομένως η f δεν είναι 1-1.
Αν τώρα σαν πεδίο ορισμού της f θεωρήσουμε ένα από τα υποσύνολα
$\mathcal{D}_1(f) = [2,+\infty)$ ή $\mathcal{D}_2(f) = (-\infty,2)$ του $\mathcal{D}(f)$ τότε η f είναι 1-1.
Πράγματι έστω ότι f: $[2,+\infty)\to[-5,+\infty)$ με τύπο $f(x) = x^2-4x+1$ τότε
αν $x_1,x_2\in[2,+\infty)$ και $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2-4x_2+1 = x_2^2-4x_2+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)-4(x_1-x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ γιατί $x_1+x_2-4 \neq 0$ επειδή με $x_1 \geq 2$ και $x_2 > 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1+x_2 > 4 \Leftrightarrow x_1+x_2-4 > 0$. Άρα η f είναι (1-1).
Όμοια εργαζόμαστε όταν πεδίο ορισμού της f θεωρήσουμε το $\mathcal{D}_2(f) = (-\infty,2)$ ακολουθώντας ένα οποιοδήποτε τρόπο από τους παραπάνω.

9 . Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \kappa x^8+\lambda x^7+\mu$, $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\kappa \neq 0$.
Να εξετάσετε αν η f είναι (1-1)

Απάντηση: Αρκεί να βρούμε δύο $x\in\mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και να βρούμε τα αντίστοιχα $f(x_1), f(x_2)$ αν συμπέσει $f(x_1) = f(x_2)$ τότε η f δεν είναι 1-1.

Επειδή στον τύπο της f το μ είναι ανεξάρτητο από τις μεταβολές του $x \in \mathbb{R}$ την f την γράφουμε $f(x) = x^7(\kappa x+\lambda)+\mu$.

Οι τιμές που μηδενίζουν το γινόμενο $x^7(\kappa x+\lambda)$ είναι $x = 0$ και $x = -\frac{\lambda}{\kappa}$ που είναι οι ποιό κατάλληλες για να δώσουμε στο x έτσι ώστε η f να γίνει ανεξάρτητη του x.

Για να υπάρχει όμως η μια από αυτές θα πρέπει για τον κ να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Έστω $\kappa \neq 0$ τότε με $x_1 = 0$ και $x_2 = -\frac{\lambda}{\kappa}$ έχουμε $f(x_1) = \mu$ και $f(x_2) = f(-\frac{\lambda}{\kappa}) = \mu$. Δηλαδή $f(x_1) = f(x_2)$ και η f δεν είναι (1-1)

Αν $\kappa = 0$ τότε η f γίνεται $f(x) = \kappa x^8+\mu$ και με $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$ έχουμε $f(1) = \kappa+\mu$ και $f(-1) = \kappa+\mu$. Δηλαδή $f(x_1) = f(x_2) = \kappa+\mu$

Άρα και πάλι η f δεν είναι 1-1.

10. Η συνάρτηση $f: [-1,1] \to \widetilde{\mathbb{R}}$ ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x = -1 \\ \dfrac{x}{1-|x|}, & -1 < x < 1 \\ +\infty, & x = 1 \end{cases}$$

Δείξετε ότι η f είναι (1-1).

Λύση: Στο σύνολο $[-1,1]$ θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$.

i) Αν $y = -\infty$ τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση η $x = -1$

ii) Αν $y = +\infty$ τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση η $x = +1$

iii) Αν $y \in \mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $y = \frac{x}{1-|x|} \leftrightarrow (xy \geq 0$ και $|y| = \frac{x}{1-|x|}$)

γιατί $|x| < 1 \leftrightarrow (xy \geq 0 \wedge |x| = \frac{y}{1+|y|}) \leftrightarrow x = \frac{y}{1+|y|}$

Άρα υπάρχει μοναδική λύση

11. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x+\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και είναι:

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}(x-\beta)$.

Απόδειξη: 1ος τρόπος. Έστω $y \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την εξίσωση $y = \alpha x+\beta \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \alpha x = y-\beta \leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}(y-\beta)$ η οποία $\forall\, y \in \mathbb{R}$ έχει μια και μόνο πραγματική λύση $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι αντιστρέψιμη και έχουμε $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}(y-\beta)$ και αν ονομάσουμε x την ανεξάρτητη μεταβλητή της αντίστροφης έχουμε:

$f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$.

2ος τρόπος. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \rightarrow \alpha x_1 \neq \alpha x_2 \rightarrow \alpha x_1+\beta \neq \alpha x_2+\beta \rightarrow$
$\rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα η f είναι (1-1).

Επειδή δε είναι $f(A) = \mathbb{R} = \mathcal{R}(f)$ είναι και επί επομένως η f είναι αντιστρέψιμη κ.λ.π...

12. **Έστω η συνάρτηση $f: [-1,2] \rightarrow [1,7]$ με τύπο $f(x) = 2x+3$.**
Δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη επί του $[1,7]$ και βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

Λύση: 1ος τρόπος. Έστω $y \in [1,7]$ θεωρούμε την εξίσωση $y = 2x+3 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow 2x = y-3 \leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$ που $\forall\, y \in [1,7]$ δίνει μοναδική λύση.

Αρκεί να δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι παραδεχτή δηλαδή ανήκει στο $[-1,2]$.

Έχουμε: $x \in [-1,2] \leftrightarrow -1 \leq \frac{y-3}{2} \leq 2 \leftrightarrow -2 \leq y-3 \leq 4 \leftrightarrow 1 \leq y \leq 7$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη επί του $[1,7]$ και είναι

$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ $\forall\, y \in [1,7]$ και αν σαν ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρήσουμε το x έχουμε: $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ $\forall\, x \in [1,7]$.

2ος τρόπος. Έστω $x_1, x_2 \in [-1,2]$ τότε $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow 2x_1+3 = 2x_2+3$
$\leftrightarrow x_1 = x_2$. Άρα η f είναι (1-1) και επί.

Γιατί είναι $y = 2x+3 \leftrightarrow y = \frac{x-3}{2}$ και επειδή $x \in [-1,2] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow -1 \leq \frac{y-3}{2} \leq 2 \leftrightarrow -2 \leq y-3 \leq 4 \leftrightarrow 1 \leq y \leq 7 \rightarrow \mathcal{R}(f) = [1,7]$.

Επομένως η f είναι αντιστρέψιμη και είναι $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ $\forall y \in [1,7] \rightarrow$
$\rightarrow f^{-1}: [1,7] \rightarrow [-1,2]$ με τύπο $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

13. **Έστω η συνάρτηση $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$**
Δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να βρεθεί ο τύπος της.

Λύση: 1ος τρόπος. Θεωρούμε την εξίσωση $y = \frac{x}{1-|x|} \leftrightarrow \{y = \frac{x}{1-|x|}, xy \geq 0\}$

γιατί $x\in(-1,1) \leftrightarrow (|y|-|x||y| = |x|,\ xy\geq 0) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (|x| = \frac{|y|}{1+|y|},\ xy\geq 0) \leftrightarrow x = \frac{y}{1+|y|}$ οπότε $\forall\ y\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x\in\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι βρίσκεται στο $(-1,1)$.

Έχουμε $x\in(-1,1) \leftrightarrow |x|<1 \leftrightarrow \frac{|y|}{1+|y|}<1 \leftrightarrow |y|<1+|y| \leftrightarrow 1>0$

που ισχύει $\forall\ y\in\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι αντιστρέψιμη.

Είναι δε $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+|y|}$ και αν θέσουμε στην θέση της μεταβλητής y το x

έχουμε f^{-1}: $\mathbb{R}\to(-1,1)$ με τύπο $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

2ος τρόπος. Έστω $x_1,x_2\in(-1,1)$ τότε

$f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow \frac{x_1}{1-|x_1|} = \frac{x_2}{1-|x_2|} \leftrightarrow (x_1x_2\geq 0 \wedge x_1(1-|x_2|) = x_2(1-|x_1|)) \leftrightarrow$

$(x_1x_2\geq 0 \wedge x_1-x_2 = x_1|x_2|-x_2|x_1|) \leftrightarrow x_1= x_2$.

Άρα η f είναι (1-1). Επίσης είναι:

$y = \frac{x}{1-|x|} \leftrightarrow (xy\geq 0,\ |y| = \frac{|x|}{1-|x|}) \leftrightarrow (|x| = \frac{|y|}{1+|y|},\ xy\geq 0)$

Άρα με $x\in(-1,1) \leftrightarrow |x|<1 \leftrightarrow \frac{|y|}{1+|y|}<1 \leftrightarrow 1>0\ \forall\ y\in\mathbb{R}$.

Επομένως $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ και η f είναι επί συνεπώς είναι αντιστρέψιμη κ.λ.π.

Για να είναι δεχτή πρέπει $-1<x<1 \leftrightarrow -1<\frac{y}{1+|y|}\ 1 \leftrightarrow \left|\frac{|y|}{1+|y|}\right|<1 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow |y|<1+|y| \leftrightarrow 1>0$ που ισχύει. Επομένως σε κάθε μια από τις περιπτώσεις η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση.

Άρα η f είναι (1-1) και επί.

14. Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to(-1,1)$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Δείξετε ότι η f είναι (1-1) και επί.

Απόδειξη: Η f γράφεται με πολλαπλό τύπο και είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & x\geq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & x<0 \end{cases} \quad \text{οπότε } \mathcal{D}(f) = (-\infty,0)\cup[0,+\infty) = \mathbb{R}.$$

Για να δείξουμε ότι είναι (1-1) αρκεί να δείξουμε ότι είναι γνήσια μονότονη στο $\mathcal{D}(f)$.

Έχουμε από τον πρώτο τύπο της f αν θεωρήσουμε την ορίζουσα

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1>0 \rightarrow f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

όμοια από το δεύτερο τύπο έχουμε $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow f\uparrow$ στο $(-\infty,0)$

και αν $x_1 = -1 < x_2 = 1 \rightarrow f(x_1) = f(-1) = -\frac{1}{2} < f(x_2) = f(1) = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, επομένως η f είναι (1-1) επί του (-1,1)

Άρα υπάρχει η f^{-1} και με βάση γνωστή πρόταση είναι γνησίως αύξουσα επί του (-1,1)

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.27. Η εκθετική συνάρτηση.

Ισχύουν οι ιδιότητες:

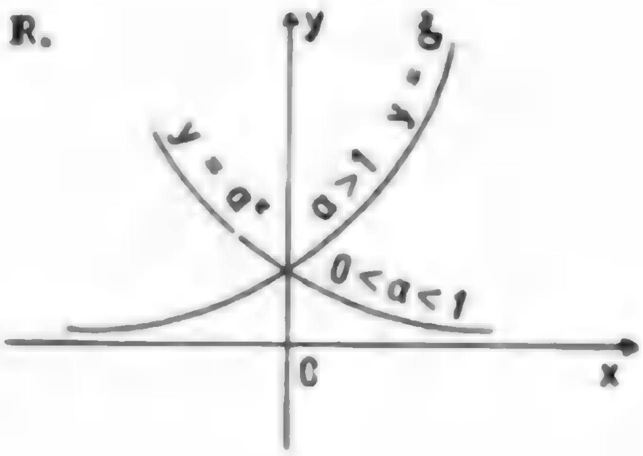
1. $\alpha^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{Q}$ (Q = σύνολο των ρητών)
2. $\alpha^x = 1$, με $\alpha = 1$, $x \in \mathbb{Q}$
3. $\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y} \ \forall x,y \in \mathbb{Q}$
4. $\alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y} \ \forall x,y \in \mathbb{Q}$
5. $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy} \ \forall x,y \in \mathbb{Q}$
6. $(\alpha\beta)^x = \alpha^x \beta^x \ \forall x \in \mathbb{Q}$

Αν $x \notin \mathbb{Q}$ τότε ορίζεται το σύμβολο α^x και είναι μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*_+$ και τύπο $f(x) = \alpha^x$.

Η παραπάνω συνάρτηση ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση με βάση α**, και έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}^*_+$.

Ισχύουν οι ιδιότητες:

1. Αν $\alpha > 1 \rightarrow \alpha^x \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.
2. Αν $0 < \alpha < 1 \rightarrow \alpha^x \downarrow$ στο $\mathbb{R}$.
3. Αν $\alpha = 1 \rightarrow \alpha^x = 1 \rightarrow \alpha^x$ = σταθερή στο $\mathbb{R}$.
4. Αν $x > 0$ και $\alpha > \beta \rightarrow \alpha^x > \beta^x$.
5. Αν $x < 0$ και $\alpha > \beta \rightarrow \alpha^x < \beta^x$.
6. Η $f(x) = \alpha^x$ είναι (1-1)
7. Η $f(x) = \alpha^x$ είναι επί του $\mathbb{R}^*_+$.
8. Η $f(x) = \alpha^x$ είναι αντιστρέψιμη.
9. Η $f(x) = \alpha^x$ έχει γραφική παράσταση την:



3.28. Η λογαριθμική συνάρτηση.

Η εκθετική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ με $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ είναι (1-1) και επί του $\mathbb{R}_+^*$. Άρα υπάρχει η αντίστροφη της f^{-1} και είναι (1-1) και επί. Την συμβολίζουμε με $f^{-1} = \log_a$ και την ονομάζουμε **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση a.

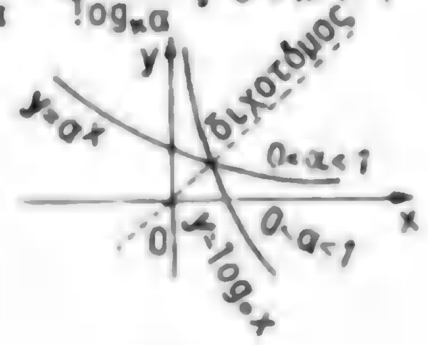
Η τιμή της $\log_a$ στη θέση x ονομάζεται **λογάριθμος** του x με βάση a και συμβολίζεται $\log_a x$.

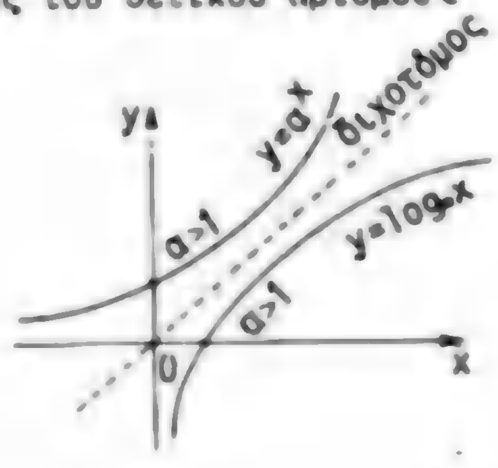
Ισχύουν:

1. $y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y$ και για την αντίστροφη $f^{-1}(x) = \log_a x$.
2. $a^0 = 1 \leftrightarrow 0 = \log_a 1$
3. $a^1 = a \leftrightarrow 1 = \log_a a$
4. $x = a^{\log_a x}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$
5. $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

Ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < a \neq 1$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, 0 < a \neq 1$
3. $\log_a x^\nu = \nu \log_a x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\nu \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$
4. $\log_a \sqrt[\nu]{x} = \dfrac{1}{\nu} \log_a x$
5. Αν $\log_a x > \log_a y \leftrightarrow \begin{cases} x > y > 0 & \text{αν } a > 1 \\ 0 < x < y & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$
6. Αν $\log_a x = \log_a y \leftrightarrow x = y > 0$, $0 < a \neq 1$
7. Αν $a > 1$ τότε η $\log_a$ είναι ↑ στο $\mathbb{R}_+^*$.
8. Αν $0 < a < 1$ τότε η $\log_a$ είναι ↓ στο $\mathbb{R}_+^*$.
9. Πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}_+^*$.
10. Σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$.
11. Το σύμβολο log θ λέγεται δεκαδικός λογάριθμος του θετικού αριθμού θ και βάση θεωρείται το 10 που παραλείπεται.
12. Ισχύει $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a} = \dfrac{\log_\kappa x}{\log_\kappa a}$, $0 < \kappa \neq 1$
13. Η λογαριθμική συνάρτηση έχει γραφική παράσταση την:





ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g, h με $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = 5^x$, $x \in \mathbb{Q}$. Δείξετε ότι:

   i) $g(\frac{1}{3})g(\frac{2}{3}) = 9$

   ii) $[h(\frac{1}{3})]^9 = 125$

   iii) $f(4)g(4) = 1296$.

Λύση: i) Είναι $g(\frac{1}{3})g(\frac{3}{2}) = 3^{\frac{1}{2}}3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

ii) Είναι $[h(\frac{1}{3})]^9 = (5^{\frac{1}{3}})^9 =$ [illegible] $= 5^{\frac{9}{3}} = 125$

iii) Είναι $f(4)g(4) = 2^4 3^4 = 6^4 = 1296$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f_α με $f_\alpha(x) = \alpha^x$. Να υπολογίσετε τον α έτσι ώστε $f_\alpha(1)f_\alpha(3) = 81$

Λύση: Είναι $f_\alpha(1)f_\alpha(3) = 81 \longleftrightarrow \alpha^1\alpha^3 = 81 \longleftrightarrow \alpha^4 = 3^4 \longleftrightarrow \alpha = 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^x$

   Να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η f.

Λύση: Πρέπει η βάση να είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή:

$\frac{2x-1}{x+2} > 0 \longleftrightarrow (2x-1)(x+2) > 0 \longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$ ή $x < -2$ επομένως $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup$ $\cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{\lambda-1}{3\lambda-1}\right)^x$

   Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ έτσι ώστε η f να είναι γνήσια φθίνουσα.

Λύση: Πρέπει η βάση να είναι μικρότερη της μονάδας και θετική.

Δηλαδή: $0 < \frac{\lambda-1}{3\lambda-1} < 1 \longleftrightarrow (\frac{\lambda-1}{3\lambda-1} > 0 \wedge \frac{\lambda-1}{3\lambda-1} < 1) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow ((\lambda-1)(3\lambda-1) > 0 \wedge \frac{\lambda-1}{3\lambda-1} - 1 < 0) \longleftrightarrow (\lambda > 1$ ή $\lambda < \frac{1}{3} \wedge \frac{\lambda-1-3\lambda+1}{3\lambda-1} < 0) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow (\lambda > 1$ ή $\lambda < \frac{1}{3}$ και $\frac{-2\lambda}{3\lambda-1} < 0) \longleftrightarrow (\lambda > 1$ ή $\lambda < \frac{1}{3}$ και $\frac{\lambda}{3\lambda-1} > 0) \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow (\lambda > 1$ ή $\lambda < \frac{1}{3}$ και $\lambda(3\lambda-1) > 0) \longleftrightarrow (\lambda > 1$ ή $\lambda < \frac{1}{3}$ και $\lambda > \frac{1}{3}$ ή $\lambda < 0) \longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda < 0$, ή $\lambda > 1$

Άρα αν $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ τότε η f είναι γνήσια φθίνουσα.

5. Δίνονται οι ανισώσεις: 1. $2^{x^2-4x-1} < 1$ 2. $(\frac{1}{2})^{\sqrt[6]{x^2-16}} > 1$

Να προσδιορίσετε τα πραγματικά x τα οποία τις επαληθεύουν.

Λύση: 1. Πρέπει $x^2-4x-1 < 0 \Leftrightarrow x^2-2 \cdot 2x+4-5 < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2-5 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5}) < 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5}$.

Άρα τα $x \in \mathbb{R}$ που επαληθεύουν την (1) είναι $x \in (2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$

2. Πρέπει: $\sqrt[6]{x^2-16} < 0 \Leftrightarrow x^2-16 < 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με: $f(x) = \frac{\alpha^x+\alpha^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{\alpha^x-\alpha^{-x}}{2}$

και $\alpha \in \mathbb{R}^*_+-\{1\}$. Δείξετε ότι:

i) $f^2(x)-g^2(x) = 1$, ii) $f(x+y) = f(x)f(y)+g(x)g(y)$

iii) $g(x+y) = f(x)g(y)+f(y)g(x)$.

Λύση: i) Είναι $f^2(x)-g^2(x) = (\frac{\alpha^x+\alpha^{-x}}{2})^2-(\frac{\alpha^x-\alpha^{-x}}{2})^2 = \frac{\alpha^{2x}+\alpha^{-2x}+2}{4}-$

$-\frac{\alpha^{2x}+\alpha^{-2x}-2}{4} = 1$

ii) Έχουμε: $f(x)f(y)+g(x)g(y) = \frac{\alpha^x+\alpha^{-x}}{2} \cdot \frac{\alpha^y+\alpha^{-y}}{2}+\frac{\alpha^x-\alpha^{-x}}{2} \cdot \frac{\alpha^y-\alpha^{-y}}{2}$

$\frac{\alpha^{x+y}+\alpha^{x-y}+\alpha^{-x+y}+\alpha^{-x-y}}{4}+\frac{\alpha^{x+y}-\alpha^{x-y}-\alpha^{-x+y}+\alpha^{-x-y}}{4} = \frac{2\alpha^{x+y}+2\alpha^{-x-y}}{4} =$

$= \frac{\alpha^{x+y}+\alpha^{-x-y}}{2} = f(x+y)$

iii) Είναι $f(x)g(y)+f(y)g(x) = \frac{\alpha^x+\alpha^{-x}}{2} \cdot \frac{\alpha^y-\alpha^{-y}}{2}+\frac{\alpha^y+\alpha^{-y}}{2} \cdot \frac{\alpha^x-\alpha^{-x}}{2} =$

$= \frac{\alpha^{x+y}-\alpha^{x-y}+\alpha^{-x+y}-\alpha^{-x-y}}{4}+\frac{\alpha^{y+x}-\alpha^{y-x}+\alpha^{-y+x}-\alpha^{-y-x}}{4} = \frac{2\alpha^{x+y}-2\alpha^{-x-y}}{4} =$

$= \frac{\alpha^{x+y}-\alpha^{-x-y}}{2} = g(x+y)$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (\frac{3}{7})^x+(\frac{4}{9})^x+10$.

Δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση: Θέτουμε $\varphi(x) = (\frac{3}{7})^x$, $g(x) = (\frac{4}{9})^x$ και $h(x) = 10$

Είναι όμως η $\varphi \downarrow$ στο $\mathbb{R}$ η $g \downarrow$ στο $\mathbb{R}$ και η h σταθερή. Επομένως το άθροισμα τους είναι γνησίως φθίνουσα συναρτήση στο $\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = 2^{-|x|+1}$ και $g(x) = 2^{-x^2+3}$
Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq g(x)$ (1).

Λύση: Η (1) $\Leftrightarrow 2^{-|x|+1} \geq 2^{-x^2+3} \Leftrightarrow 2^{-|x|+1+x^2-3} \geq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -|x|+1+x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2-|x|-2 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2-|x|-2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (|x|+1)(|x|-2) \geq 0 \Leftrightarrow |x|-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ή $x \leq -2$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \frac{\log(x^2-7x+12)}{\sqrt{25-x^2}} \qquad g(x) = \log_{4-x^2}\sqrt{4-x^2}$$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των.

Λύση: το πεδίο ορισμού της f θα είναι τα πραγματικά x για τα οποία ισχύει: $\{x^2-7x+12 > 0,\ 25-x^2 > 0,\} \Leftrightarrow \{(x-4)(x-3) > 0,\ (5-x)(5+x) > 0\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{x > 4$ ή $x < 3$ και $-5 < x < 5\} \Leftrightarrow x \in (-5,3) \cup (4,5) \Leftrightarrow \mathcal{D}(f) = (-5,3) \cup (4,5)$.

Το πεδίο ορισμού της g θα είναι τα πραγματικά x για τα οποία θα ισχύει:
$\{4-x^2 \geq 2 \wedge x \in Z\} \Leftrightarrow 4-x^2 \geq 2, x \in Z \Leftrightarrow x \in Z,\ x^2 \leq 2 \Leftrightarrow \{-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x \in Z\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{D}(g) = \{-1,0,1\}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \log_{x+1}\log\sqrt{16-x^2}$
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Λύση: Θα πρέπει: $\{0 < x+1 \neq 1 \wedge \log\sqrt{16-x^2} > 0\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{0 < x+1 \neq 1 \wedge \log\sqrt{16-x^2} > \log 1\} \Leftrightarrow \{0 < x+1 \neq 1 \wedge \sqrt{16-x^2} > 1 \wedge$
$\wedge \sqrt{16-x^2} > 0\} \Leftrightarrow \{-1 < x,\ x \neq 0,\ -4 < x < 4, \sqrt{16-x^2} > 1\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{-1 < x,\ x \neq 0,\ -4 < x < 4,\ -\sqrt{15} < x < \sqrt{15}\} \Leftrightarrow \{-1 < x < 0,\ 0 < x < \sqrt{15}\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{D}(f) = (-1,0) \cup (0,\sqrt{15})$.

11. Έστω η συνάρτηση f με $x \in (-1,1)$ και $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$
Δείξετε ότι: $f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

Λύση: Είναι $f(x)+f(y) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \ln\frac{1+y}{1-y} = \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}$ (1)

και $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \ln\dfrac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}} = \ln\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y} = \ln\frac{(1+x)+y(1+x)}{(1-x)-y(1-x)} =$

$= \ln\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}$ (2).

Από τις (1) και (2) $\rightarrow f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

12. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \log_2(x^2-2(a-2)x+a^2-4)$. Να ορίζεται $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Πρέπει: $x^2-2(a-2)x+a^2-4>0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (1).
Η σχέση (1) είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού και επειδή πρέπει $\forall\, x \in \mathbb{R}$ να είναι θετικό δηλαδή ομόσημο με τον συντελεστή του x^2 πρέπει η διακρίνουσα του να είναι μικρότερη από το μηδέν.
Δηλ. $\Delta < 0 \leftrightarrow 4(a-2)^2-4(a^2-4) < 0 \leftrightarrow (a-2)^2-a^2+4 < 0 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow a^2-4a+4-a^2+4 < 0 \leftrightarrow -4a+8 < 0 \leftrightarrow a > 2$.
Άρα η f ορίζεται $\forall\, x \in \mathbb{R}$ όταν $a > 2$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \log_a x \log_{\frac{1}{a}}(2-x)$ και $0 < a \neq 1$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $\mathcal{D}(f)$ και να δειχτεί ότι η f στο $\mathcal{D}(f)-\{1\}$ διατηρεί σταθερό σημείο.

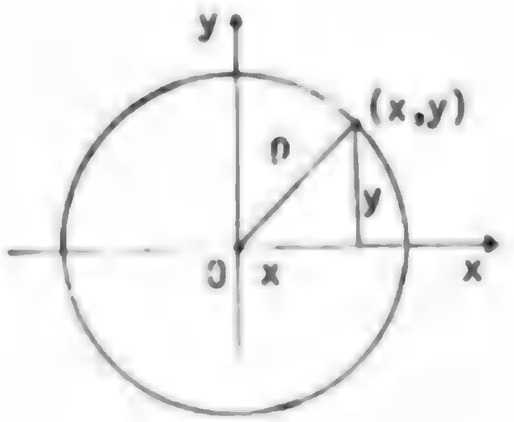
Λύση: Πρέπει $\{x>0 \wedge 2-x>0\} \leftrightarrow 0<x<2 \rightarrow \mathcal{D}(f) = (0,2)$.
Για να δείξουμε ότι η f στο $\mathcal{D}(f)-\{1\}$ διατηρεί σταθερό σημείο αρκεί να δείξουμε ότι $\log_a x \log_{\frac{1}{a}}(2-x) > 0$ (1) $\forall\, x \in (0,1) \cup (1,2)$.

$$\text{Η (1)} \leftrightarrow \frac{\log x}{\log a} \cdot \frac{\log(2-x)}{\log \frac{1}{a}} > 0 \leftrightarrow \frac{\log x \log(2-x)}{-\log^2 a} > 0 \leftrightarrow \log x \log(2-x) < 0 \quad (2)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
i) $0<x<1 \rightarrow \log x < 0$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\log(2-x) > 0 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \log(2-x) > \log 1 \leftrightarrow 2-x > 1 \leftrightarrow x < 1$ που ισχύει.
ii) $1<x<2 \rightarrow \log x > 0$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\log(2-x) < 0 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \log(2-x) < \log 1 \leftrightarrow 2-x < 1 \leftrightarrow x > 1$ που ισχύει.
Άρα η f διατηρεί σταθερό σημείο

3.29. Άλλες χαρακτηριστικές εξισώσεις.

Α. Εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων



(α) $x^2+y^2 = \rho^2$ (ρ = ακτίνα)
Η (α) $\leftrightarrow y^2 = \rho^2-x^2 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow y = \pm\sqrt{\rho^2-x^2}$ (β)
Η (β) δεν είναι συνάρτηση.

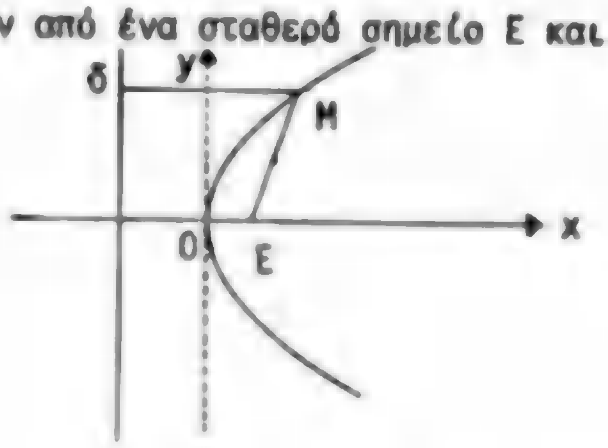
Οι εξισώσεις $y = \sqrt{\rho^2-x^2}$ και $y_1 = -\sqrt{\rho^2-x^2}$ είναι συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το $[-\rho,\rho]$ η ένωση των γραφικών τους παραστάσεων δίνει τη γραφική παράσταση του κύκλου.

1. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο κ(α,β) και ακτίνα ρ είναι: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \rho^2$.

2. Η ευθεία $xx_1+yy_1 = \rho^2$ είναι η εφαπτομένη του κύκλου (α) στο σημείο (x_1,y_1) αυτού.

Β. Εξίσωση παραβολής.

Το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο Ε και από μια σταθερή ευθεία βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη που ονομάζεται παραβολή με εξίσωση:



$y^2 = 2Px$ (ν)

Η Ε λέγεται **εστία** και η (δ) λέγεται **διευθετούσα** η απόσταση της εστίας από την (δ) είναι P

Οι συντεταγμένες του $E(\frac{P}{2},0)$ και η (δ) έχει εξίσωση την $x = -\frac{P}{2}$

Η (ν) $\longleftrightarrow$ $y = \pm\sqrt{2Px}$ $\longleftrightarrow$ $(y = \sqrt{2Px}$ ή $y = -\sqrt{2Px})$

Επομένως η παραβολή είναι η ένωση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων με τύπους $y = \sqrt{2Px}$ και $y = -\sqrt{2Px}$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις. 1. Η ευθεία $yy_1 = P(x+x_1)$ λέγεται εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο (x_1,y_1) αυτής.

2. Αν την κάθετη από την εστία Ε στην διευθετούσα την εκλέγαμε σαν άξονα yy' τότε η εξίσωση της παραβολής θα ήταν $x^2 = 2\rho y \longleftrightarrow y = \frac{1}{2\rho}x^2 =$
$= \alpha x^2$ $(\frac{1}{2\rho} = \alpha)$

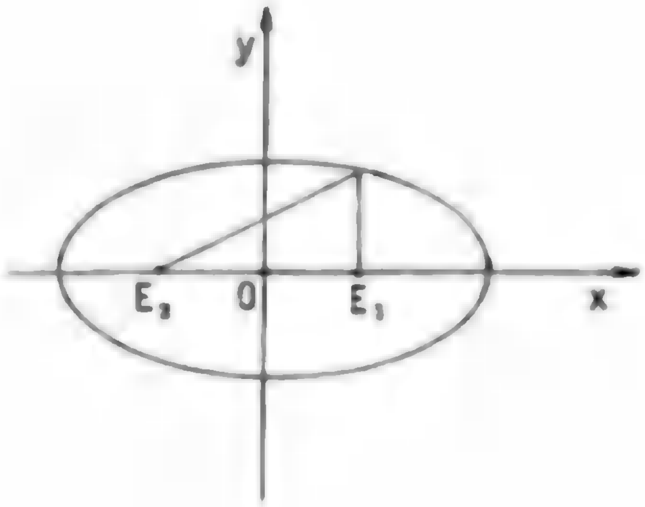
'Αρα το τριώνυμο το Β' βαθμού παριστάνει γραφικά παραβολή)

Η εστία στην 2 έχει συντεταγμένες $E(0,\frac{1}{4\alpha})$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση την $y = -\frac{1}{4\alpha}$.

Γ. Εξίσωση έλλειψης.

Το σύνολο των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεων τους από δύο στα-

θερά σημεία E_1 και E_2 που λέγονται εστίες είναι σταθερό και ίσο με 2α βρίσκονται πάνω σε μια γραμμή που λέγεται έλλειψη και επαληθεύουν την εξίσωση:



$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

Όπου $\alpha^2-\gamma^2=\beta^2$; $E_2(-\gamma,0)$ και $E_1(\gamma,0)$.

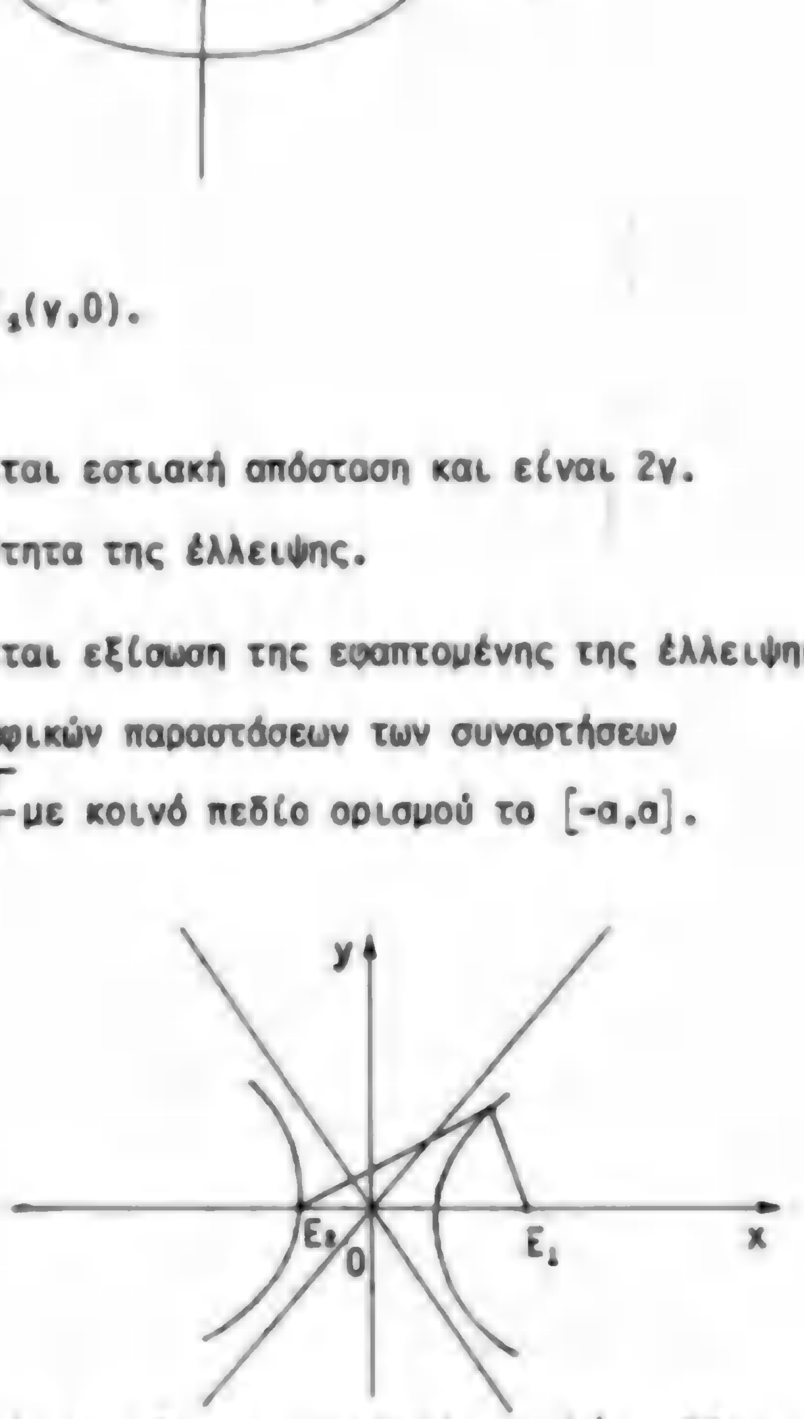
Παρατηρήσεις.

1. Η απόσταση d των εστιών λέγεται εστιακή απόσταση και είναι 2γ.
2. Ο λόγος $\frac{\gamma}{\alpha}$ λέγεται εκκεντρότητα της έλλειψης.
3. Η ευθεία $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$ λέγεται εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης

Η έλλειψη είναι η ένωση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}$ και $-f(x)=\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}$ με κοινό πεδίο ορισμού το $[-\alpha,\alpha]$.

Δ. Εξίσωση υπερβολής.

Το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία $E_1(-\gamma,0)$,$E_2(\gamma,0)$ απολύτως λαμβανομένη είναι σταθερή και ίση με 2α βρίσκονται πάνω σε μια γραμμή που λέγεται υπερβολή και έχει εξίσωση:



$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Όπου $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$.

Παρατηρήσεις: 1. Η απόσταση d μεταξύ των εστιών λέγεται **εστιακή απόσταση** και ο λόγος $\frac{\gamma}{\alpha}>1$ λέγεται **εκκεντρότητα** της υπερβολής.

2. Η εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$ λέγεται εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής

3. Οι ευθείες $y = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $y = \frac{\beta}{\alpha}$ λέγονται οι ασύμπτωτες της υπερβολής

4. Η υπερβολή είναι η ένωση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων $f(x) = \beta\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2}-1}$ και $-f(x) = \beta\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2}-1}$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(-\infty,-\alpha] \cup [\alpha,+\infty)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει:

i) Κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

ii) Κέντρο το σημείο $K(-2,-3)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$

iii) Κέντρο το σημείο $K(4,-1)$ και διέρχεται από το σημείο $(7,3)$

Λύση: i) Η εξίσωση είναι $x^2+y^2 = 2^2$.

ii) Η εξίσωση είναι $(x+2)^2+(y+3)^2 = (\sqrt{3})^2$

iii) Αρκεί να βρούμε την ακτίνα ρ του κύκλου.

Αλλά γνωρίζουμε ότι η απόσταση δύο σημείων με γνωστές συντεταγμένες δίνεται από τον τύπο: $d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ οπότε

$\rho = \sqrt{(4-7)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-4)^2+(y+1)^2 = 25$.

2. Δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+2x-10y+7 = 0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα του.

Λύση: Η εξίσωση γράφεται: $x^2+2x+1+y^2-2.5y+25-25+6 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x+1)^2+(y-5)^2-19 = 0 \leftrightarrow (x+1)^2+(y-5)^2 = (\sqrt{19})^2$.

Επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(-1,5)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{19}$

3. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α,β έτσι ώστε η εξίσωση $y = \alpha x+\beta$ να εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2 = \rho^2$.

Λύση: Για να εφάπτεται η ευθεία στον κύκλο πρέπει το σύστημα $(x^2+y^2 = \rho^2 \wedge y = \alpha x+\beta)$ να έχει μια μόνο πραγματική λύση.

Αντικαθιστούμε το y στην πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$(\alpha x+\beta)^2+x^2 = \rho^2 \leftrightarrow \alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2+x^2 = \rho^2 \leftrightarrow (\alpha^2+1)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2-\rho^2 = 0$ (1)

Για να έχει το σύστημα μια μόνο λύση πρέπει η (1) να έχει διπλή ρίζα δηλ. πρέπει $\Delta = 0 \leftrightarrow \alpha^2\beta^2-(\alpha^2+1)(\beta^2-\rho^2) = 0 \leftrightarrow \alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2+\alpha^2\rho^2-\beta^2+\rho^2 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \rho^2(\alpha^2+1) = \beta^2$. Άρα η ζητούμενη σχεση είναι: $\rho^2(\alpha^2+1) = \beta^2$.

4. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2+y^2 = \lambda^2$ και $Ax+By = \Gamma$ με $|A|+|B| \neq 0$.
Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε το σύστημα των δύο εξισώσεων να έχει μια μόνο λύση. Αν δε x_0,y_0 είναι η λύση αυτή, τότε δείξετε ότι η εξίσωση $Ax+By = \Gamma$ παίρνει τη μορφή $xx_0+yy_0 = \lambda^2$ (i).
Τι παριστάνει γραφικά η (i).

Λύση: Επειδή $|A|+|B| \neq 0 \rightarrow$ έστω $B \neq 0$ οπότε $y = -\frac{A}{B}x+\frac{\Gamma}{B}$

και η εξίσωση $x^2+y^2 = \lambda^2$ γίνεται:

$$x^2+\left(-\frac{A}{B}x+\frac{\Gamma}{B}\right)^2 = \lambda^2 \longleftrightarrow x^2+\frac{A^2}{B^2}x^2+\frac{\Gamma^2}{B^2}-2\frac{A\Gamma}{B^2}x = \lambda^2 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \left(1+\frac{A^2}{B^2}\right)x^2-2\frac{A\Gamma}{B^2}x+\frac{\Gamma^2}{B^2}-\lambda^2 = 0 \quad (1)$$

Για να εχει το σύστημα μια μόνο λύση πρέπει η (1) να έχει διπλή ρίζα.
Δηλαδή η διακρίνουσα της να είναι μηδέν.

$$\text{Είναι } \Delta = 0 \longleftrightarrow \frac{A^2\Gamma^2}{B^4}-\left(1+\frac{A^2}{B^2}\right)\left(\frac{\Gamma^2}{B^2}-\lambda^2\right) = 0 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \frac{A^2\Gamma^2}{B^4}-\frac{\Gamma^2}{B^2}+\lambda^2-\frac{A^2\Gamma^2}{B^4}+\frac{A^2}{B^2}\lambda^2 = 0 \longleftrightarrow \lambda^2\left(1+\frac{A^2}{B^2}\right) = \frac{\Gamma^2}{B^2} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \lambda^2(A^2+B^2) = \Gamma^2 \quad (2).$$

Άρα για να έχει το σύστημα μια μόνο λύση πρέπει να ισχύει η (2).
Η δε διπλή λύση x_0,y_0 του συστήματος είναι:

$$x_0 = \frac{A}{\Gamma}\lambda^2 \text{ και } y_0 = \frac{\lambda^2 B}{\Gamma}$$

Η εξίσωση $Ax+By = \Gamma$ γράφεται $\frac{A}{\Gamma}x+\frac{B}{\Gamma}y = 1$ (3) και αν στην (3) θέσουμε

$\frac{A}{\Gamma} = \frac{x_0}{\lambda^2}$ και $\frac{B}{\Gamma} = \frac{y_0}{\lambda^2}$ η (3) γίνεται $\frac{x_0}{\lambda^2}x+\frac{y_0}{\lambda^2}y = 1 \longleftrightarrow xx_0+yy_0 = \lambda^2$(i)

Γεωμετρικά η (i) παριστάνει την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (x_0,y_0) της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2 = \lambda^2$.

5. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2xy+\lambda x+y+2 = 0 \\ 2x+y = 1 \end{cases}$$

και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων.

Λύση: Λύνουμε την δεύτερη εξίσωση ως προς y και αντικαθιστούμε στην πρώτη και έχουμε:

$$x^2+(1-2x)^2+2x(1-2x)+\lambda x+1-2x+2 = 0 \longleftrightarrow x^2+4x^2-4x+1+2x-4x^2+\lambda x+1-2x+2 = 0$$

$$\longleftrightarrow x^2+(\lambda-4)x+4 = 0 \quad (1).$$

Η διακρίνουσα της (1) είναι:

$\Delta = (\lambda-4)^2-16 = (\lambda-4-4)(\lambda+4+4) = (\lambda-8)\lambda$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $\Delta = 0 \leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 8$ τότε το σύστημα έχει μια μόνο λύση την $x = 2$, $y = -3$, ή $x = -2$, $y = 5$, και η ευθεία $2x+y = 1$ θα εφάπτεται στις περιφέρειες $x^2+y^2+2xy+y+2 = 0$ και $x^2+y^2+2xy+8x+y+2 = 0$ στα σημεία $(x,y) = (2,-3)$ και $(x,y) = (-2,5)$ αντίστοιχα.

ii) Αν $\Delta > 0 \leftrightarrow \lambda > 8$ ή $\lambda < 0$ η ευθεία $2x+y = 1$ με τις περιφέρειες $x^2+y^2+2xy+\lambda x+y+2 = 0$ θα τέμνονται σε δύο σημεία.

iii) Αν $\Delta < 0 \leftrightarrow 0 < \lambda < 8$ το σύστημα δεν έχει καμμιά λύση που σημαίνει ότι η ευθεία $2x+y = 1$ και οι περιφέρειες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

6. Δίνονται οι παραβολές με εξισώσεις

i) $y^2 = 10x$, ii) $y^2 = -5x$.

Να βρεθεί η εξίσωση της διευθετούσας των και οι συντεταγμένες των εστιών τους.

Λύση: i) Η γενική εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2px$. Άρα πρέπει $2p = 10 \leftrightarrow p = 5$. Επομένως η εξίσωση της διευθετούσας δ είναι: $x = -\frac{5}{2}$ και οι συντεταγμένες της εστίας Ε είναι $E(\frac{5}{2},0)$

ii) Πρέπει $2p = -5 \leftrightarrow p = -\frac{5}{2}$ άρα η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{5}{4}$ και οι συντεταγμένες της εστίας είναι $E(-\frac{5}{4},0)$.

7. Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας $3x-2y+6 = 0$ με την παραβολή $y^2 = 6x$.

Λύση: Για να βρούμε τα σημεία τομής αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 6x \\ 3x-2y-6 = 0 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 = 4y+12 \\ x = \frac{2y+6}{3} \end{array}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16+48}}{2} \\ x = \frac{2y+6}{3} \end{array}\right\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y_{1,2} = \frac{4\pm 8}{2} \\ x = \frac{2y+6}{3} \end{array}\right\} \leftrightarrow x = 6,\ y = 6 \text{ και } x = \frac{2}{3},\ y = -2$$

Άρα η ευθεία $3x-2y+6 = 0$ τέμνει την παραβολή στα σημεία $A(6,6)$ και $B(\frac{2}{3},-2)$.

8. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α,β έτσι ώστε η ευθεία $y = \alpha x+\beta$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 2\rho x$.

Λύση: Για να εφάπτεται η ευθεία της παραβολής πρέπει και αρκεί το σύστημα: (Σ) $\left.\begin{matrix} y = \alpha x+\beta \\ y^2 = 2\rho x \end{matrix}\right\}$ να έχει μια μόνο λύση.

Είναι (Σ) $\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = \alpha x+\beta \\ (\alpha x+\beta)^2 = 2\rho x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = \alpha x+\beta \\ \alpha^2x^2+(2\alpha\beta-2\rho)x+\beta^2 = 0 \ (1) \end{matrix}\right\}$

Για να έχει το (Σ) μια μόνο λύση πρέπει η διακρίνουσα της (1) να είναι ίση με μηδέν.

Αλλά $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(\alpha\beta-\rho)^2-4\alpha^2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha\beta\rho+\rho^2 = 0 \Leftrightarrow \rho = 2\alpha\beta$.

Άρα η ζητούμενη συνθήκη είναι $\rho = 2\alpha\beta$.

9. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 6x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $6x-2y+7 = 0$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της $y^2 = 6x$ στο σημείο (x_0,y_0) είναι: $yy_0 = 3(x+x_0) \Leftrightarrow y = +\frac{3}{y_0}x+\frac{3}{y_0}x_0$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda = \frac{3}{y_0}$. Επειδή δε θα είναι παράλληλη με την ευθεία $6x-2y+7 = 0$ (ε) θα έχει τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως με αυτήν αλλά $\lambda_{(\varepsilon)} = 3$.

Επομένως είναι: $\frac{3}{y_0} = 3 \Leftrightarrow y_0 = 1$.

Επειδή όμως το σημείο (x_0,y_0) βρίσκεται πάνω στην παραβολή θα ισχύει $y_0 = 6x_0$ και με $y_0 = 1$ παίρνουμε $1 = 6x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{6}$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι: $y = 3(x+\frac{1}{6})$

10. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία $E_1(-4,0), E_2(4,0)$ και $2\alpha = 18$.

Λύση: Η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\alpha^2-\gamma^2 = \beta^2$ και $\gamma = 4$ οπότε $81-16 = \beta^2 \rightarrow 65 = \beta^2$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{65} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{65})^2} = 1$

11. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που περνά από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Λύση: Αν $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι η ζητούμενη εξίσωση θα έχουμε:

$$\left\{\frac{4}{\alpha^2}+\frac{0}{\beta^2}=1 \wedge \frac{1}{\alpha^2}+\frac{3}{4\beta^2}=1\right\} \leftrightarrow \left|\begin{matrix}\alpha^2=4\\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{3}{4\beta^2}=1\end{matrix}\right| \leftrightarrow \left|\begin{matrix}\alpha^2=4\\ \beta^2=1\end{matrix}\right|$$

Άρα η εξίσωση είναι: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1^2}=1$.

12. Δείξετε ότι οι εξισώσεις:

1) $4x^2+9y^2=1$, 2) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$

Παριστάνουν ελλείψεις και να βρεθούν τα στοιχεία τους.

Λύση: 1. Διαιρούμε τα μέλη της $4x^2+9y^2=1$ με το γινόμενο 4.9 και έχουμε

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=\frac{1}{36} \leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{36}}+\frac{y^2}{\frac{4}{36}}=1 \leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$$

Άρα $\alpha^2=\frac{1}{4}$, $\beta^2=\frac{1}{9}$ και $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$

και οι εστίες είναι τα σημεία, $E_2(-\frac{\sqrt{5}}{6},0)$,$E_1(\frac{\sqrt{5}}{6},0)$

Η (2) γράφεται: $5x^2-2.15x+9y^2+2.9y+9=0 \leftrightarrow 5(x^2-2.3x)+9(y^2+2y)+9=0$

$\leftrightarrow 5(x^2-2.3x+9-9)+9(y^2+2y+1-1)+9=0 \leftrightarrow 5(x-3)^2-45+9(y+1)^2-9+9=0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 5(x-3)^2+9(y+1)^2=45 \leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$

όπου $\alpha^2=9$, $\beta^2=5$, $\gamma^2=9-5=4$ και κέντρο το σημείο K(3,-1).

13. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης της οποίας το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου της από τις εστίες E_1 και E_2 είναι 18 και η απόσταση των εστιών είναι 12.

Λύση: Η εξίσωση θα έχει τη μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Αλλά $2\alpha=18 \rightarrow \alpha=9$ και $2\gamma=12 \rightarrow \gamma=6$ οπότε $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \rightarrow$

$\rightarrow \beta^2=81-36 \rightarrow \beta^2=45$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1$

14. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $4x^2+y^2=1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x+y-1=0$

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (x_0,y_0) αυτής έχει εξίσωση

$\frac{xx_0}{\frac{1}{4}}+yy_0=1 \leftrightarrow y=-\frac{4x_0}{y_0}x+\frac{1}{y_0}$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως

$\lambda = -\frac{4x_0}{y_0}$.

Επειδή δε θα είναι παράλληλη με την x+y-1 = 0 θα πρέπει να έχουν ίσους συντελεστές διευθύνσεως.

Άρα $-\frac{4x_0}{y_0} = -1 \leftrightarrow 4x_0 = y_0$ (1). Αλλά το σημείο (x_0,y_0) θα επαληθεύει και τη σχέση $4x_0^2+y_0^2 = 1$ (2). Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{20}}$ και $y_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι:

$\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y = 1$ και $-\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y = 1$.

15. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η ευθεία $y = \lambda x+\mu$

Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α,β,λ,μ έτσι ώστε η ευθεία να εφάπτεται, να τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία, να μην συναντά την έλλειψη αντίστοιχα.

Λύση: Θεωρούμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix} y = \lambda x+\mu \\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{matrix}\right| \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \begin{matrix} y = \lambda x+\mu \\ (\beta^2+\lambda^2\alpha^2)x^2+2\lambda\mu\alpha^2 x+\mu^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2 = 0 \end{matrix}$

Για να έχει το σύστημα λύση πρέπει η διακρίνουσα της (1) να είναι ≥ 0.

Δηλαδή $\Delta > 0 \leftrightarrow \lambda^2\mu^2\alpha^4-(\beta^2+\lambda^2\alpha^2)(\mu^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2) \geq 0 \leftrightarrow \lambda^2\alpha^2+\beta^2-\mu^2 \geq 0$.

Άρα η ευθεία $y = \lambda x+\mu$ θα εφάπτεται της έλλειψης αν: $\lambda^2\alpha^2+\beta^2 = \mu^2$.

Θα τέμνει την έλλειψη αν $\lambda^2\alpha^2+\beta^2 > \mu^2$ και δεν έχει κανένα κοινό σημείο με αυτήν όταν $\lambda^2\alpha^2+\beta^2 < \mu^2$.

16. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης αν β = 4α και το σημείο Α(2,4) ανήκει σ'αυτήν.

Λύση: Αν $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι η εξίσωση της θα έχουμε το σύστημα:

$(\Sigma): \left\{\frac{4}{\alpha^2}+\frac{16}{\beta^2} = 1 \text{ και } \beta = 4\alpha\right\} \leftrightarrow \left.\begin{matrix} \beta = 4\alpha \\ \frac{4}{\alpha^2}+\frac{16}{16\alpha^2} = 1 \end{matrix}\right| \leftrightarrow \left.\begin{matrix} \beta = 4\alpha \\ \frac{5}{\alpha^2} = 1 \end{matrix}\right| \leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} \beta = 4\alpha \\ \alpha^2 = 5 \end{matrix}\right| \leftrightarrow \begin{matrix} \beta = \pm 4\sqrt{5} \\ \alpha = \pm\sqrt{5} \end{matrix}$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{80} = 1$

17. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E_1(-5,0)$, $E_2(5,0)$ και $2\alpha = 8$.

Λύση: Η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2$ και $\gamma = 5$ επειδή δε $2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4 \Leftrightarrow \beta^2 = 25-16 = 9$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

18. Δείξετε ότι οι εξισώσεις:

i) $16x^2-9y^2 = -144$, ii) $4x^2-y^2-8x-4y-4 = 0$

Παριστάνουν υπερβολές των οποίων να βρεθούν τα στοιχεία τους.

Λύση: i) Είναι $\frac{x^2}{\frac{1}{16}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = -144 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Άρα $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$

ii) Η εξίσωση γράφεται: $4x^2-8x-(y^2+4y)-4 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2-2x)-(y^2+4y)-4=0$

$\Leftrightarrow 4(x^2-2x+1-1)-(y^2+4y+4-4)-4 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2-4-(y+2)^2+4-4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(x-1)^2-(y+2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$

Άρα παριστάνει υπερβολή με κέντρο το σημείο $K(1,-2)$ $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 4$, $\gamma^2 = 5$.

19. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που περνά από τα σημεία $A(-2,0)$, $B(3,-1)$ και σε συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις των ασυμπτώτων.

Λύση: Έστω ότι η εξίσωση είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (1)

Αρκεί να προσδιορίσουμε τα α,β. Επειδή τα σημεία A και B ανήκουν στην (1) θα την επαληθεύουν, άρα έχουμε:

$$\left\{\frac{4}{\alpha^2} = 1 \wedge \frac{9}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = 1\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha^2 = 4 \\ \frac{9}{4} - \frac{1}{\beta^2} = 1\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{matrix}\alpha^2 = 4 \\ \frac{1}{\beta^2} = \frac{5}{4}\end{matrix}$$

Άρα $\alpha^2 = 4$, $\beta^2 = \frac{4}{5}$ και $\gamma^2 = \frac{24}{5}$ και η εξίσωση είναι $\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{4} = 1$

Γνωρίζουμε ότι οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Άρα έχουμε: $y = \frac{1}{\sqrt{5}}x$ και $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x$.

20. Δείξετε ότι κάθε χορδή παράλληλη στον άξονα ισοσκελούς υπερβολής φαίνεται από τις κορυφές τις υπό ορθή γωνία (Μια υπερβολή λέγεται ι-

σοσκελής όταν α = β).

Λύση: Έστω ένα σημείο $A(x_0,y_0)$ της υπερβολής τότε η ευθεία η παράλληλη με τον άξονα της υπερβολής θα τέμνει τον άλλο κλάδο στο σημείο $B(-x_0,y_0)$ και αν K μια κορυφή της υπερβολής αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lambda_{KA}\lambda_{KB} = -1 \iff \frac{y_0-0}{x_0-\alpha}\cdot\frac{y_0}{-x_0-\alpha} = -1 \iff \frac{y_0^2}{-(x_0^2-\alpha^2)} = -1 \iff$$

$$\iff y_0^2 = x_0^2-\alpha^2 \iff x_0^2-y_0^2 = \alpha^2 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα η γωνία AKB = 1 ορθή.

21. Δίνεται η εξίσωση $y = 2x+\lambda$ (1) και η υπερβολή $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16} = 1$.

Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε:

i) η (1) να εφάπτεται της υπερβολής

ii) η (1) να τέμνει την υπερβολή

iii) η (1) να μην τέμνει την υπερβολή.

Λύση: Για να εφάπτεται η (1) στην υπερβολή πρέπει το σύστημα

$$(\Sigma):\quad \left.\begin{array}{l} y = 2x+\lambda \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16} = 1 \end{array}\right| \text{ Να έχει διπλή πραγματική λύση}$$

$$\text{Αλλά } (\Sigma) \iff \left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{2}x+\lambda \\ \frac{x^2}{4}-\frac{(2x+\lambda)^2}{16} = 1 \end{array}\right| \iff \begin{array}{l} y = 2x+\lambda \\ 9x^2+20\lambda x+4\lambda^2+64 = 0 \quad (2) \end{array}$$

Επομενως πρέπει η (2) να έχει διπλή ρίζα.

Άρα η διακρίνουσα της πρέπει να είναι μηδέν.

Είναι $\frac{\Delta}{4} = 64\lambda^2-9.64 = 0 \iff \lambda^2-9 = 0 \iff |\lambda| = 3$

Τελικά έχουμε:

i) Αν $|\lambda| = 3$ η (1) εφάπτεται της υπερβολής

ii) Αν $|\lambda| > 3$ η (1) τέμνει την υπερβολή

iii) Αν $|\lambda| < 3$ η (1) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την υπερβολή.

22. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει εστίες $E_1(-3,0)$, $E_2(3,0)$ και εφάπτεται της ευθείας $2x-y-4 = 0$.

Λύση: Αν η ζητούμενη υπερβολή είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουμε επειδή

$E_2(3,0) \rightarrow \gamma = 3 \rightarrow \gamma^2 = \alpha^2+\beta^2 \rightarrow \alpha^2+\beta^2 = 9$ (1).

Επειδή δε η ευθεία $2x-y-4 = 0$ (2) εφάπτεται της $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (3)

το σύστημα: $\begin{cases} 2x-y-4 = 0 \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{cases}$ (Σ) έχει διπλή πραγματική λύση το

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x-y-4 = 0 \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{(2x-4)^2}{\beta^2} = 1 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-y-4 = 0 \\ (\beta^2-4\alpha^2)x^2+16\alpha^2x-16\alpha^2-\alpha^2\beta^2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Για να έχει το (4) διπλή πραγματική λύση πρέπει η διακρίνουσα Δ της δευτεροβάθμιας ως προς x εξίσωσης να είναι 0.

Δηλαδή: $\Delta = 0 \Longleftrightarrow 16^2\alpha^4+4(\beta^2-4\alpha^2)(16\alpha^2+\alpha^2\beta^2) = 0 \Longleftrightarrow 16+\beta^2-4\alpha^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 4\alpha^2-\beta^2 = 16$ (5). Από τις (1) και (5) $\rightarrow \alpha^2 = 5$ και $\beta^2 = 4$

Άρα η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

23. Οι εστίες μιας έλλειψης και μιας υπερβολής είναι οι ίδιες. Δείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους είναι κάθετες.

Λύση: Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (1) και η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha_1^2} - \frac{y^2}{\beta_1^2} = 1$ (2)

και οι εξισώσεις των εφαπτομένων στο σημείο (x_0,y_0) αυτών είναι

$\frac{xx_0}{\alpha^2} + \frac{yy_0}{\beta^2} = 1$ (3) και $\frac{xx_0}{\alpha_1^2} - \frac{yy_0}{\beta_1^2} = 1$ (4)

και έχουν συντελεστή διευθύνσεως $\lambda_1 = -\frac{x_0\beta^2}{y_0\alpha^2}$, $\lambda_2 = \frac{x_0\beta_1^2}{y_0\alpha_1^2}$ αντίστοιχα

Οπότε για να είναι κάθετες πρέπει $\lambda_1\lambda_2 = -1 \Longleftrightarrow x_0^2\beta^2\beta_1^2 = y_0^2\alpha^2\alpha_1^2$ (5)

Επειδή όμως το σημείο (x_0,y_0) βρίσκεται πάνω και στις δύο καμπύλες

Έχουμε: $\left\{ \frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1 \text{ και } \frac{x_0^2}{\alpha_1^2} - \frac{y_0^2}{\beta_1^2} = 1 \right\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{\alpha^2\alpha_1^2(\beta^2+\beta_1^2)}{\alpha^2\beta_1^2+\beta^2\alpha_1^2} \\ y_0^2 = \frac{\beta^2\beta_1^2(\alpha^2-\alpha_1^2)}{\alpha^2\beta_1^2+\beta^2\alpha_1^2} \end{cases} \quad (6)$$

Επειδή ακόμη έχουν κοινές εστίες είναι $\gamma^2 = \alpha^2-\beta^2$ και $\gamma^2 = \alpha_1^2+\beta_1^2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \alpha^2-\alpha_1^2 = \beta^2+\beta_1^2$ (7) Από τις (6) και (7) παίρνουμε την (5).

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f: \{-1,0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3-x+3$

2. $f: \mathbb{R}-\{1,2\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{6(x-1)(x-2)}{x^2-3x+2}$

3. $f: \mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x^4-x^2-2}{(x^2-2)(x^2+2)}$

είναι σταθερές;

2. Δείξετε ότι οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$

2. $f: \mathbb{R}-\{1,2\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{(x^3-3x^2+2x)(x^2+1)}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}$

3. $f: \{-3,0,3\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3-8x$

Είναι ταυτοτικές.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f \text{ με } f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\in(-2,1)\\ 2x-1, & x\in(0,2]\end{cases}$$

$$g \text{ με } g(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\in[-1,0]\\ x+1, & x\in(0,2]\end{cases}$$

Να οριστούν οι συναρτήσεις $f\pm g$, $f.g$.

4. Όμοια δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x)=\sqrt{x-1}$ και g με $g(x)=\sqrt{2+x}$

Να οριστεί η συνάρτηση $f.g$.

5. Να βρεθεί η γωνία ω που σχηματίζουν με τον άξονα xx' οι ευθείες που ορίζονται από τα σημεία: i) (-3,-6),(4,8), ii) (10,3),(14,-7).

6. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο (-1,10) και έχει συντελεστή διευθύνσεως 1/2.

7. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(-1,3) και σχηματίζει γωνία π/4 με τον άξονα xx'.

8. Δείξετε ότι τα σημεία i) Α(0,-2),Β(-2,-1),Γ(2,2), ii) Α(4,0),Β(-1,0),Γ(0,2). Ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

9. Δείξετε ότι τα σημεία (-3,-7),(0,-2), (6,8) βρίσκονται την ίδια ευθεία.

10. Να ορίσετε τα $x\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε τα σημεία Α(x,-3),Β(1,1),Γ(-4,3) να βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

11. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών τριγώνου με κορυφές τα σημεία Α(-3,2),Β(3,-2),Γ(0,1).

12. Στο παραπάνω τρίγωνο, να βρεθούν οι εξισώσεις των διαμέσων και των υψών.

13. Να ορίσετε την εξίσωση της ευθείας της οποίας οι συντεταγμένες επί την αρχή είναι i) 4 και 5, ii) 3,-1, iii) -6,-2.

14. Να βρεθούν οι συντεταγμένες επί την αρχή των ευθειών με εξισώσεις: i) $2x-3y = 4$, ii) $6x-7y = 13$.

15. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1): $6x-2y-8 = 0$ και (ε_2): $3x+y = 14$.

16. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών, του τριγώνου ΑΒΓ του οποίου οι εξισώσεις των πλευρών είναι: $x-3y+1 = 0$, $2x-y = 0$, $x+y = 1$. Σε συνέχεια να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των διαμέσων και των μεσοκαθέτων στις πλευρές του τριγώνου.

17. Να ορίσετε την εξίσωση της ευθείας που περνάαπό το σημείο Α(2,1) και από την τομή των ευθειών $x-y = 2$ και $2x-3y = 7$.

18. Να ορίζετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών ε_1: $x-3y = 1$ και ε_2: $-x+3y = 1$ και είναι παράλληλη με τη ευθεία $4x-2y = 5$.

19. Να ορίσετε το λ έτσι ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $3x-4y = -15$, $5x+y = 1$, $\lambda x-2\lambda y-y+9\lambda-13 = 0$, να έχουν κοινό σημείο.

20. Να προσδιορίσετε τα λ και μ έτσι ώστε η ευθεία $3\lambda x+\mu y+4 = 0$, να διέρχεται από τα σημεία Α(-1,1), Β(-2,4).

21. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α(1,2),Β(3,0),Γ(5,4),Δ(3,6) Να βρείτε τους συντελεστές διευθύνσεως των πλευρών του και των διαγωνίων του.

22. Δίνονται οι ευθείες

$$\lambda x+(\lambda+2)y+3\lambda-1 = 0$$
$$\lambda x+(\lambda-1)y+2 = 0$$

Βρείτε το λ έτσι ώστε να είναι: i) κάθετες, ii) παράλληλες.

23. Δείξετε ότι οι δύο διάμεσες του τριγώνου Α(5,-7),Β(3,1),Γ(1,-3) είναι κάθετες.

24. Να βρεθούν τα κ,λ ώστε η ευθεία $(\kappa+2\lambda-3)x+(2\kappa-\lambda+1)y+6\kappa+9 = 0$ να είναι παράλληλη στον x'x και να τέμνει τον yy' στο σημείο (0,-3).

25. Θεωρούμε την ευθεία που περνά από το (x_1,y_1) και τέμνει τους άξονες στα Α και Β. Αν (x_0,y_0) είναι οι συντεταγμένες του μέσου του ΑΒ δείξετε ότι:
$$\frac{x_1}{x_0}+\frac{y_1}{y_0}=2$$

26. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές
1) $f(x) = |x|$, 2) $f(x) = x\sqrt{|x|}$, 3) $f(x) = \alpha x^4+\beta x^3+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.
4) $f(x) = \eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$, 5) $f(x) = x\sigma\upsilon\nu x$, 6) $f(x) = x\eta\mu 2x$,
7) $f(x) = \sqrt[3]{|1-x|}+\sqrt[3]{|1+x|}$

27. Όμοια για τις συναρτήσεις με τύπους
1. $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 2. $f(x) = \dfrac{\alpha^x+\alpha^{-x}}{2}$, $0<\alpha\neq 1$
3. $f(x) = x^3+3\eta\mu x$ 4. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ 5. $f(x) = \eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x$
6. $f(x) = \log(\dfrac{1-x}{1+x})$ 7. $f: (-1,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

28. Δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και να βρεθεί η μικρότερη θετική περίοδος τους.
1. $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\dfrac{3x}{2}$ 2. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2}$ 3. $f(x) = \eta\mu 3x$
4. $f(x) = \eta\mu(\pi x)$ 5. $f(x) = 5\eta\mu 3x$ 6. $f(x) = \varepsilon\varphi(\dfrac{2x}{3}+\dfrac{\pi}{6})$

29. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x+\omega) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ με $\omega\in\mathbb{R}$ σταθερό.
Δείξετε ότι η f είναι περιοδική με πεδίοδο 4ω.

30. Εξετάσετε αν οι συναρτήσεις που δίδονται από τους τύπους
1. $f(x) = \eta\mu(x^2)$, 2. $f(x) = \alpha\eta\mu(\theta x+\varpi)$, $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$,
3. $f(x) = \eta\mu(x^2-x+1)$, 4. $f(x) = \varepsilon\varphi^2\dfrac{x}{3}$
5. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x-\varepsilon\varphi x$ με $f:(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, 6. $f(x) = \varepsilon\varphi(x^2)$
7. $f(x) = \eta\mu(x+\eta\mu x)$, 8. $f(x) = 3^{\eta\mu x}$ Είναι περιοδικές ή όχι.

31. Δείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = συνx + συν(λx)$ με $λ \notin \mathbb{Q}$ δεν είναι περιοδική.

32. Δείξετε ότι αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ημx + συν(λx)$ είναι περιοδική τότε $λ \in \mathbb{Q}$.

33. Δείξετε ότι το γινόμενο μιας περιττής και μιας άρτιας είναι περιττή συνάρτηση.

34. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις με τύπους.

ι) $f(x) = (λ^2+λ+1)x+3λ+2,\ λ \in \mathbb{R}$, ιι) $f(x) = x+|x-2|+|x-3|$

ιιι) $f(x) = x^2+3x-4$, ιv) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

v) $f(x) = \max(x+2, 3x-1)$, vι) $f(x) = \min(x+2, -x+3)$

vιι) $f(x) = |x^2-1|+3x$.

35. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f(x) = x+\sqrt{x^2}$
2. $f(x) = \frac{x+1}{|x-1|}$
3. $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$
4. $f(x) = |x^2-3x+2|$
5. $f(x) = x-|x^2-2|+2$
6. $f(x) = \max(x^2-1, x)+\min(x, x^2-1)$
7. $f(x)+(5x-1)f(-x)+λx-μ$ με f = άρτια, $λ, μ \in \mathbb{R}$.

36. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}, & x \in \mathbb{R}-\{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

37. Έστω οι μονότονες συναρτήσεις f και g που είναι $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ ή $g(x) < 0$ $\forall x \in A = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(f)$.
Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f.g σε κάθε μια από τις δυνατές περιπτώσεις.

38. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} (λ^2+1)x+λ+1, & x \le 3 \\ x^2-2(μ+2)x+2μ, & x > 3, λ, μ \in \mathbb{R}, λ \neq 0 \end{cases}$

Δείξετε ότι είναι $f \uparrow$ $\forall x \in (-\infty, 3]$ και σε συνέχεια να προσδιοριστούν

τα πραγματικά λ, μ έτσι ώστε $f(2) = 2$ και $f(4) = 1$

39. 'Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\lambda x+2-\lambda}{x+\lambda-1}$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι γνήσια φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -\lambda+1)$, $(-\lambda+1, +\infty)$.

40. 'Εστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \lambda|x-1|+(1-\lambda)x+2$.
Να προσδιοριστούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

41. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις

1. $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x+\eta\mu x$.
2. $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2\eta\mu x$.
3. $f: [0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x-\sigma\upsilon\nu x$.

42. 'Εστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3+x^2+\mu x+1$.
Να προσδιοριστεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

43. 'Ομοια για την συνάρτηση με τύπο $f(x) = |x-1|\cdot(\lambda^2-2\lambda)-|x-2|$
Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

44. Να βρεθούν τα σύνολα των τιμών των συναρτήσεων με τυπους:

1. $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$
2. $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+x+3}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2}$
4. $f(x) = x^4+x^2-1$

45. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f: [2,3] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2-3x+5$.

46. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων

1. $f:(-\infty,2) \cup (3,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}$
2. $f: [1,5] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |x^2-2|+|x|$
3. $f: [1,4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2, & 1 \le x \le 3 \\ 2x-5, & 3 < x \le 4 \end{cases}$

4. $f: (-2,2) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

47. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}$
ι) Να γράψετε την f με απλούστερο τρόπο.
ιι) Να βρεθούν τα $\mathcal{D}(f)$ και $\mathcal{R}(f)$.

48. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{10-5x}}{7-|x-4|}$
Να βρεθούν τα $\mathcal{D}(f)$ και $\mathcal{R}(f)$.

49. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+2 & \text{αν } x \geq 2 \lor x \leq 1 \\ -x^2+3x-2 & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

50. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με $f(x) = |x^2-3x+2|$

51. Έστω η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } x \in [1,2) \\ x+1 & \text{αν } x \in [2,3] \\ \sqrt{x-4} & \text{αν } x \in [4,+\infty) \end{cases}$$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.
2. Να βρεθούν τα $f(1), f(2), f(5), f(x+1)$.
3. Να επιλυθεί η εξίσωση: $f(x+1)+f(5) = 5$
στην περίπτωση που $f(x+1) \neq$ από μια σταθερή.

52. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4x+1$ και τα σύνολα $A(-\infty,-1)$, $[2,+\infty)$, $(-1,-4)$. Να εξετάσετε αν είναι φραγμένη σ'αυτά.

53. Δείξετε ότι οι συναρτήσεις f με $f(x) = -2x^2+1$ και g με $g(x) = 4x^2-2$ είναι φραγμένες άνω αντίστοιχα κάτω στο $\mathbb{R}$.

54. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$ δείξετε ότι η f είναι φραγμένη σε κάθε περιοχή του ξ με $\xi \neq 0$.

55. 'Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x\eta\mu x}{|x|+1}$.
Δείξετε ότι είναι φραγμένη στο διάστημα $[-4,4]$.

56. 'Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2-5x+2$. Να εξετασθεί αν είναι φραγμένη στην περιοχή του μηδέν.

57. 'Ομοια η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+x+2$ στα διαστήματα $[5,+\infty)$ και $[-1,1]$.

58. Εξετάσετε αν η $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x^2+x+1}$ είναι φραγμένη στο διάστημα $[1,5]$.

59. Δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+7}$ είναι φραγμένη.

60. Των παρακάτω συναρτήσεων να βρεθούν τα ακρότατα.

1. $f(x) = \alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
2. $f: [-1,3]\to\mathbb{R}$ με $f(x) = -2x+6$
3. $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.
4. $f:[2,5]\to\mathbb{R}$ με $f(x) = x^2-2x-1$
5. $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$
6. $f(x) = |x-1|+|x-3|+\frac{3x+1}{2}$
7. $f(x) = 3x^4-2x^2-1$
8. $f(x) = |x^2-1|+x$
9. $f(x) = \max(3x^2-2x-1, x^2-2)$
10. $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2-2x+5}$
11. $f(x) = |x-2|+|2x-1|$
12. $f(x) = 1-2\sigma\upsilon\nu x$.

61. Για ποιές τιμές του των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{4\kappa x+\lambda}{x^2+1}$ έχει $\max f = -\min f$, και $f(1)=4$

62. 'Ομοια για ποιές τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{2x^2+\kappa x+\lambda}{x^2+1}$ έχει max το 4 και min το -3.

63. 'Εστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^2-2\alpha x+1}{x^2-2x+3}$ με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{-1,3\}, \alpha\in\mathbb{R}$

1) Να βρεθούν τα ακρότατα της για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.
2) Για ποιά λ η f έχει μέγιστο το μηδέν.

64. Εάν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$ και $\alpha>\beta$ δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+\alpha^2}-\sqrt{x^2+\beta^2}-(\alpha-\beta)$ έχει max το μηδέν.

65. Όμοια αν f: $[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^3+x-x^2-1$ και $\varphi(x) = 2x^4-2x^3-x^2+1$ έχουν max το 0.

66. Έστω η συνάρτηση f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-x^2})$. Δείξετε ότι $\max f = \frac{1}{4}$ και $\min f = 0$.

67. Να βρείτε ποιό από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερό εμβαδό έχει την μικρότερη υποτείνουσα.

68. Αν $x,y\in\mathbb{R}^*_+$ και $2x+3y = 5$ να βρεθεί το max ή min της παράστασης $A = 2x^2+y^2-2x+y$.

69. Δίνονται οι συναρτησεις f: $[2,4]\to\mathbb{R}$ με $f(x) = 2x+5$ και g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x) = 3x^2+1$.
Να βρεθεί η $g\circ f$ και η $f\circ g$.

70. Όμοια οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = 9-x^2$ και $g(x) = \sqrt{4x+1}$.
Να βρεθεί η $g\circ f$.

71. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ και η g με $g(x) = x$.
Να βρείτε τον τύπο της $h = f\circ f$ και σε συνέχεια να προσδιοριστούν τα κ,λ έτσι ώστε $g(x) = h(x)$.

72. Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = 3x+1$ και $g(x) = \frac{x+2}{x-3} \Big/ \mathbb{R}-\{3\}$.
ι) Να βρεθεί η σύνθεση $f\circ g$.
ιι) Να λυθεί η εξίσωση $(f\circ g)(x) = 5$.

73. Έστω οι συναρτήσεις f: $\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{-1\}$ με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ και $\varphi(x) = \mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x) = \frac{3x^6-2x^3-4}{x^3+1}$
ι) Να βρεθεί η σύνθεση $\varphi\circ f$.
ιι) Να λυθεί η ανίσωση $(\varphi\circ f)(x)\geq 4$

74. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}-\{0,1\}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Δείξετε ότι $\forall\, x \in \mathbb{R}-\{0,1\}$ είναι $(f \circ f \circ f)(x) = x$.

75. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{(1-x)}, & 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^4 - x^2 - 1$.

ι) Να βρεθεί η $g \circ f$ και η $f \circ g$.

ιι) Να επιλυθεί η ανίσωση $(g \circ f)(x) \le 5$ όταν $x > 1$.

76. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{2\}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

1. Δείξετε ότι είναι (1-1) και επί.
2. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

77. Έστω οι συναρτήσεις $g: [-6,10] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x+3$ και

$\varphi(x) = \begin{cases} 3x-1, & -2 \le x \le 2 \\ \dfrac{3x}{2}, & 2 \le x \le 8 \end{cases}$

Να βρεθεί η σύνθεση $g \circ \varphi$ και $\varphi \circ g$ αν υπάρχει.

78. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+2, & x \ge 1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$

ι) Να βρεθεί η f^{-1} αν υπάρχει

ιι) Να βρεθεί ο τύπος της $(f \circ f)(x)$.

79. Δίδονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x) = \begin{cases} 3x, & |x| \le 1 \\ -3x, & |x| < 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| \le 2 \\ x+1, & |x| > 1 \end{cases}$

Να βρεθεί η σύνθεση $f \circ g$.

80. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις με τους αντίστοιχους τύπους είναι αντιστρέψιμες.

1. $f(x) = \sqrt{(x^2-3)|x|+2}$ 2. $f: [1,9] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^2+x-3$
3. $f(x) = \sqrt{1-x^3}$ 4. $f(x) = x+|x|$
5. $f: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ με $f(x) = |x|-x$
6. $f(x) = \max(\,|x-1|,\ |1-\frac{x}{4}|\,)$

81. Εξετάσετε αν οι συναρτήσεις με τύπους είναι αντιστρέψιμες:

ι) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ ιι) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}$

ιιι) $f: (-\infty,1] \cup [2,+\infty) \to (-\infty,2]$ με $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty,1] \\ -2x+6, & x \in [2,+\infty) \end{cases}$

και να βρείτε τους τύπους των αντιστρόφων

82. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f(x) = \kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, 2. $f(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $\gamma \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Να βρεθούν τα πραγματικά $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\kappa,\lambda$ έτσι ώστε να υπάρχουν οι αντίστροφές τους και να ισχύει $f = f^{-1}$.

83. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x+\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:
$f^{-1}(1+x)+f(x)+f(1-x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

84. Δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αντιστρέψιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα:
$(-\infty,-\dfrac{\beta}{2\alpha})$ και $(-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty)$ και να βρεθεί ο τύπος της f^{-1} σε κάθε μια περίπτωση.

85. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 0 \\ \dfrac{1+|x|(4x-1)}{2x} & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$
Να βρείτε την αντίστροφή της αν υπάρχει.

86. Έστω η συνάρτηση $f: [0,3] \to [0,2]$ με τύπο
$f(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{1-x}, & x \in [0,1] \\ \dfrac{x+1}{2}, & x \in (1,3] \end{cases}$
Να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

87. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \lambda+x-\mu, & x \ge \mu \\ \lambda+\alpha(x-\mu), & x < \mu \end{cases}$
όπου $\lambda,\mu,\alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει η f^{-1} και να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης..

88. Έστω η συνάρτηση του $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+5, & x \geq 1 \\ x+3, & x < 1 \end{cases}$$

Δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

89. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Να προσδιοριστεί ο α έτσι ώστε:
ι) $f_\alpha(1) f_\alpha(3) = 81$, ιι) $f_\alpha(\frac{35}{10}) : f_\alpha(\frac{15}{10}) = 169$.

90. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = (\frac{\alpha-2}{\alpha+2})^x$, $x \in \mathbb{Q}$. Για ποιές τιμές του α είναι γνησίως φθίνουσα.

91. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x$, αν $2x_\nu = x_{\nu-1} + x_{\nu+1}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ τότε $\alpha^{2x_\nu} = \alpha^{x_{\nu-1}+x_{\nu+1}}$

92. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{x-3}{2x-1}\right)^x$. Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η f.

93. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Δείξετε ότι

$$f(\alpha+\beta) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{1+f(\alpha)f(\beta)}$$

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x - 1$. Δείξετε ότι είναι ↓ στο $\mathbb{R}$ και σε συνέχεια ότι η εξίσωση $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x - 1 = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 2$, στο $\mathbb{R}$.

95. Δίνονται οι συναρτήσεις

ι) f με $f(x) = \log_{x-1}(x^2-2x-1)$

ιι) g με $g(x) = \frac{\ln(-x^2+2x)}{\sqrt{9-x^2}}$

ιιι) h με $h(x) = \ln.\ln(2x-1)$

Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

96. Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση

f με $f(x) = \log_{\alpha}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $0 < \alpha \neq 1$, σε συνέχεια δείξετε ότι:

$f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

97. Να λύσετε τις ανισώσεις:
ι) $2^{3x+1} < 1$, ιι) $4^{3x^2-2x-8} < 1$, ιιι) $\left(\frac{x}{4}-x+\frac{7}{4}\right)^{x(x-4)} < \left(\frac{x}{4}-x+\frac{7}{4}\right)^{2(x-4)}$

98. Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση f με $f(x) = \log_x(10x-3)-\log_x 3$ σε συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 2$.

99. Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[-1,-\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^{\lambda x+1}+\lambda^2-1$.
Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \leq 0$.

100. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f με $f(x) = \log(\log(\log(\frac{x-2}{x-1})))$ και να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$.

101. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ με $f(x) = \frac{10^x}{x}-x$.
Δείξετε ότι η f είναι ↑.
Μετά να βρεθούν οι μικρότεροι φυσικοί αριθμοί x,y ώστε να ισχύει $x-y = \log_{10}(x^2-y^2)$.

102. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 5^{\frac{x+1}{3x-6}}$
ι) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της
ιι) Για ποιές τιμές του f είναι $f(x) < 1$.
ιιι) Για ποιές τιμές του x είναι $f(x) = 0$ και $f(x) < 0$.
ιv) Για ποιές τιμές του x είναι $f(x) < \frac{1}{125}$

103. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln_{x^2-x-2}\sqrt[9-x^2]{9-x^2}$.
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

104. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(x^2-2(\lambda-1)x+3\lambda-2)$.
Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ορίζεται $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

105. Όμοια για την συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln[(3\lambda+1)x^2-2(\lambda+1)x+5\lambda-4]$
Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ορίζεται $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

106. Να λυθούν οι ανισώσεις

ι) $3^{(x^2-x)} > 27$ ιιι) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}} > \frac{1}{9}$

ιι) $4^{\frac{x-3}{3-x}} \leq \frac{1}{8}$ ιv) $5^{\frac{x+1}{3x-6}} < 10^{-6}$

107. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2 = 4$. Να βρεθούν τα σημεία αυτής με τεταγμένες 3 και -2.

108. Να βρεθεί η εξίσωση περιφέρειας κύκλου ο οποίος έχει

ι) Κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 4$.

ιι) Κέντρο το σημείο $K(-1,3)$ και ακτίνα $\rho = 2$

ιιι) Κέντρο το σημείο $K(4,-1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(5,3)$

ιv) Διαμετρικά σημεία τα $A(5,-2)$ και $B(-1,-4)$.

109. ί) Δείξετε ότι η ευθεία $-x+\sqrt{35}y = 36$ εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2 = 36$

ίί) Όμοια η ευθεία $3x+4y = 25$ εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2 = 25$.

110. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2+y^2-6x-8y+21 = 0$.

ι) Να έχουν δύο κοινά σημεία

ιι) Ένα μόνο κοινό σημείο.

ιιι) Κανένα κοινό σημείο.

111. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \alpha x+\beta$ να εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2 = R^2$.

112. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2+y^2 = 9$, που είναι παράλληλες στην ευθεία $\frac{x}{2}-\frac{y}{3} = 1$

113. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $(0,0)$ και περνά από το σημείο $A(1,2)$.

ι) Να βρείτε την εφαπτομένη στο A

ιι) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$.

114. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda x-4(\lambda+1)y+3\lambda+14 = 0$. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

115. Δίνονται οι παραβολές $y^2 = 14x$ και $y^2 = -8x$. Να βρεθούν τα στοιχεία τους.

116. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $3x-2y+6 = 0$ και της παραβολής $y^2 = 6x$.

117. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $6x-2y+7 = 0$.

118. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία $E_1(-2,0)$ και εξίσωση διευθετούσας την $x-5 = 0$.

119. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων του κύκλου $x^2+y^2 = 4$ και της παραβολής $y^2 = 6x$.

120. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής ι) $y = 4x^2$, ιι) $y = x^2-2x+3$, ιιι) $2y^2 = 5x$.

121. Δείξετε ότι οι εφαπτόμενες παραβολής στα άκρα μιας χορδής που περνά από την εστία είναι κάθετες.

122. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4\rho x$, $\rho > 0$. Δείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x+\frac{\rho}{\lambda}$ είναι εφαπτομένη της.

123. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E_1(-4,0)$, $E_2(4,0)$ και $2\alpha = 20$.

124. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης της οποίας το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου από τις εστίες είναι 10 και η απόσταση των εστιών είναι 6.

125. Δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2+3y^2 = 6$ παριστάνει έλλειψη και να βρεθούν οι εστίες της.

126. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες των ελλείψεων στα αντίστοιχα σημεία

ι) $x^2+4y^2 = 8$ στο $A(2,1)$, ιι) $\frac{x^2}{9}+y^2 = 2$ στο $B(3,-1)$

127. Δείξετε ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2+\kappa}+\frac{y^2}{\beta^2+\kappa} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες.

128. Δίνεται η έλλειψη $x^2+4y^2 = 1$. Να βρεθούν τα σημεία της που βλέπουν το τμήμα E_1E_2 με ορθή γωνία.

129. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{4}+y^2 = 1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $x+y+1 = 0$.

130. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που περνά από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

131. Όμοια αν $\alpha = 4\beta$ και $E_1(-2\sqrt{3}, 0)$.

132. Δίνεται η εξίσωση $9y^2-4x^2+36 = 0$. Να δειχτεί ότι είναι εξίσωση υπερβολής και να βρεθούν οι εστίες αυτής.

133. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που περνά από τα σημεία

ι) $A(5\sqrt{2},2\sqrt{5})$, $B(45,40)$.

ιι) $A(8,\sqrt{7})$ και έχει κύριο άξονα μήκους 12.

134. Να βρείτε τα στοιχεία των υπερβολών

ι) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9} = 1$ ιι) $x^2-16y^2 = 16$

135. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $x^2-\frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο $(2,2\sqrt{3})$

136. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9} = 1$ και η ευθεία $y = \lambda x+1$.

ι) Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία να εφάπτεται της υπερβολής.

ιι) Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία να τέμνει την υπερβολή σε ένα σημείο

137. Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής $4x^2-9y^2 = 36$ που σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία.
α) 60° και β) 150°.

138. Δίνεται η εξίσωση $xy = 6$. Δείξετε ότι είναι εξίσωση υπερβολής. Αν Α,Β,Γ είναι τα σημεία αυτής με τετμημένες 1,-2,3. Δείξετε ότι η από το Α κάθετη στην ΒΓ τέμνει το διάγραμμα της $xy = 6$ στο ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

κεφαλαιο 4

οριο και συνεχεια συναρτησεων

4.1. Όριο ακολουθίας

Ορισμός: 1. Ονομάζουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικων αριθμών.

Συμβολικά: $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Μια ακολουθία συμβολίζεται με τον γενικό όρο της η ν-οστό ως εξής (α_ν), ή $\alpha_\nu / \nu \in \mathbb{N}$.

Ορισμός: 2. Μια ακολουθία (α_ν) λέμε ότι έχει όριο το μηδέν 0 όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός ν_0 τέτοιος ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu| < \varepsilon$.

Συμβολικά: $\alpha_\nu \to 0$ ή $\lim \alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; \nu_0 \in \mathbb{N}: \forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu| < \varepsilon$

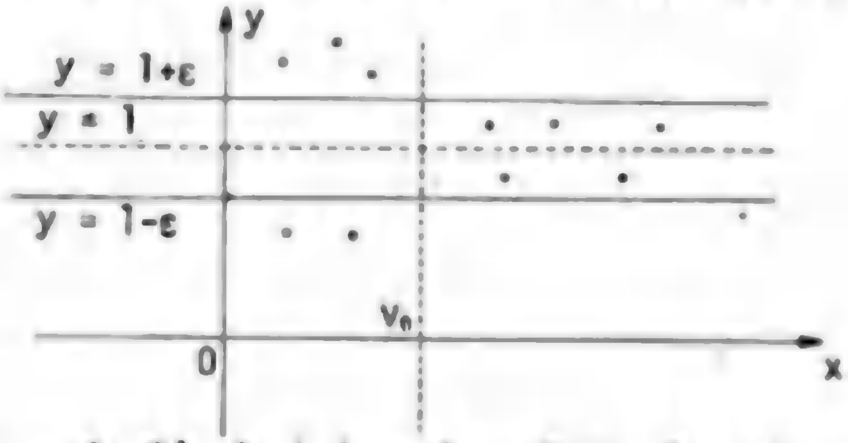
Ορισμός: 3. Μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο τον αριθμό $l \in \mathbb{R}$ τότε και μόνο τότε όταν η ακολουθία $\alpha_\nu - l$ έχει όριο το 0.

Συμβολικά: $\alpha_\nu \to \lambda$ ή $\lim \alpha_\nu = \lambda \Leftrightarrow \alpha_\nu - \lambda \to 0$ ή $\lim \alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; \nu_0 \in \mathbb{N}: \forall\, \nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - l| < \varepsilon$.

Σημειώσεις: 1. Μια ακολουθία που έχει όριο τον πραγματικό αριθμό l λέγεται **συγκλίνουσα.**

2. Η έκφραση η (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ είναι ισοδύναμη με τις εκφράσεις **"η (α_ν) συγκλίνει προς το $l \in \mathbb{R}$" ή "η (α_ν) τείνει στο $l \in \mathbb{R}$" ή "το limes της (α_ν) είναι $l \in \mathbb{R}$" ή "το όριο της (α_ν) είναι $l \in \mathbb{R}$".**

3. Από τον ορισμό 3 επειδή $|a_v - 1| < \varepsilon \leftrightarrow 1-\varepsilon < a_v < 1+\varepsilon$ συμπεραίνουμε ότι $\forall\ \varepsilon > 0$ όλοι οι όροι της (a_v) με εξαίρεση ένα πεπερασμένο πλήθος όρων συσσωρεύονται στο διάστημα $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ με κέντρο το 1 και ακτίνα ε. Δηλαδή οι όροι της (a_v) με $v > v_0$ βρίσκονται μέσα στην ταινία που ορίζουν οι παράλληλες $y = 1-\varepsilon$, $y = 1+\varepsilon$. Άρα πλησιάζουν όσο θέλουμε την ευθεία $y = 1$ αφού η απόσταση τους από αυτήν είναι μικρότερη του ε, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Πρόταση. Αν μια ακολουθία (a_v) έχει όριο $1 \in \mathbb{R}$ τότε είναι μοναδικό.

Λ Υ Μ Ε Ν Ε Σ Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δείξετε ότι οι ακολουθίες είναι μηδενικές

ι) $a_v = \frac{4}{2v+1}$ ιιι) $a_v = \frac{v-3}{2v^2+1}$

ιι) $a_v = (-1)^v \frac{1}{2v+3}$ ιv) $a_v = \left(\frac{2}{3}\right)^v$

Λύση: ι. Είναι αρκετό να βρούμε ένα $v_0 \in \mathbb{N}$: θεωρούμε την ανισότητα $|a_v| < \varepsilon$ και την επιλύουμε ως προς v.

Είναι: $|a_v| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{4}{2v+1}\right| < \varepsilon \leftrightarrow \frac{4}{2v+1} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{2v+1}{4} > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow 2v+1 > \frac{4}{\varepsilon} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 2v > \frac{4}{\varepsilon} - 1 \leftrightarrow v > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$ και αν ονομάσουμε v_0 ένα φυσικό μεγαλύτερο από τον $\frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$ τότε θα έχουμε: $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $v_0 > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2} : v > v_0 \rightarrow$

$\rightarrow |a_v| < \varepsilon$.

2. Είναι: $|a_v| < \varepsilon \leftrightarrow \left|(-1)^v \frac{1}{2v+3}\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|(-1)^v \frac{1}{2v+3}\right| < \varepsilon \leftrightarrow \frac{1}{2v+3} < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 2v+3 > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow 2v > \frac{1}{\varepsilon} - 3 \leftrightarrow v > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$

Αν εκλέξουμε $v_0 \in \mathbb{N}$: $v_0 \geq \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$ τότε $\forall\ v \in \mathbb{N}$ με $v > v_0 \rightarrow \left|(-1)^v \frac{1}{2v+3}\right| < \varepsilon$

3. **1ος τρόπος.** Είναι $|\alpha_\nu|<\varepsilon \leftrightarrow |\frac{\nu-3}{2\nu^2+1}|<\varepsilon$ και επειδή $|\nu-3|\leq|\nu|+|3|=$

$=\nu+3$ έχουμε $|\frac{\nu-3}{2\nu^2+1}|\leq\frac{\nu+3}{2\nu^2+1}<\frac{\nu}{2\nu^2+1}<\frac{\nu}{2\nu^2}=\frac{1}{2\nu}$

Αρκεί επομένως να βρούμε ένα ν_0 τέτοιο ώστε $\frac{1}{2\nu}<\varepsilon\leftrightarrow 2\nu>\frac{1}{\varepsilon}\leftrightarrow$

$\leftrightarrow \nu>\frac{1}{2\varepsilon}$.

Αν εκλέξουμε επομένως φυσικό $\nu_0\geq\frac{1}{2\varepsilon}$ τότε θα έχουμε $\forall\ \varepsilon>0$ και $\nu>\nu_0\rightarrow$

$\rightarrow|\frac{\nu-3}{2\nu^2+1}|<\varepsilon$. Επομένως η (α_ν) είναι μηδενική.

2ος τρόπος. Από την σχέση $|\frac{\nu-3}{2\nu^2+1}|\leq\frac{\nu+3}{2\nu^2+1}<\varepsilon$ αρκεί να βρούμε ένα $\nu_0\in\mathbb{N}$

Είναι $\frac{\nu+3}{2\nu^2+1}<\varepsilon\leftrightarrow\nu+3<2\nu^2\varepsilon+\varepsilon\leftrightarrow 2\varepsilon\nu^2-\nu-3+\varepsilon>0\leftrightarrow$

$\leftrightarrow\nu^2-\frac{1}{2\varepsilon}\nu-\frac{3}{2\varepsilon}+\frac{1}{2}>0\leftrightarrow\nu^2-2\frac{1}{4\varepsilon}\nu+\frac{1}{(4\varepsilon)^2}-\frac{1}{(4\varepsilon)^2}-\frac{3}{2\varepsilon}+\frac{1}{2}>0\leftrightarrow$

$\leftrightarrow(\nu-\frac{1}{4\varepsilon})^2>\frac{1}{16\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}\leftrightarrow|\nu-\frac{1}{4\varepsilon}|>\sqrt{\frac{1}{16\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}}\rightarrow$

$\rightarrow\nu-\frac{1}{4\varepsilon}>\sqrt{\frac{1}{16\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}}\leftrightarrow\nu>\frac{1}{4\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{16\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}}$

Αν εκλέξουμε φυσικό $\nu_0\geq\frac{1}{4\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{16\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}}$ τότε $\forall\ \varepsilon>0$ με $\nu>\nu_0\rightarrow$

$\rightarrow|\alpha_\nu|<\varepsilon$. Επομένως η (α_ν) είναι μηδενική.

4. Έχουμε $|\alpha_\nu|<\varepsilon\leftrightarrow(\frac{2}{3})^\nu<\varepsilon\leftrightarrow\nu\log(\frac{2}{3})<\log\varepsilon\leftrightarrow\nu>\frac{\log\varepsilon}{\log(\frac{2}{3})}$

και αν εκλέξουμε φυσικό $\nu_0\geq\frac{\log\varepsilon}{\log(\frac{2}{3})}$ τότε θα έχουμε $\forall\ \varepsilon>0$ με

$\nu>\nu_0\geq\frac{\log\varepsilon}{\log(\frac{2}{3})}$ ισχύει $(\frac{2}{3})^\nu<\varepsilon$ που σημαίνει ότι η (α_ν) είναι μηδενική.

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές

1. $\alpha_\nu=\sqrt{\nu+2}-\sqrt{\nu}$
2. $\alpha_\nu=\frac{\nu+1}{\nu+2}$
3. $\alpha_\nu=\frac{\eta\mu\nu+\sigma\upsilon\nu\nu+1}{\nu+1}$
4. $\alpha_\nu=\frac{1+2+3+\ldots+\nu}{\nu}$

Λύση: 1. Είναι $|\alpha_\nu|<\varepsilon\leftrightarrow|\sqrt{\nu+2}-\sqrt{\nu}|<\varepsilon\leftrightarrow$

$\leftrightarrow|\frac{(\sqrt{\nu+2}-\sqrt{\nu})(\sqrt{\nu+2}+\sqrt{\nu})}{\sqrt{\nu+2}+\sqrt{\nu}}|<\varepsilon\leftrightarrow\frac{\nu+2-\nu}{\sqrt{\nu+2}+\sqrt{\nu}}<\varepsilon\leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{\nu+2}+\sqrt{\nu}}<\varepsilon$ (1)

και επειδή $\frac{2}{\sqrt{\nu+2}+\sqrt{\nu}} < \frac{2}{\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu}} = \frac{2}{2\sqrt{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, αρκεί $\frac{1}{\sqrt{\nu}} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon^2 \leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon^2}$

Αν επομένως εκλέξουμε φυσικό $\nu_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$ τότε $\forall\ \varepsilon > 0$ με $\nu > \nu_0$ ισχύει $|\alpha_\nu| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι η (α_ν) είναι μηδενική.

2. Είναι $|\alpha_\nu| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{4\nu+1}{\nu+2}| < \varepsilon \leftrightarrow \frac{4\nu+1}{\nu+2} < \varepsilon \leftrightarrow 4\nu+1 < \nu\varepsilon+2\varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (4-\varepsilon)\nu < 2\varepsilon-1$ (1). Και αν $4-\varepsilon < 0 \leftrightarrow \varepsilon > 4$ θα είναι $\nu > \frac{2\varepsilon-1}{4-\varepsilon}$ οπότε θα υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ με $\nu_0 \geq \frac{2\varepsilon-1}{4-\varepsilon}$ αλλά αυτό θα ισχύει για $\varepsilon > 4$ και όχι για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως η (α_ν) δεν είναι μηδενική.

3. Είναι $|\alpha_\nu| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{\eta\mu\nu+\sigma\upsilon\nu\nu+1}{\nu+1}| < \varepsilon$ (1).

Αλλά είναι: $|\frac{\eta\mu\nu+\sigma\upsilon\nu\nu+1}{\nu+1}| \leq \frac{|\eta\mu\nu|+|\sigma\upsilon\nu\nu|+1}{\nu+1} \leq \frac{3}{\nu+1} < \frac{3}{\nu}$ (2)

Άρα από τις (1) και (2) αρκεί να υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$:

$\frac{3}{\nu} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{\nu}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow \nu > \frac{3}{\varepsilon}$ (Είναι $0 \leq |\eta\mu\nu| \leq 1, 0 \leq |\sigma\upsilon\nu\nu| \leq 1$)

Αν επομένως εκλέξουμε φυσικό $\nu_0 \geq \frac{3}{\varepsilon}$ θα έχουμε $\forall\ \varepsilon \geq 0$ με $\nu \geq \nu_0$ ισχύει $|\alpha_\nu| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι η (α_ν) είναι μηδενική.

4. Είναι $|\alpha_\nu| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{1+2+3+\ldots+\nu}{\nu^3}| < \varepsilon \leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu^3} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{\nu+1}{2\nu^2} < \varepsilon$

και επειδή $\frac{\nu+1}{2\nu^2} < \frac{\nu}{2\nu^2} = \frac{1}{2\nu}$ αρκεί να υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2\nu} < \varepsilon \leftrightarrow 2\nu > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \nu > \frac{1}{2\varepsilon}$.

Αν επομένως εκλέξουμε φυσικό $\nu_0 \geq \frac{1}{2\varepsilon}$ τότε με $\forall\ \nu > \nu_0$ θα είναι $|\alpha_\nu| < \varepsilon$ και η (α_ν) είναι μηδενική.

3. Δείξετε ότι οι ακολουθίες έχουν τα παρακάτω όρια:

ι) $\lim \alpha_\nu = \frac{1}{2}$ με $\alpha_\nu = \frac{\nu+4}{2\nu+5}$

ιι) $\lim \alpha_\nu = 2$ με $\alpha_\nu = \frac{2\nu\eta\mu\nu+\sigma\upsilon\nu^2\nu}{\nu+4}$

ιιι) $\lim \alpha_\nu = 1$ με $\alpha_\nu = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)}$

Λύση: Αρκεί να υπάρχει φυσικό ν_0 ώστε $|\alpha_\nu - \frac{1}{2}| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{\nu+4}{2\nu+5} - \frac{1}{2}| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left|\frac{2\nu+8-2\nu-5}{4\nu+10}\right| < \varepsilon \leftrightarrow \frac{3}{4\nu+10} < \varepsilon \leftrightarrow 4\nu+10 > \frac{3}{\varepsilon} \leftrightarrow 4\nu > \frac{3}{\varepsilon} - 10 \leftrightarrow \nu > \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$

Αν επομένως εκλέξουμε φυσικό $\nu_0 \geq \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$ θα έχουμε $\forall\ \varepsilon > 0$ με

$\nu > \nu_0 \geq \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$ ισχύει $|a_\nu - \frac{1}{2}| < \varepsilon \leftrightarrow \lim a_\nu = \frac{1}{2}$.

ιι) Όμοια θα πρέπει να υπάρχει φυσικός ν_0 ώστε $|a_\nu - 2| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left|\frac{2\nu\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^3\nu}{\nu+4} - 2\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{2\nu\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^3\nu - 2\nu - 8}{\nu+4}\right| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \frac{|\nu(2\eta\mu\nu - 2) + \sigma\upsilon\nu^3\nu - 8|}{\nu+4} < \varepsilon$ (1)

Αλλά $\frac{|\nu(2\eta\mu\nu-2)+\sigma\upsilon\nu^3\nu-8|}{\nu+4} \leq \frac{\nu|2\eta\mu\nu-2| + |\sigma\upsilon\nu^3\nu| + 8}{\nu+4} \leq \frac{\nu(2-2)+1+8}{\nu+4} =$

$= \frac{9}{\nu+4} < \frac{9}{\nu}$

Αρκεί επομένως να υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{9}{\nu} < \varepsilon \leftrightarrow \nu > \frac{9}{\varepsilon}$.

Αν επομένως εκλέξουμε φυσικό $\nu_0 \geq \frac{9}{\varepsilon}$ τότε θα έχουμε $\forall\ \varepsilon > 0$ με $\nu > \nu_0$

$\leftrightarrow |a_\nu - 2| < \varepsilon \leftrightarrow \lim a_\nu = 2$.

ιιι) Αρκεί $\lim(a_\nu - 1) = 0 \leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}$: $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \nu_0 \rightarrow$

$\rightarrow |a_\nu - 1| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)} - 1\right| < \varepsilon$ (1)

Αλλά είναι $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{2-1}{1.2} + \frac{3-2}{2.3} + \ldots + \frac{(\nu+1)-\nu}{\nu(\nu+1)} =$

$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}) = 1 - \frac{1}{\nu+1}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\left|1 - \frac{1}{\nu+1} - 1\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|-\frac{1}{\nu+1}\right| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \frac{1}{\nu+1} < \varepsilon \leftrightarrow \nu+1 > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Αν επομένως εκλέξουμε φυσικό $\nu_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$

τότε $\forall\ \varepsilon > 0$ με $\nu > \nu_0 \rightarrow |a_\nu - 1| < \varepsilon \leftrightarrow \lim a_\nu = 1$.

4.2. Σημεία συσσωρεύσεως - απομονωμένα σημεία συνόλου

Ορισμός. 1. Ένα σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσωρεύσεως ή οριακό σημείο (σ.σ) του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ τότε και μόνο τότε όταν σε κάθε περιοχή $\pi(\xi,\varepsilon), \varepsilon > 0$ υπάρχει ένα τουλάχιστο στοιχείο του συνόλου A διάφορο του ξ. Δηλαδή: $(\xi-\varepsilon,\xi) \cup (\xi,\xi+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\ \forall\ \varepsilon > 0$ ή $\leftrightarrow$ ξ είναι σ.σ $\leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ $\exists x \in A$: $0 < |x - \xi| < \varepsilon$.

Ορισμός 2. Ένα σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ λέγεται μεμωνομένο σημείο (μ.σ) του συνόλου $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει περιοχή $\pi(\xi,\varepsilon)$ στην οποία δεν ανήκει άλλο σημείο του A εκτός από το ξ.
Δηλαδή ξ είναι (μ.σ) $\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ έτσι ώστε $\pi(\xi,\varepsilon) \cap A = \{\xi\}$.

4.3. Όριο συνάρτησης στο +∞.

Για να μελετήσουμε πως συμπεριφέρεται μια συνάρτηση f όταν η μεταβλητή παίρνει μεγάλες τιμές (τείνει στο +∞) συμβολικά:($x \to +\infty$ ή $+\infty$) θα πρέπει η f να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ ή όπως λέμε στην περιοχή του (+∞).

Ορισμός 1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(\alpha,+\infty) \subseteq \mathcal{D}(f)$ έχει όριο, στο +∞.
Τον πραγματικό αριθμό λ τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε: $\forall\, x \in \mathcal{D}(f)$ και $x > \delta \Rightarrow |f(x)-\lambda| < \varepsilon$.
Συμβολικά:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \text{ ή } \lim_{+\infty} f(x) = \lambda \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0:\ x > \delta \Rightarrow |f(x)-\lambda| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(f)$$

Πρόταση: Δίνεται η συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)$ μη φραγμένο προς τα πάνω και έστω *g* ο περιορισμός της *f* στο διάστημα $(\alpha,+\infty)$. Τότε ισχύει: $\lim_{x\to+\infty} f = \lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g = \lambda \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις: 1. Επειδή $\lim_{+\infty} f(x) = \lambda \Longleftrightarrow \lim_{+\infty} |f(x)-\lambda| = 0 \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ με $x \in \mathcal{D}(f)$, $x > \delta \Rightarrow |f(x)-\lambda| < \varepsilon$.

2. Ακόμη είναι: $|f(x)-\lambda| < \varepsilon \Longleftrightarrow |-f(x)-(-\lambda)| < \varepsilon \Longleftrightarrow |\lim_{+\infty}(-f(x))| = -\lambda \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \lim_{+\infty}(-f) = -\lambda$.

4.4. Όριο συνάρτησης στο -∞.

Θεωρούμε τη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα που δεν είναι φραγμένο κάτω. Δηλ. το $\mathcal{D}(f)$ περιέχει ένα τουλάχιστο διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ και επειδή το $(-\infty)$ είναι (σ.σ) του $\mathcal{D}(f)$ μπορούμε να ορίσουμε το όριο στο $(-\infty)$.

Ορισμός. 1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο -∞ τον πραγματικό αριθμό λ, τότε και μόνο τότε όταν $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$\forall\, x\in \mathcal{D}(f) \wedge x < -\delta \rightarrow |f(x)-\lambda| < \varepsilon$.

Συμβολικά: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lambda$ ή $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lambda$ ή $f(x)\to\lambda \leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$:
$\forall\, x\in \mathcal{D}(f) \wedge x < -\delta \rightarrow |f(x)-\lambda| < \varepsilon$.

Πρόταση: Αν g είναι ο περιορισμός της f στο $(-\infty, a)$ τότε ισχύει:
$\lim\limits_{-\infty} f(x) = a \leftrightarrow \lim\limits_{-\infty} g(x) = a$.

Παρατηρήσεις: Ισχύουν οι ισοδυναμίες:
1. $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lambda \leftrightarrow \lim\limits_{-\infty}|f(x)-\lambda| = 0$. 2. $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lambda \leftrightarrow \lim\limits_{-\infty}(-f(x)) = -\lambda$

3. $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty \leftrightarrow \lim\limits_{-\infty}(-f(x)) = -\infty$.

4. Αν το όριο μιας συνάρτησης f όταν το $x\to+\infty$ ή στο $-\infty$ είναι $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y = \lambda$ ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της f. Δηλαδή αν:
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lambda\in\mathbb{R} \rightarrow$ η ευθεία $y = \lambda$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη της f.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{-1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και επειδή η f ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(a,+\infty)$ το ζητούμενο όριο έχει έννοια.
Για να είναι το όριο της f το 2 είναι αρκετό να βρούμε το δ.
Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \leftrightarrow |f(x)-2| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\dfrac{2x+5}{x+1}-2\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\dfrac{2x+5-2x-2}{x+1}\right| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left|\dfrac{3}{x+1}\right| < \varepsilon$ και επειδή $x\in(-1,+\infty)$ είναι $x > -1 \leftrightarrow x+1 > 0$ οπότε

$\left|\dfrac{3}{x+1}\right| = \dfrac{3}{x+1} < \varepsilon \leftrightarrow x+1 > \dfrac{3}{\varepsilon} \leftrightarrow x > \dfrac{3}{\varepsilon}-1$.

Αν εκλέξουμε $\delta \geq \dfrac{3}{\varepsilon}-1$ τότε θα έχουμε $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε με $x > \delta \rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{2,-2\} = (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$, είναι επομένως το $+\infty$ σημείο συσσωρεύσεως και το ζητούμενο όριο έχει έννοια.
Έχουμε: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \leftrightarrow |f(x)-1| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}-1\right|\ \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}-1\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\dfrac{x-1}{x+2}-1\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\dfrac{x-1-x-2}{x+2}\right| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{-3}{x+2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3}{x+2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} < \varepsilon$ (επειδή $x \in (2,+\infty)$)

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x+2 > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{3}{\varepsilon} - 2.$

Επομένως $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \geq \frac{3}{\varepsilon} - 2$ έτσι ώστε $\forall\ x > \delta$ να ισχύει $|f(x)-1| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}:\ 9-x^2 \geq 0,\ x+2 \neq 0\} = \{-3 \leq x \leq 3, x \neq -2\} =$
$= [-3,-2) \cup (-2,3]$ και επειδή το $+\infty$ δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ το ζητούμενο όριο δεν έχει έννοια.

4. Με την μέθοδο "ε,δ" δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ με $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x^2+x+1}$.

Λύση: Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f. Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ γιατί ο παρανομαστής $x^2+x+1 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ επομένως το $(+\infty)$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ και η έκφραση $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ έχει έννοια.

Για να δείξουμε με την μέθοδο "ε,δ" ότι $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 2$ πρέπει και αρκεί με $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο οσοδήποτε μικρό να προσδιορίσουμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ εξαρτόμενο από το ε έτσι ώστε $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $x > \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$.

Θεωρούμε την συνθήκη $|f(x)-2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x^2+3x-1}{x^2+x+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x-3}{x^2+x+1}\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\frac{x-3}{x^2+x+1}\right| < \varepsilon$ (1). Επειδή τώρα $x \to +\infty$ δεχόμαστε χωρίς βλάβη της γενικότητας $x > 3$ οπότε η (1) γίνεται: $\frac{x-3}{x^2+x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x-3} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon x^2+\varepsilon x+\varepsilon > x-3 \Leftrightarrow \varepsilon x^2+(\varepsilon-1)x+\varepsilon-3 > 0$ (2)

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{(1-\varepsilon)\pm\sqrt{(1-\varepsilon)^2-4\varepsilon(\varepsilon-3)}}{2\varepsilon} = \frac{(1-\varepsilon)\pm\sqrt{-3\varepsilon^2+10\varepsilon+1}}{2\varepsilon}$

Επομένως η (2) αληθεύει για $x > \frac{(1-\varepsilon)+\sqrt{-3\varepsilon^2+10+1}}{2\varepsilon}$ ή $x < \frac{(1-\varepsilon)-\sqrt{-3\varepsilon^2+10\varepsilon+1}}{2\varepsilon}$

και επειδή υποθέσαμε $x > 3$ αν θέσουμε $\delta = \min\left(3, \frac{1-\varepsilon+\sqrt{-3\varepsilon^2+10+1}}{2\varepsilon}\right)$ τότε θα είναι $|f(x)-2| < \varepsilon\ \forall\ x > \delta$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

5. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση: Θέτουμε $\sigma(x) = \frac{1}{x^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ οπότε $\mathcal{D}(\sigma) = \mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ και το $(+\infty)$ είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(\sigma)$.

Για να είναι $\lim\limits_{+\infty}\sigma(x) = 0$ πρέπει και αρκεί $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\ x \in \mathcal{D}(\sigma)$ με $x > \delta \to |\sigma(x)-0| < \varepsilon$.

Η σχέση $|\sigma(x)-0| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{1}{x^\nu}| < \varepsilon \leftrightarrow |x^\nu| > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow |x| > \sqrt[\nu]{\frac{1}{\varepsilon}}$ και αν δεχτούμε τον περιορισμό της σ στο $(1,+\infty)$ γιατί $x \to +\infty$ θα έχουμε: $x > \sqrt[\nu]{\frac{1}{\varepsilon}}$ οπότε με $\delta \geq \sqrt[\nu]{\frac{1}{3}}$ θα έχουμε $x > \delta \geq \sqrt[\nu]{\frac{1}{3}}$ και $|\sigma(x)| < \varepsilon\ \forall\ x \in \mathcal{D}(\sigma)$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{+\infty}\sigma(x) = 0$.

6. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση: Θέτουμε $t(x) = \frac{\eta\mu x}{x^\nu}$ οπότε $\mathcal{D}(t) = \mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ και το $(+\infty)$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(t)$.

Θα πρέπει τώρα να δείξουμε ότι $\lim\limits_{+\infty}t(x) = 0$ που σημαίνει ότι: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\ x \in \mathcal{D}(t)$ με $x > \delta \to |t(x)-0| < \varepsilon$.

Θεωρούμε την σχέση: $|t(x)-0| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{\eta\mu x}{x^\nu}| < \varepsilon$. Αλλά είναι $|\frac{\eta\mu x}{x^\nu}| \leq \frac{1}{x^\nu}$ γιατί $\forall\ x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \leq 1$. Οπότε αρκεί να είναι: $\frac{1}{|x^\nu|} < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow |x| > \sqrt[\nu]{\frac{1}{\varepsilon}} \leftrightarrow x > \sqrt[\nu]{\frac{1}{\varepsilon}}$ και αν θεωρήσουμε τον περιορισμό της $t/(1,+\infty)$ θα έχουμε: $x > \sqrt[\nu]{\frac{1}{\varepsilon}}$ και με $\delta \geq \sqrt[\nu]{\frac{1}{\varepsilon}}$ θα είναι $x > \delta \geq \sqrt[\nu]{\frac{1}{\varepsilon}}$ και $|t(x)| < \varepsilon$ $\forall\ x \in \mathcal{D}(t)$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{+\infty}t(x) = 0$.

7. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = 4$ όπου $f(x) = \frac{4x+3}{x-1}$

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{1\} = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$ και επειδή το $(-\infty)$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ το ζητούμενο όριο έχει έννοια.

Για να είναι $\lim\limits_{-\infty}f(x) = 4$ πρέπει $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ με $x > \delta \to |f(x)-4| < \varepsilon$. Η σχέση $|f(x)-4| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{4x+3}{x-1}-4| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow |\frac{4x+3-4x+4}{x-1}| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{7}{x-1}| < \varepsilon \leftrightarrow -\frac{7}{x-1} < \varepsilon$ (επειδή δεχόμαστε ότι $x \in (-\infty,1)$). Άρα $\frac{7}{1-x} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{1-x}{7} > \frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow 1-x > \frac{7}{\varepsilon} \leftrightarrow x < 1-\frac{7}{\varepsilon}$

Και αν εκλέξουμε $\delta \geq -1+\frac{7}{\varepsilon}$ έχουμε $\forall\ \varepsilon > 0$, $x<-\delta \rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$.

8. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ όπου $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ οπότε το $(-\infty)$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{x^2-3x+1}{x^2+1} -1\right| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left|\frac{x^2-3x+1-x^2-1}{x^2+1}\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{-3x}{x^2+1}\right| < \varepsilon \leftrightarrow \frac{-3x}{x^2+1} < \varepsilon$ (επειδή δεχόμαστε $x<0$) $\leftrightarrow x^2\varepsilon+\varepsilon+3x > 0 \leftrightarrow x^2+\frac{3}{\varepsilon}x+1 > 0 \leftrightarrow x^2+2\frac{3}{2\varepsilon}x+\frac{9}{4\varepsilon^2}-\frac{9}{4\varepsilon^2}+1 > 0$

$\leftrightarrow (x+\frac{3}{2\varepsilon})^2 > \frac{9}{4\varepsilon^2}-1 \leftrightarrow |x+\frac{3}{2\varepsilon}| > \sqrt{\frac{9}{4\varepsilon^2}-1} \rightarrow x+\frac{3}{2\varepsilon} < -\sqrt{\frac{9}{4\varepsilon^2}-1} \rightarrow$

$\rightarrow x < -\frac{3}{2\varepsilon}-\sqrt{\frac{9}{4\varepsilon^2}-1}$ και αν επιλέξουμε $\delta \geq \frac{3}{2\varepsilon}+\sqrt{\frac{9}{4\varepsilon^2}-1}$ τότε θα έχουμε $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$: με $x<-\delta \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

9. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ με $f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2+x+1}$

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \{x\in\mathbb{R}: -x^2+3x-2 \geq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: x^2-3x+2 \leq 0\} = [1,2]$
Άρα το $(-\infty)$ δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο όριο δεν έχει έννοια.

10. Δείξετε με τη μέθοδο "ε,δ" ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ με $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Επομένως το $(-\infty)$ είναι σημείο συσσωρεύσεως και η έκφραση $\lim\limits_{-\infty} f(x)$ έχει νόημα.
Έστω $\varepsilon>0$ αυθαίρετο οσοδήποτε μικρό θέλουμε να προσδιορίσουμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε $\forall x\in\mathcal{D}(f)$ με $x<-\delta \rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon$.
Θεωρούμε την σχέση $|f(x)| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| < \varepsilon$ (1). Αλλά είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$ (2). Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\ x\in\mathcal{D}(f)$ με $x<-\delta \rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon$(3) και επειδή το $x\to-\infty$ δεν βλάπτεται η γενικότητα αν δεχτούμε $x<0$ οπότε η (3) γίνεται: $-\frac{1}{x} < \varepsilon \leftrightarrow \frac{1}{x} > -\varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon}$. Αν διαλέξουμε τώρα τον $\delta \geq \frac{1}{\varepsilon}$ τότε θα είναι $x<-\delta \leq -\frac{1}{\varepsilon}$

και θα πληρούται $x<0$ και ακόμη $\forall\, x\in\mathcal{D}(f)$ θα ισχύει $|f(x)|<\varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

11. Με τον ορισμό σύγκλισης δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ με $f(x)=\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και το $(-\infty)$ έχει σ.σ του $\mathcal{D}(f)$.
Θα πρέπει τώρα να δείξουμε ότι $\lim\limits_{-\infty}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{x}=1$ αρκεί να δείξουμε ότι
$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall\, x\in\mathcal{D}(f)$ με $x<-\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$.
Θεωρούμε την σχέση $|f(x)-1|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{x}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|1-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2x}<\varepsilon$ (1).

Αλλά γνωρίζουμε ότι $\forall\, x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ οπότε είναι $2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2x}\le 2\left(\frac{\alpha}{2x}\right)^2$
$=\frac{\alpha^2}{2x^2}$ (2). Επομένως από την (1) και (2) αρκεί να δείξουμε ότι:
$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in\mathcal{D}(f)$ με $x<-\delta \Rightarrow \frac{\alpha^2}{2x^2}<\varepsilon$ (3). Από (3) είναι

$x^2>\frac{\alpha^2}{2\varepsilon} \Leftrightarrow |x|>\frac{|\alpha|}{\sqrt{2\varepsilon}}$ και επειδή $x\to-\infty$ δεχόμαστε $x<0$ οπότε

$-x>\frac{|\alpha|}{\sqrt{2\varepsilon}} \Leftrightarrow x<-\frac{|\alpha|}{\sqrt{2\varepsilon}}$ και αν εκλέξουμε τον $\delta\ge\frac{|\alpha|}{\sqrt{2\varepsilon}}$ τότε θα είναι

$x<-\delta\le-\frac{|\alpha|}{\sqrt{2\varepsilon}}$ δηλ. θα ισχύει $x<0$ και $|f(x)-1|<\varepsilon\ \forall\, x\in\mathcal{D}(f)$ που σημαίνει $\lim\limits_{-\infty} f(x)=1$.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=5-\frac{|x+1|}{x}$.

Να βρεθούν: ι) τα όρια της f στο $(+\infty)$ και $(-\infty)$.

ιι) Να εξετάσετε αν οι ευθείες $y=4$ και $y=6$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Λύση: ι) Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ επομένως είναι το $(+\infty)$ και $(-\infty)$ σημεία συσσωρεύσεως.
Επειδή ο τύπος της f έχει απόλυτα βρίσκουμε τη ρίζα του απόλυτου που αν τη τοποθετήσουμε στον πραγματικό άξονα $-\infty \quad -1 \quad +\infty$
διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $x\ge-1$ με $x\ne0$ τότε $f(x)=5-\frac{x+1}{x}=5-1-\frac{1}{x}=4-\frac{1}{x}$

β) $x < -1 \rightarrow f(x) = 5 - \frac{-x-1}{x} = 5+1+\frac{1}{x} = 6+\frac{1}{x}$.

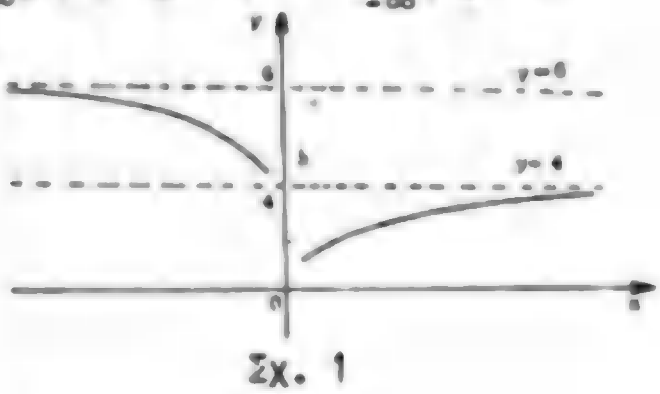
Επομένως έχουμε: $f(x)-4 = -\frac{1}{x}$ αν $x \in [-1,0) \cup (0,+\infty)$ και $f(x)-6 = \frac{1}{x}$ αν $x \in (-\infty,-1)$.

α_1) $\lim\limits_{+\infty}[f(x)-4] = -\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x} = 0 \rightarrow \lim\limits_{+\infty}[f(x)-4] = 0 \rightarrow \lim\limits_{+\infty}f(x) = 4$

και η ευθεία $y = 4$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη της f.

β_1) $\lim\limits_{-\infty}[f(x)-6] = \lim\limits_{-\infty}\frac{1}{x} = 0 \rightarrow \lim\limits_{-\infty}[f(x)-6] = 0 \rightarrow \lim\limits_{-\infty}f(x) = 6$

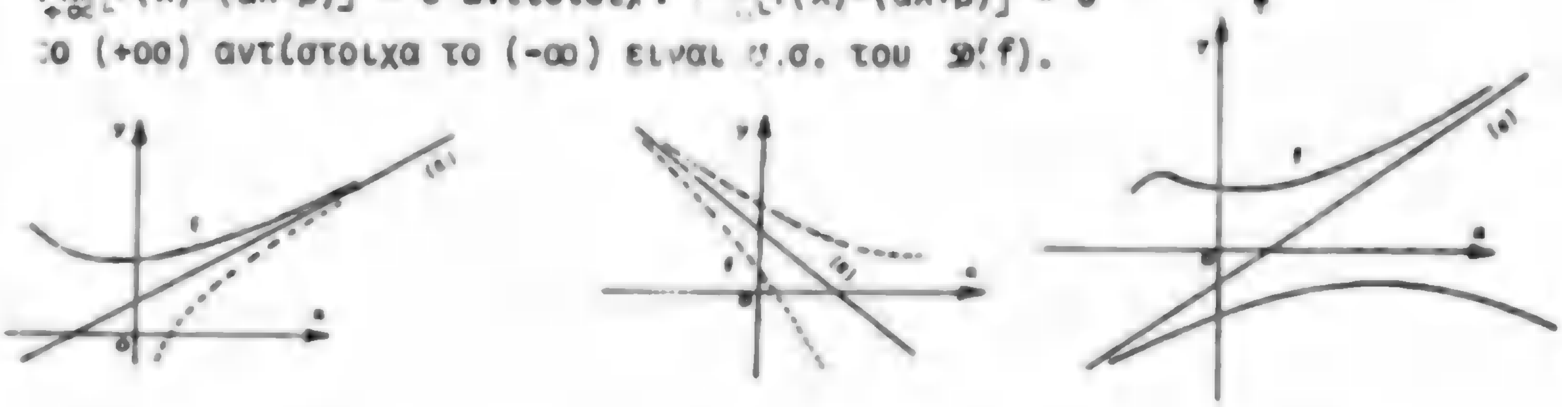
και η ευθεία $y = 6$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f.
Τα παραπάνω φαίνονται στο διπλανό (σχήμα 1).



Σχ. 1

4.5. Πλάγιες ασύμπτωτες στο διάγ[illegible]α της f.

Ορισμός: Η ευθεία $y = \alpha x+\beta$/[illegible] $\alpha \neq 0$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f στο $+\infty$ αν[illegible] στο $(-\infty)$ τότε και μόνο τότε όταν $\lim\limits_{+\infty}[f(x)-(\alpha x+\beta)] = 0$ αντίστοιχ[illegible] $[f(x)-(\alpha x+\beta)] = 0$ [illegible]ο $(+\infty)$ αντίστοιχα το $(-\infty)$ είναι [illegible].σ. του $\mathcal{D}(f)$.



Πρόταση: Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ με σ.σ το $+\infty$. Η ευθεία $y = \alpha x+\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f στο $(+\infty)$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha$ και $\lim\limits_{+\infty}[f(x)-\alpha x] = \beta$.

Παρατηρήσεις: 1. Εάν το $\alpha \in \mathbb{R}$ και είναι $\alpha = 0$ τότε η ευθεία $y = \beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f στο $(+\infty)$ ή $(-\infty)$.

2. Εάν $\lim\limits_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ δεν υπάρχει ή υπάρχει και είναι το $\pm\infty$ τότε το διάγραμμα της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

3. Εάν υπάρχει το $\lim\limits_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\pm\infty}[f(x)-\alpha x]$

ή είναι $\lim_{\pm\infty}[f(x)-\alpha x] = \pm\infty$ τότε και πάλι το διάγραμμα της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

4. Η πλάγια ασύμπτωτη $y = \alpha x+\beta$ θα βρίσκεται κάτω από το διάγραμμα της f όταν $f(x) > \alpha x+\beta$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$: $|x| > \theta$ με $\theta > 0$.

5. Η πλάγια ασύμπτωτη $y = \alpha x+\beta$ θα βρίσκεται πάνω από το διάγραμμα της f όταν $f(x) < \alpha x+\beta$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$: $|x| > \theta$ με $\theta > 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων αν υπάρχουν

1. Της f με $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ 2. Της f με $f(x) = x+\log x$

Λύση: 1. 1ος τρόπος. Η f έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{1,-1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup$ $\cup(1,+\infty)$ επομένως το $(+\infty)$ και $(-\infty)$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και τα όρια $\lim_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{\pm\infty}[f(x)-\alpha x]$ έχουν έννοια.

Αναζητούμε αν το διάγραμμα της f έχει την ευθεία $y = \alpha x+\beta$ πλάγια ασύμπτωτη. Τότε ο πραγματικός α θα είναι το $\lim_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha$ και ο β το $\lim_{\pm\infty}[f(x)-\alpha x] = \beta$. Έχουμε: $\lim_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x} = \lim_{\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$,

οπότε $\alpha = 1$ και $\lim_{\pm\infty}[f(x)-\alpha x] = \lim_{\pm\infty}[\frac{x^3}{x^2-1}-x] = \lim_{\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} =$

$= \lim_{\pm\infty}\frac{1}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{\pm\infty}\frac{1}{x}\lim_{\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 0$, οπότε $\beta = 0$.

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f.

2ος τρόπος. Αν ο τύπος μιας συνάρτησης f, μπορεί να λάβει την μορφή $y = \alpha x+\beta+\varphi(x)$ με $\lim_{\pm\infty}\varphi(x) = 0$ τότε η ευθεία $y = \alpha x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f. Η f αν κάνουμε την διαίρεση $x^3 : (x^2-1)$ παίρνει την μορφή: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} = x+\frac{x}{x^2-1} = 1x+0+\varphi(x)$ με $\varphi(x) = \frac{x}{x^2-1}$ και επειδή $\lim_{\pm\infty}\varphi(x) = \lim_{\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0$ η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f.

2. Η συνάρτηση f έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+^* = (0,+\infty)$ επομένως θα αναζητήσουμε πλάγια ασύμπτωτη στο $(+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{\log x}{x}\right) = 1+\lim\limits_{+\infty}\frac{\log x}{x} = 1$ γιατί $\lim\limits_{+\infty}\frac{\log x}{x} = 0$

άρα $\alpha = 1$ και $\beta = \lim\limits_{+\infty}[f(x)-\alpha x] = \lim\limits_{+\infty}[x+\log x - x] = \lim\limits_{+\infty}\log x = +\infty$.

'Αρα η συνάρτηση f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

2. 'Εστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \gamma\sqrt{x^2-\alpha^2}$, $\gamma\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη αν υπάρχει.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = (-\infty,-\alpha]\cup[\alpha,+\infty)$. Αν η f είχε πλάγια ασύμπτωτη την $y = \kappa x+\lambda$ θα ήταν:

$$\kappa = \lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}\frac{\gamma\sqrt{x^2-\alpha^2}}{x} = \lim_{+\infty}\frac{\gamma|x|\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}}{x} = \gamma \text{ και}$$

$$\lambda = \lim_{+\infty}[f(x)-\kappa x] = \lim_{+\infty}[\gamma\sqrt{x^2-\alpha^2}-\gamma x] = \gamma\lim_{+\infty}\frac{-\alpha^2}{\sqrt{x^2-\alpha^2}+x} = 0$$

'Αρα η ευθεία $y = \gamma x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης.

$$\text{'Ομοια } \kappa = \lim_{-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty}\frac{\gamma\sqrt{x^2-\alpha^2}}{x} = \lim_{-\infty}\frac{\gamma|x|\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}}{x} = -\gamma \text{ και}$$

$$\lambda = \lim_{-\infty}[f(x)+\gamma x] = \lim_{-\infty}(\gamma\sqrt{x^2-\alpha^2}+\gamma x) = \gamma\lim_{-\infty}\frac{-\alpha^2}{\sqrt{x^2-\alpha^2}-x} = 0$$

'Αρα η ευθεία $y = -\gamma x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης.

3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases}\frac{2x+1}{x+2}, & x\le 1\\ 5\sqrt{x^2-1}, & x>1\end{cases}$

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f αν υπάρχουν.

Λύση: Επειδή ο πρώτος κλάδος της f είναι ρητή συνάρτηση υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη η $x = -2$ που είναι δεχτή γιατί $-2\in(-\infty,1]$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{-\infty}\frac{2x+1}{x+2} = \lim\limits_{-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$ και η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη και μάλιστα αριστερά γιατί είναι $x<1$ και $x\to-\infty$.

Από τον δεύτερο τύπο της f έχουμε:

$$\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}\frac{5\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{+\infty}\frac{5|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = 5 \text{ και}$$

$$\lim_{+\infty}[f(x)-5x] = \lim_{+\infty}[5\sqrt{x^2-1}-5x] = 5\lim_{+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

'Αρα η ευθεία $y = 5x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f.

4. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ εφ' όσον υπάρχουν.

Λύση: Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$ και επομένως $+\infty$ και $-\infty$ σημεία συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Αναζητούμε τώρα τα: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x^2} = \frac{1}{2}$ επομένως $a = \frac{1}{2}$

Στη συνέχεια αναζητούμε τα: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-xa] = 0$. Άρα και για τις δύο περιπτώσεις $\beta = 0$.

Μετά από αυτό η ευθεία $y = ax+\beta = \frac{1}{2}x+0 = \frac{1}{2}x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f. Επειδή τώρα: $f(x)-(ax+\beta) = \frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$.

Θα έχουμε: $f(x)>ax+\beta$ αν $x>0$, οπότε η ασύμπτωτη της f για $x>0$ είναι κάτω από το διάγραμμα αυτής, ενώ για $x<0$, είναι πάνω από το διάγραμμα.

5. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}$. Εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες οριζόντιες πλάγιες.

Λύση: Εξετάζουμε αν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες. Στην περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} = +\infty$

επομένως δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Για να δούμε αν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες εξετάζουμε τα:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Έχουμε: $\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty}\sqrt{\frac{x^3+1}{x^3+3x^2}} = +1$ και $\lim\limits_{-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\lim\limits_{-\infty}\sqrt{\frac{x^3+1}{x^3+3x^2}} = -1$

Μετά από αυτό είναι: $a = 1$ για την πρώτη περίπτωση και $a = -1$ για την δεύτερη περίπτωση. Στη συνέχεια ελέγχουμε αν υπάρχουν τα:

$\lim\limits_{+\infty}[f(x)-ax]$ και $\lim\limits_{-\infty}[f(x)-ax]$.

Για $a = 1$ θα έχουμε: $\lim\limits_{+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{+\infty}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-x = \lim\limits_{+\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x+3}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}+x} =$

$= \lim\limits_{+\infty}\frac{-3x^2+1}{\sqrt{(x+3)(x^3+1)}+x(x+3)} = -\frac{3}{2}$, οπότε η ευθεία $y = ax+\beta = x-\frac{3}{2}$

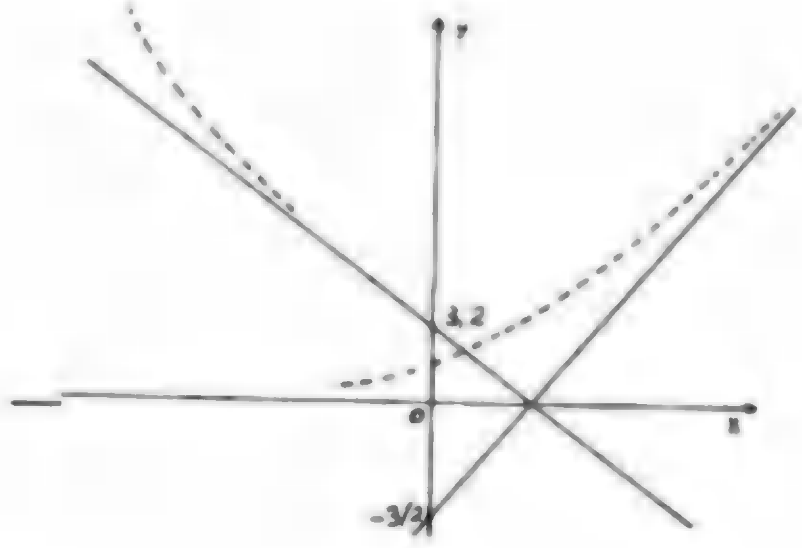
είναι μια πλάγια ασύμπτωτη.

Επίσης για $\alpha = -1$ θα έχουμε: $\lim\limits_{-\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{-\infty}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}+x =$

$$= \lim_{-\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x+3}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-x} = \lim_{-\infty}\frac{x^3+1-x^3-3x^2}{(x+3)\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-x(x+3)} = \lim_{-\infty}\frac{-3+\frac{1}{x^2}}{-\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x}}}-1-\frac{3}{x^2}}$$

$= \frac{3}{2}$ οπότε και η ευθεία $y = -x+\frac{3}{2}$ είναι μια πλάγια ασύμπτωτη.

Επειδή για $x > -1$ είναι $f(x) > x-\frac{3}{2}$ η ασύμπτωτη $y = x-\frac{3}{2}$ βρίσκεται κάτω από το διάγραμμα της f και επειδή για $x < -3$ είναι $f(x) > -x+\frac{3}{2}$ η ασύμπτωτη $y = -x+\frac{3}{2}$ βρίσκεται και αυτή κάτω από το διάγραμμα της f.



Γραφικά έχουμε το διπλανό σχήμα

Παρατηρούμε ότι η $y = -x+\frac{3}{2}$ τέμνει το διάγραμμα της f στο σημείο $x = \frac{23}{27}$ γιατί η εξίσωση: $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} = -x+\frac{3}{2}$ έχει λύση στο $\mathcal{D}(f)$, ενώ η εξίσωση $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} = x-\frac{3}{2}$ δεν έχει λύση στο $\mathcal{D}(f)$.

4.6. Οριακή τιμή συνάρτησης στο ξ.

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A \in \mathbb{R}$ κει με σύνολο τιμών το $B \in \mathbb{R}$ και έστω $\xi \in \mathbb{R}$ που είναι σημείο συσσωρεύσεως του A και λ ένας πραγματικός αριθμός.

Ορισμός 1. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση που το πεδίο ορισμού της περιέχει ένα τουλάχιστο ανοιχτό διάστημα της μορφής (ξ,β), (α,ξ), $(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$ έχει στο ξ όριο, τον πραγματικό αριθμό λ ή (συκλίνει στον πραγματικό λ) τότε και μόνο τότε όταν: $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε $\forall x \in A$ με

$0 < |x-\xi| < \delta \longleftrightarrow |f(x)-\lambda| < \varepsilon$. Συμβολικά:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall\ x \in A$ με $0 < |x-\xi| < \delta \rightarrow |f(x)-\lambda| < \varepsilon$

Παρατηρήσεις: 1. Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

ι) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lambda \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\xi}(f(x)-\lambda) = 0$

ιι) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lambda \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\xi}(-f(x)) = -\lambda$

ιιι) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 0 \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\xi}|f(x)| = 0$

2. Αν η g είναι ο περιορισμός της f που ορίζεται σε ένα τουλάχιστο διάστημα της μορφής (α,ξ), (ξ,β), $(\alpha,\xi) \cup (\xi,\beta)$ τότε ισχύει:

$$\lim\limits_{x\to\xi} f = \lambda \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\xi} g = \lambda$$

Που σημαίνει ότι όταν ζητούμε το όριο της f στη θέση $x = \xi$ είναι αρκετό να περιοριστούμε σε μια περιοχή κέντρου ξ με $x \neq \xi$.

3. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f δεν έχει οριακή τιμή στο ξ όπου ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $\forall\ \delta > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $x \in \mathcal{D}(f)$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως $0 < |x-\xi| < \delta$ και $|f(x)-\lambda| \geq \varepsilon$.
Δηλ.: Δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) \overset{\text{ορσ}}{\longleftrightarrow} \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0: \forall\ \delta > 0\ x \in \mathcal{D}(f)$ ισχύουν.
$0 < |x-\xi| < \delta$ και $|f(x)-\lambda| \geq \varepsilon$.

4. Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση έχει στο σημείο ξ όπου ξ σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ όριο το λ είναι αρκετό να βρούμε ένα θετικό αριθμό $\kappa > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x)-\lambda| \leq \kappa|x-\xi| \quad \forall\ x \in \mathcal{D}(f)$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Με την μέθοδο "ε,δ" ή τη μέθοδο Cauchy δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \xi$ αν $f(x) = x$.

Λύση: Επειδή το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ το τυχαίο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Σύμφωνα τώρα με τον ορισμό είναι αρκετό να δείξουμε ότι:
$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0: \forall\ x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x-\xi| < \delta \rightarrow |f(x)-\xi| < \varepsilon$.
Έστω $\varepsilon > 0$ θα προσδιορίσουμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε η συνθήκη $|f(x)-\xi| < \varepsilon \longleftrightarrow |x-\xi| < \varepsilon$ να ικανοποιείται $\forall\ x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x-\xi| < \delta$ αν εκλέξουμε $\delta = \varepsilon$ τότε θα ισχύουν συγχρόνως $0 < |x-\xi| < \delta$ και $|x-\xi| < \varepsilon \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow |f(x)-\xi| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \xi$.

2. Δείξετε με την μέθοδο "ε,δ" ή μέθοδο Cauchy ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ με $f(x) = x^2-3x+3$.

Λύση: 1ος τρόπος: Επειδή είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ το 2 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Σύμφωνα με τον ορισμό είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$: $\forall\ x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x-2| < \delta \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$.
Έστω $\varepsilon > 0$ αυθαίρετος θα προσδιορίσουμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε η συνθήκη $|f(x)-1| < \varepsilon$ να ικανοποιείται $\forall\ x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x-2| < \delta$.
Είναι $|f(x)-1| = |x^2-3x+3-1| = |x(x-2)-(x-2)| = |x-2||x-1|$ (i) και επειδή $x \to 2$ μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά των τιμών της f σε μια περιοχή του 2 δηλ., σε ένα τουλάχιστο διάστημα της μορφής $(\kappa,2) \cup (2,\lambda)$ με $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$.
Οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας δεχόμαστε ότι το $x \in (-1,3) \leftrightarrow -1 < x < 3 \leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \leftrightarrow |x-1| < 2$ (ii).
Από τις (i) και (ii) έχουμε: $|f(x)-1| = |x-2||x-1| < 2|x-2|$ (iii)
Θέλουμε τώρα να βρούμε τα δ εκείνα για τα οποία είναι $2|x-2| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$ που αν θέσουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ θα έχουμε $\forall\ \varepsilon > 0,\ \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $0 < |x-2| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ ισχύει $|f(x)-1| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι

$\lim_{2} f(x) = 1$.

2ος τρόπος: Θα δώσουμε στη σχέση $|f(x)-1|$ τη μορφή $|f(x)-1| \leq \theta|x-2|$ με $\theta > 0$. Οπότε κατά γνωστή πρόταση είναι $\lim_{2} f(x) = 1$.
Είναι $|f(x)-1| = |x^2-3x+3-1| = |x(x-2)-(x-2)| = |x-2||x-1|$ (1) θα πρέπει επομένως να δώσουμε στον παράγοντα $|x-1|$ τη μορφή $|x-1| < \alpha$ και τον α να τον προσδιορίσουμε έτσι ώστε το x να ανήκει σε ένα σύνολο της μορφής $(\kappa,2) \cup (2,\lambda)$ αφού το $x \to 2$.
Από την σχέση: $|x-1| < \alpha \leftrightarrow 1-\alpha < x < 1+\alpha$ (2) που για να βρίσκεται το x σε ένα σύνολο της μορφής $(\kappa,2) \cup (2,\lambda)$ είναι αρκετό να πάρουμε σαν α ένα οποιοδήποτε αριθμό μεγαλύτερο του 1.
Π.χ. $\alpha = 2$, τότε η (2) δίνει: $-1 < x < 3 \leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \leftrightarrow |x-1| < 2$ και τότε η (1) γίνεται $|f(x)-1| = |x-2||x-1| < 2|x-2|$ απ'όπου συμπεραίνουμε, ότι $\lim_{2} f(x) = 1$.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε σαν α να παίρναμε και τους αριθμούς 3,4,5,... οπότε τότε η (2) θα έδινε με $\alpha = 3$, $-2 < x < 4 \leftrightarrow -3 < x-1 < 3 \rightarrow |x-1| < 3 \rightarrow$
$\rightarrow |f(x)-1| < 3|x-2|$ κ.λ.π.
Δεν θα μπορούσαμε να δώσουμε στον α τιμή ≤ 1 γιατί τότε με $\alpha = 1$ θα είχαμε $0 < x < 2$ και τότε το x δεν θα βρισκότανε σε διάστημα της μορφής $(\kappa,2) \cup (2,\lambda)$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$. Δείξετε ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$.

Λύση: Είναι $\Delta(f) = \mathbb{R}-\{2\} = (-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ και επειδή το 2 είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ το ζητούμενο όριο έχει έννοια.

Είναι $\lim_{x\to 2} f(x) = 0 \rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{x^2-4x+4}{x-2}| < 0 \leftrightarrow |\frac{(x-2)^2}{x-2}| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow |x-2| < \varepsilon$ και αν επιλέξουμε $\delta \le \varepsilon$ τότε θα έχουμε: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε με $|x-2| < \delta \rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

4. Με την μέθοδο "ε,δ" ή τη μέθοδο Cauchy δείξετε ότι: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, αν $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$

Λύση: Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{-1,1\}$ και το 0 σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Σύμφωνα με τον ορισμό θα πρέπει να δείξουμε, ότι $\forall\ \varepsilon > 0$, μπορούμε να ορίσουμε ένα $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε $\forall\ x\in\mathcal{D}(f)$ με $0 < |x-0| < \delta$, να ισχύει:

$|f(x)-0| < \varepsilon \leftrightarrow |\frac{3x}{1-x^2}| < \varepsilon$.

Επειδή αναζητούμε την οριακή τιμή της f στο σημείο 0, μπορούμε να πάρουμε $|x| < 1$ (περιοχή του μηδενός). Αλλά τότε θα έχουμε (γιαυτά τα $x\in\mathcal{D}(f)$).

$\frac{3|x|}{1-|x|^2} < \varepsilon \leftrightarrow 3|x| < \varepsilon-\varepsilon|x|^2 \leftrightarrow \varepsilon|x|^2+3|x|-\varepsilon < 0$. Αλλά για να αληθεύει αυτή η ανισότητα θα πρέπει το $|x|$ να παίρνει τιμές που βρίσκονται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου $\varepsilon|x|^2+3|x|-\varepsilon$. Δεν ξεχνάμε παράλληλα ότι $|x| < 1$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $\frac{-3\pm\sqrt{9+4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$. Επομένως θα πρέπει:

$|x| < \frac{\sqrt{9+4\varepsilon^2}-3}{2\varepsilon}$ και $|x| < 1$. Εάν τώρα πάρουμε σαν $\delta = \min(1, \frac{\sqrt{9+4\varepsilon^2}-3}{2\varepsilon})$, τότε $\forall\ \varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \min(1, \frac{\sqrt{9+4\varepsilon^2}-3}{2\varepsilon})$, έτσι $\forall\ x\in\mathcal{D}(f)$ με $0 < |x| < \delta$, να ισχύει $|\frac{3x}{1-x^2}| < \varepsilon$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{1-x^2} = 0$

5. Δείξετε ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ με $f(x) = |x-2|+5x-3$.

Λύση: 1ος τρόπος. Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και επομένως το 2 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Έστω $\varepsilon > 0$ τότε θα προσδιορίσουμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε με $0 < |x-2| < \delta$ η συνθήκη $|f(x)-7| < \varepsilon$ να ισχύει $\forall\ x\in\mathcal{D}(f)$.

Έχουμε: $|f(x)-7| = ||x-2|+5x-3-7| = ||x-2|+5(x-2)| \le |x-2|+5|x-2| \le$
$\le 6|x-2|$.

Επομένως είναι αρκετό να προσδιορίσουμε εκείνα τα δ για τα οποία $6|x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{6}$ και αν θέσουμε $\delta \leq \frac{\varepsilon}{6}$ τότε έχουμε $\forall\ \varepsilon>0$ θα υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)\leq\frac{\varepsilon}{6}>0$: $\forall\ x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{6}=\delta$ ισχύει $|f(x)-7|<\varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=7$.

2ος τρόπος. Η παράσταση $|f(x)-7|$ γράφεται: $|f(x)-7| = ||x-2|+5x-3-7| = ||x-2|+5(x-2)| \leq ||x-2||+5|x-2| = |x-2|+5|x-2| = 6|x-2|$ δηλαδή $|f(x)-7|\leq 6|x-2|$, οπότε από γνωστή πρόταση είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=7$.

6. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$ με $f(x)=x^2-4x+8$.

Λύση: 1ος τρόπος: Είναι $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ και το σημείο 1 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ οπότε το ζητούμενο όριο έχει έννοια.

Είναι: $|f(x)-5| = |x^2-4x+8-5| = |x(x-1)-3(x-1)| = |x-3||x-1|$ (1) και θα πρέπει να είναι $|x-3|<\theta$ (2). Επειδή δε το $x\to 1$ μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά των τιμών της f σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ επομένως θα πρέπει να προσδιορίσουμε κάποιο θ έτσι ώστε το x να είναι σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$.

Η (2) $\Leftrightarrow 3-\theta<x<3+\theta$ που αν διαλέξουμε το $\theta>1$ και έστω $\theta=2$ θα είναι: $1<x<5 \Leftrightarrow -2<x-3<2 \Leftrightarrow |x-3|<2$ (3).

Οπότε η (1) γίνεται: $|f(x)-5| = |x-3||x-1| < 2|x-1|$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$.

2ος τρόπος. Θα πρέπει να δείξουμε ότι: $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$: $\forall\ x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$ (1).

Έστω $\varepsilon>0$ και πρέπει να προσδιορίσουμε κάποιο κατάλληλο $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε $\forall\ x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |x^2-4x+8-5|<\varepsilon$.

Δηλαδή θέλουμε: $|x^2-4x+3|<\varepsilon \Rightarrow |(x-3)(x-1)|<\varepsilon \Rightarrow |x-3||x-1|<\varepsilon$ (2)

Επειδή το $x\to 1$ θα πρέπει το x να είναι σε κάποιο διάστημα της μορφής $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ δηλ. το x ανήκει σε μια περιοχή του 1 με τυχαία ακτίνα μ και έστω $\mu=1$.

Οπότε $x\in\pi(1,\mu) \Leftrightarrow 1-\mu<x<1+\mu \Leftrightarrow -\mu<x-1<\mu \Leftrightarrow |x-1|<\mu \Leftrightarrow |x-1|<1$. Άρα η (2) δίνει $|f(x)-5|<|x-3|$.

Αρκεί επομένως να βρούμε εκείνα τα δ για τα οποία είναι $|x-3|<\varepsilon$ που αν θέσουμε $\delta=\delta(\varepsilon)=\min(\varepsilon,1)$ θα είναι $0<|x-1|<\delta$ και θα συνεπάγεται και $|f(x)-5| = |x-3||x-1|<\varepsilon\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ με $\varepsilon>0$, που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$.

7. Δίνεται η f: $\mathbb{R}-\{2,-2\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-4}$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\frac{1}{4}$

Λύση: Είναι το 0 σ.σ του $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$ επομένως έχει έννοια το $\lim\limits_{0}f(x)$. Θεωρούμε $\varepsilon>0$ και θα πρέπει να προσδιορίσουμε κατάλληλο $\delta=$ $=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{2,-2\}$ με $0<|x-0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{3x+1}{x^2-4}+\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$.

Δηλαδή θέλουμε: $\left|\frac{3x+1}{x^2-4}+\frac{1}{4}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{12x+4+x^2-4}{4(x^2-4)}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2+12x}{4(x^2-4)}\right|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\frac{x(x+12)}{4(x^2-4)}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x|}{4}\frac{|x+12|}{|x^2-4|}<\varepsilon$ (α)

Αλλά το πρώτο μέλος της (α) γίνεται: $\frac{|x|}{4}\frac{|x+12|}{|x^2|-4|} \leq \frac{|x|}{4}\frac{(|x|+12)}{|x^2|-4|}$ (β)

Οπότε είναι αρκετό να βρούμε το δ όταν $\frac{|x|}{4}\frac{(|x|+2)}{|x|^2-4|}<\varepsilon$ (γ)

Επειδή το $x\to 0$ θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το x είναι σε μια περιοχή το μηδέν με τυχαία ακτίνα $\theta>0$ δηλαδή $x\in\pi(-\theta,\theta)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\theta<x<\theta \Leftrightarrow |x|<\theta$, και αν $\theta=2$ τότε $|x|<2 \Leftrightarrow |x|^2<4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x|^2-4<0$ (1)

Η (γ) λόγω της (1) $\Leftrightarrow |x|^2+12|x|<4\varepsilon(4-|x|^2) \Leftrightarrow 4\varepsilon|x|^2+|x|^2+12|x|-16\varepsilon<$ $<0 \Leftrightarrow |x|^2(4\varepsilon+1)+12|x|-16\varepsilon<0 \Leftrightarrow |x|^2+2\cdot\frac{1}{4\varepsilon+1}|x|+\frac{\varepsilon\delta}{(4\varepsilon+1)^2}-\frac{\varepsilon\varepsilon}{(4\varepsilon+1)^2}-$ $-16\varepsilon<0 \Leftrightarrow \left(|x|+\frac{6}{4\varepsilon+1}\right)^2<\frac{\varepsilon\delta}{(4\varepsilon+1)^2}+16\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|+\frac{6}{4\varepsilon+1}<\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(4\varepsilon+1)^2}+16\varepsilon} \Leftrightarrow |x|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{(4\varepsilon+1)^2}+16\varepsilon}-\frac{6}{4\varepsilon+1}$ (2)

Από τις (1) και (2) αν πάρουμε $\delta=\min\{2,\sqrt{\frac{1}{(4\varepsilon+1)^2}+16\varepsilon}-\frac{1}{4\varepsilon+1}\}$ τότε

$\forall\ \varepsilon>0$ θα υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\ x\in\mathbb{R}-\{2,-2\}$ με $0<|x-0|<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|f(x)+\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$ που σημαίνει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\frac{1}{4}$.

8. Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x+\xi)$.

Λύση: Αποδεικνύουμε κατ'αρχήν ότι αν $x\to\xi$, τότε $x-\xi\to 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=x-\xi$ για την οποία προφανώς $\mathcal{D}(\varphi)=\mathbb{R}$. Θα δείξουμε, ότι $\lim\limits_{x\to\xi}\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x-\xi\to 0$. Αρκεί τώρα να δείξουμε, ότι $\forall\ \varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε $\forall\ x\in\mathcal{D}(\varphi)$ με $0<|x-\xi|<\delta$, να ισχύει $|\varphi(x)-0|<\varepsilon$ το οποίο συμβαίνει αρκεί να πάρουμε το $\delta=\varepsilon$.

Ερχόμαστε τώρα στο θέμα μας.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$ (έστω), έπεται ότι $\forall\ \varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε

$\forall\, x\in \mathcal{D}(f)$ με $0<|x-\xi|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-\lambda|<\varepsilon$. Εάν βάλουμε $x-\xi = y$, τότε αν $x\to\xi \to y\to 0$ και ακόμη, με βάση τις παραπάνω, ότι: $\forall\, \varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε με: $0<|y|<\delta$, να ισχύει: $|f(y+\xi)-\lambda|<\varepsilon$.
Αλλά $0<|y|<\delta \leftrightarrow 0<|f(y+\xi)-\xi|<\delta \leftrightarrow |f(y+\xi)-\lambda|<\varepsilon$, ή $\lim\limits_{y\to 0} f(y+\xi) = \lambda$,
το οποίο (αλλαγή μεταβλητής) συμπίπτει με το: $\lim\limits_{x\to 0} f(x+\xi) = \lambda$.
Το αντίστροφο είναι απλό και αποδεικνύεται με τον ανάλογο τρόπο εργασίας

9. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ με $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$.

Λύση: Είναι το 0 σ.σ του $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$ και επομένως το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Έστω $\varepsilon>0$ θα πρέπει να προσδιορίσουμε κατάλληλο $\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\, x\in\mathbb{R}-\{0\}$ με $|x|<\delta \to |f(x)|<\varepsilon$ (1) και επειδή $|\eta\mu\frac{1}{x}|\le 1$ η (1) γίνεται: $|x\eta\mu\frac{1}{x}|\le|x|$ (2).
Είναι αρκετό επομένως να προσδιορίσουμε το δ έτσι ώστε $|x|<\varepsilon$ (3)
Από την (1) και (3) αν θέσουμε $\delta=\varepsilon$ τότε $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$: $\forall\, x\in\mathbb{R}-\{0\}$ με $|x|<\delta=\varepsilon \to |x\eta\mu\frac{1}{x}|<\varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$.

10. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to[-1,1]$ με $f(x) = \eta\mu x$. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\xi}\eta\mu x = \eta\mu\xi$.

Λύση: Έστω $\varepsilon>0$ τότε θα πρέπει να βρούμε $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε $\forall\, x\in\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ με $0<|x-\xi|<\delta \to |\eta\mu x-\eta\mu\xi|<\varepsilon$. Αλλά είναι $|\eta\mu x-\eta\mu\xi| = 2|\eta\mu\frac{x-\xi}{2}||\sigma\upsilon\nu\frac{x+\xi}{2}| \le 2|\eta\mu\frac{x-\xi}{2}|\le 2|\frac{x-\xi}{2}| = |x-\xi|$ γιατί $\forall\, x\in\mathbb{R}$ είναι: $|\sigma\upsilon\nu\frac{x+\xi}{2}|\le 1$ και $|\eta\mu\frac{x-\xi}{2}|\le|\frac{x-\xi}{2}|$
Οπότε είναι αρκετό να βρούμε το δ έτσι ώστε $|x-\xi|<\varepsilon$. Αν θέσουμε $\delta=\varepsilon$ τότε: $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$: $\forall\, x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-\xi|<\delta=\varepsilon$ ισχύει $|\eta\mu x-\eta\mu\xi|<\varepsilon$, που σημαίνει $\lim\limits_{x\to\xi}\eta\mu x = \eta\mu\xi$.

11. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^*_+\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \log x$. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\xi\in\mathbb{R}^*_+}\log x = \log\xi$.

Λύση: Έστω $\varepsilon>0$ θα πρέπει να βρούμε $\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\, x\in\mathbb{R}^*_+$ με $0<|x-\xi|<\delta \to |\log x-\log\xi|<\varepsilon$. Αλλά είναι $|\log x-\log\xi|<\varepsilon \leftrightarrow$
$\leftrightarrow |\log\frac{x}{\xi}|<\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon<\log\frac{x}{\xi}<\varepsilon \leftrightarrow e^{-\varepsilon}<\frac{x}{\xi}<e^{\varepsilon} \leftrightarrow \xi e^{-\varepsilon}<x<\xi e^{\varepsilon} \leftrightarrow$

$\xi e^{-\varepsilon}-\xi < x-\xi < \xi e^{\varepsilon}-\xi$ και αν πάρουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{|\xi e^{-\varepsilon}-\xi|, |\xi e^{\varepsilon}-\xi|\}$ τότε $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ με $0 < |x-\xi| < \delta(\varepsilon)$ ισχύει $|\log x - \log\xi| < \varepsilon$ που σημαίνει $\lim\limits_{x\to\xi}\log x = \log\xi$.

12. Να βρείτε ένα $\delta = \delta(\varepsilon)$ έτσι ώστε να ισχύει $|f(x)-\lambda| < \varepsilon$ $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $0 < |x-\xi| < \delta$, όπου $f(x) = \sqrt{x}, \xi = 1$ και $\lambda = 1$.

Λύση: Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\xi \in \mathcal{D}(f)$ και σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Ζητάμε ένα $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε $\forall\ \varepsilon > 0$ και με $0 < |x-1| < \delta$ να ισχύει $|f(x)-1| < \varepsilon$.

Επειδή $|f(x)-1| = |\sqrt{x}-1| = \left|\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right| \le |x-1|$ $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$, αρκεί να αναζητήσουμε ένα δ έτσι ώστε $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $0 < |x-1| < \delta$ να ισχύει $|x-1| < \varepsilon$. Αυτό όμως σημαίνει ότι αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon > 0$. Πράγματι αν $\delta = \varepsilon$, τότε με: $0 < |x-1| < \delta = \varepsilon$, θα έχουμε και $|f(x)-1| < |x-1| < \varepsilon$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$. Δείξετε ότι δεν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \alpha$.

Λύση: Επειδή $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$ το 0 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο $\lim\limits_{0} f(x)$ έχει νόημα.

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{0} f(x) = \alpha$. Οπότε $\forall\ \varepsilon > 0$ επομένως και με $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\exists\ \delta = \delta(\frac{1}{2}) > 0$: $\forall\ x \in \mathbb{R}-\{0\}$ με $0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$ δηλαδή

$|\eta\mu\frac{1}{x}-\alpha| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ (1).

Η (1) αφού ισχύει $\forall\ x \in \mathbb{R}-\{0\}$ θα ισχύει και για $x = 1/2\nu\pi$ με $\nu \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $|\eta\mu 2\nu\pi - \alpha| < \frac{1}{2} \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{2}$ (2).

Όμοια θα ισχύει και για $x = \dfrac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $|\eta\mu(2\nu\pi+\frac{\pi}{2})-\alpha| < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |1-\alpha| < \frac{1}{2}$ (3). Από τις (2) και (3) έχουμε $(-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ και

$-\frac{1}{2} < 1-\alpha < \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2})$ που είναι άτοπο.

Επομένως δεν μπορεί το $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu\frac{1}{x}$, κ.τ.λ.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in (0,+\infty) \\ -1 & \text{αν } x \in (-\infty,0) \end{cases}$ Δείξετε ότι δεν έχει όριο στη θέση $x = 0$.

Λύση: Θεωρούμε μια περιοχή του 0 έστω την $(-\delta,\delta)-\{0\}$ τότε αν υποθέσουμε ότι η f έχει στο 0 όριο τον πραγματικό αριθμό λ θα είναι: $\forall\ \varepsilon>0$ επομένως και με $\varepsilon=\frac{1}{2}$ θα υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\ x\in(-\delta,\delta)-\{0\}$ με $0<|x|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-\lambda|<\varepsilon$ (1) και επειδή η (1) ισχύει $\forall x\in(-\delta,\delta)-\{0\}$ θα ισχύει και με $x=1$ οπότε $|1-\lambda|<\varepsilon=\frac{1}{2}$ (2).

Όμοια θα ισχύει και με $x=-1$ οπότε $|-1-\lambda|<\varepsilon=\frac{1}{2}$ (3).

Από την (2) και (3) παίρνουμε: $(-\frac{1}{2}<1-\lambda<\frac{1}{2}$ και $|1+\lambda|<\frac{1}{2})\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow(-\frac{1}{2}<\lambda-1<\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}<\lambda+1<\frac{1}{2})\Longleftrightarrow(\frac{1}{2}<\lambda<\frac{3}{2}$ και $-\frac{3}{2}<\lambda<-\frac{1}{2})$

που είναι άτοπο. Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

4.7. Πλευρικά όρια συνάρτησης στο ξ.

Έστω $\mathfrak{D}(f)$ το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f με τύπο $y=f(x)$ και ότι το $\mathfrak{D}(f)$ περιέχει ένα τουλάχιστο διάστημα της μορφής (ξ,β) τότε το ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathfrak{D}(f)$.

Ορισμός 1. Ο πραγματικός αριθμός λ λέγεται **δεξιά οριακή** τιμή της f όταν ο $x\to\xi^+$, αν και μόνο αν $\forall\ \varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ έτσι ώστε $\forall\ x\in\mathfrak{D}(f)$ με $\xi<x<\xi+\delta$ ισχύει $|f(x)-\lambda|<\varepsilon$. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to\xi^+}f(x)=\lambda\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in\mathfrak{D}(f)\text{ με }\xi<x<\xi+\delta\Longrightarrow|f(x)-\lambda|<\varepsilon$$

Ορισμός 2. Εάν το $\mathfrak{D}(f)$ περιέχει ένα τουλάχιστο διάστημα της μορφής (α,ξ) με ξ σ.σ του $\mathfrak{D}(f)$ τότε ο πραγματικός αριθμός λ λέγεται **αριστερά οριακή** τιμή f όταν ο $x\to\xi^-$ τότε και μόνο τότε όταν $\forall\ \varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ έτσι ώστε $\forall\ x\in\mathfrak{D}(f)$ με $\xi-\delta<x<\xi$ ισχύει $|f(x)-\lambda|<\varepsilon$.

Συμβολικά:

$$\lim_{x\to\xi^-}f(x)=\lambda\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon>0,\ \delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall\ x\in\mathfrak{D}(f)\text{ με }\xi-\delta<x<\xi\Longrightarrow|f(x)-\lambda|<\varepsilon$$

Για τα παραπάνω όρια χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$\lim\limits_{\xi^+}f=\lambda$ ή $\lim\limits_{x\to\xi^+}f(x)=\lambda$ ή $\lim\limits_{\substack{x\to\xi^+\\x>\xi}}f(x)=\lambda$

αντίστοιχα:

$\lim\limits_{\xi^-}f=\lambda$ ή $\lim\limits_{x\to\xi^-}f(x)=\lambda$ ή $\lim\limits_{\substack{x\to\xi^-\\x<\xi}}f(x)=\lambda$

Παρατηρήσεις: 1. Οι συμβολισμοί $x\to\xi^+$ αντίστοιχα $x\to\xi^-$ σημαίνουν ότι η

μεταβλητή x πλησιάζει το ξ από δεξιά αντίστοιχα από αριστερά δηλαδή από τιμές μεγαλύτερες του αντίστοιχα μικρότερές του, έτσι ώστε να ισχύει πάντα $x > \xi \leftrightarrow x-\xi > 0$ αντίστοιχα $x < \xi \leftrightarrow x-\xi < 0$.

2. Η δεξιά και η αριστερά οριακή τιμή της f ονομάζονται **πλευρικές οριακές τιμές** της f.

3. Εάν η f δεν ορίζεται **αριστερά** του ξ τότε δεν έχει έννοια το $\lim_{x\to\xi^-} f(x)$.

Όμοια αν η f δεν ορίζεται **δεξιά** του ξ τότε δεν έχει έννοια το $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$.

4. Αν τα πλευρικά όρια στο ξ σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους δεν υπάρχει το όριο της f στο ξ. Δηλ. $\nexists \lim_{x\to\xi} f(x)$ όταν $\lim_{x\to\xi^+} f(x) \neq \lim_{x\to\xi^-} f(x)$.

5. Όμοια δεν υπάρχει όριο στο ξ σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ όταν κάποιο από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει.

6. Τα πλευρικά όρια τα χρησιμοποιούμε σε συναρτήσεις που στον τύπο τους υπάρχουν απόλυτα, max ή min, σε συναρτήσεις με πολλαπλό τύπο, ή όταν η συνάρτηση δεν ορίζεται στη θέση αυτή.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Δείξετε ότι:** i) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-5x+6}{|x-3|} = 1$, ii) $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|(x+1)}{x} = -1$

iii) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Λύση: i) Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{3\} = (-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ και επειδή η f ορίζεται σε διάστημα $(3,+\infty)$ το 3 είναι σημείο συσσωρεύσεως και επομένως το ζητούμενο όριο έχει έννοια.

Έχουμε $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $\forall\, x\in(3,+\infty)$ με $3 < x < 3+\delta \rightarrow$
$\rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$. Αλλά είναι $|f(x)-1| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{x^2-5x+6}{x-3}-1\right| < \varepsilon \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \left|\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}-1\right| < \varepsilon \leftrightarrow |x-2-1| < \varepsilon$ (γιατί $x-3 > 0$) $\leftrightarrow |x-3| < \varepsilon \leftrightarrow$
$\leftrightarrow 0 < x-3 < \varepsilon$. Αν επομένως επιλέξουμε $\delta = \varepsilon$ τότε θα έχουμε ότι
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $0 < x-3 < \delta \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$. Που σημαίνει ότι $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$.

ii) Εάν $f(x) = \frac{|x|(x+1)}{x}$ τότε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και το 0 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$. Επειδή δε η f ορίζεται σε μια περιοχή της μορφής $(-\infty,0)$ έχει έννοια το $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

Η f γράφεται με $x<0$: $f(x) = -x-1$. Επομένως αν $\varepsilon>0$ θα πρέπει να προσδιορίσουμε $\delta = \delta(\varepsilon)>0$ έτσι ώστε: $\forall\, x\in\mathcal{D}(f)$ με $0<|x-0|<\delta \Rightarrow |f(x)+1|<\varepsilon$
Αλλά είναι $|f(x)+1|<\varepsilon \Leftrightarrow |-x-1+1|<\varepsilon \Leftrightarrow |-x|<\varepsilon \Leftrightarrow |x|<\varepsilon$ και αν διαλέξουμε $\delta = \varepsilon$ θα έχουμε ότι $\forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$: $\forall\, x\in(-\infty,0)$ με $|x|<\delta \Rightarrow |f(x)+1|<\varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

iii) Εάν $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ τότε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{1\} = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ επομένως το 1 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Επειδή όμως στο 1 η f δεν ορίζεται θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 1. Η f γράφεται $f(x) = x+1$.

α) Έστω $\varepsilon>0$ τότε $\exists\,\delta>0$: $\forall\, x\in(1,+\infty)$ με $1<x<1+\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$ γιατί είναι $|f(x)-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+1-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\varepsilon$ και με $\delta = \varepsilon$ ισχύει: $\forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta = \varepsilon>0$: $\forall\, x\in(1,+\infty)$ με $1<x<1+\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$.

β) Έστω $\varepsilon>0$ τότε θα προσδιορίσουμε $\delta = \delta(\varepsilon)>0$: $\forall\, x\in(-\infty,1)$ με $0<1-\delta<x<1$ να ισχύει $|f(x)-2|<\varepsilon$.
Αλλά $|f(x)-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+1-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\varepsilon$. Οπότε με $\delta = \varepsilon>0$ ισχύει $1-\delta<x<1 = \varepsilon$ και $|f(x)-2|<\varepsilon$ που σημαίνει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$.

Από τις (α) και (β) έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ γιατί τα πλευρικά όρια στο 1 είναι ίσα.

2. Να βρεθεί το $\lim\limits_{0} f(x)$ αν $f(x) = \dfrac{2x^2+|x|}{x}$ (εφ' όσον υπάρχει).

Λύση: Έχουμε προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$, και το 0 σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ με $0\notin\mathcal{D}(f)$. Παρατηρούμε ότι είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x>0 \\ 2x-1 & \text{αν } x<0 \end{cases}$$

και ότι για τιμές του x "γειτονικές" του 0, το f(x) είναι "γειτονικό" του 1, αντίστοιχα του -1. Θα εξετάσουμε το: $|f(x)-1|$. Και έστω πρώτα ότι το $x>0$ και ότι ο x τείνει προς το 0 από τα δεξιά του μηδενός, δηλαδή $x\to 0^+$.

Επειδή $\forall\, \varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε $\forall\, x\in\mathcal{D}(f)$ με $0<|x-0|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-1|<\varepsilon$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

Πράγματι: $|f(x)-1| = |2x+1-1| = 2|x| = 2x$ και αν $2x<\varepsilon \Leftrightarrow x<\dfrac{\varepsilon}{2}$, αν πάρουμε σαν $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall\, \varepsilon>0$, τότε με $0<x<\dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$, θα έχουμε: $2x<\varepsilon$, δηλαδή $|f(x)-1|<\varepsilon$.

Έστω τώρα ότι $x<0$ και $x \to 0^-$. Τότε όπως και παραπάνω βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Άρα $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Δείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ οπότε το μηδέν είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$. Ακόμη η f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \in (0,+\infty) \\ x-1 & \text{αν } x \in (-\infty,0) \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Επομένως θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο 0.

α) Ο τύπος $f(x) = x+1$ με $x = 0$ δίνει $f(0) = 1$ δηλ. το $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in (0,+\infty)$ με $0 < |x| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$. Αλλά: $|f(x)-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$ και αν θέσουμε $\delta = \varepsilon$ ισχύουν η $|x| < \delta = \varepsilon$ και $|f(x)-1| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

β) Αν στον τύπο $f(x) = x-1$ θέσουμε $x = 0$ παίρνουμε $f(0) = -1$ δηλ. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in (-\infty,0)$ με $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$. Αλλά $|f(x)+1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1+1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$ και αν διαλέξουμε $\delta = \varepsilon > 0$ ισχύουν η $|x| < \delta = \varepsilon$ και $|f(x)+1| < \varepsilon$ που σημαίνει $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Επειδή δε $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x-4}$. **Δείξετε ότι η f δεν έχει όριο στη θέση** $x = 4$.

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{4\} = (-\infty,4) \cup (4,+\infty)$, άρα το 4 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το $\lim_{x\to 4} f(x)$ έχει νόημα. Επειδή όμως στο 4 η f δεν ορίζεται θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 4. Είναι: α) Με $x \to 4^+$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$.

Πράγματι: $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $\forall\, x \in (4,+\infty) \wedge 4 < x < 4+\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

Δηλαδή: $f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x-4} > \varepsilon \Leftrightarrow x-4 < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < 4 + \frac{1}{\varepsilon}$ και επειδή $4 < x < 4+\delta$. Θέλουμε: $4 < x < 4 + \frac{1}{\varepsilon}$. Αν δε διαλέξουμε $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ θα έχουμε:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} > 0$: $\forall x \in (4,+\infty) \wedge 4 < x < 4+\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ που σημαίνει $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$.

β) Με $x \to 4^-$ είναι $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$.

Πράγματι: $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $\forall\ x \in (-\infty, 4)$ και $4-\delta < x < 4$ ισχύει $f(x) < -\varepsilon$. Αλλά $f(x) < -\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x-4} < -\varepsilon \Leftrightarrow x-4 > -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > 4-\frac{1}{\varepsilon}$ και επειδή $x < 4$ θα είναι $4-\frac{1}{\varepsilon} < x < 4$. Αν διαλέξουμε τώρα τον $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ θα είναι $\forall\ \varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} > 0$: $\forall\ x \in (-\infty, 4)$ και $4-\delta < x < 4 \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$.

Αφού τα πλευρικά όρια στο 4 είναι διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f(x) = \max(x+3, 2x)$, 2. $g(x) = \min(x^2-2, x)$, 3. $h(x) = |2x-1| + |x-2|$

Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{2} g(x)$, $\lim\limits_{-1} g(x)$, $\lim\limits_{0} h(x)$, $\lim\limits_{3} h(x)$.

Λύση: 1. Ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{x+3+2x+|2x-x-3|}{2} = \frac{3x+3+|x-3|}{2}$

οπότε με $x > 3$ είναι $f(x) = 2x$ και $x < 3 \Rightarrow f(x) = x+3$.

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [3, +\infty) \\ x+3, & x \in (-\infty, 3) \end{cases}$$

Είναι επομένως το 3 σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και επειδή στη θέση $x = 3$ η f αλλάζει τύπο θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο 3.

i) Είναι για $x \in [3, +\infty)$ $\lim\limits_{3^+} f(x) = 6$.

Πράγματι: $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε $\forall\ x \in [3, +\infty)$ με $3 < x < 3+\delta$ ισχύει: $|f(x)-6| < \varepsilon$.

Αλλά $|f(x)-6| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \varepsilon/2$ και αν διαλέξουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ θα είναι $0 < x-3 < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ και $|f(x)-6| < \frac{\varepsilon}{2}$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 6$.

ii) Αν $x \in (-\infty, 3)$ είναι $\lim f(x) = 6$.

Πράγματι: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\ x \in (-\infty, 3)$ με $3-\delta < x < 3$ ισχύει $|f(x)-6| < \varepsilon$.

Αλλά $|f(x)-6| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$ και με $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ ισχύουν $3-\delta < x < 3$ και $|2x-6| < \frac{3}{2}$ που σημαίνει $\lim\limits_{3^-} f(x) = 6$.

'Αρα υπάρχει το $\lim\limits_{3} f(x) = 6$ γιατί τα πλευρικά όρια στο 3 είναι ίσα.

2. Η g έχει τύπο $g(x) = \dfrac{x^2-2+x-|x^2-2-x|}{2} = \dfrac{x^2+x-2-|x^2-x-2|}{2}$ και με $x \geq 2$ ή $x \leq -1$ είναι $x^2-x-2 \geq 0$ οπότε $g(x) = x$, και με $-1 < x < 2$ είναι $x^2-x-2 < 0$ οπότε $g(x) = x^2-2$. 'Αρα η g έχει πολλαπλό τύπο τον

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty) \\ x^2-2, & x \in (-1,2) \end{cases}$$

Επομένως για τα όρια στο 2 και -1 θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στα σημεία αυτά.

Είναι με $x > 2$: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in [2,+\infty)$ με $2 < x < 2+\delta$ ισχύει $|g(x)-2| < \varepsilon \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 2$.

Πράγματι με $0 < x-2 < \delta \longleftrightarrow |g(x)-2| < \varepsilon \longleftrightarrow |x-2| < \varepsilon$ και με $\delta = \varepsilon = \delta(\varepsilon) > 0$ ισχύουν συγχρόνως επομένως $\lim\limits_{2^+} g(x) = 2$.

Για $x < 2$ έχουμε $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in (-1,2)$ με $2-\delta < x < 2 \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow |g(x)-2| < \varepsilon \longleftrightarrow \lim\limits_{2^-} g(x) = 2$.

Πράγματι όταν $-\delta < x-2 < 0 \rightarrow |x^2-2-2| < \varepsilon \longleftrightarrow |x^2-4| < \varepsilon \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow |x-2||x+2| < \varepsilon$ (1). Από την σχέση $-\delta < x-2 < 0$ με $\delta = 1$ παίρνουμε:
$-1 < x-2 < 0 \rightarrow 3 < x+2 < 4 \rightarrow 3 < |x+2| < 4$.
Οπότε $|x-2||x+2| < 4|x-2|$ (2).
Από την (1) και (2) αρκεί $4|x-2| < \varepsilon \longleftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$. Επομένως αν

$\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{4})$ θα είναι $2-\delta < x < 2$ και $|g(x)-2| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι

$\lim\limits_{2^-} g(x) = 2$. 'Αρα υπάρχει το $\lim\limits_{2} g(x) = 2$.

'Ομοια εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{-1} g(x)$ και είναι $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -1$

3. Η h έχει τον πολλαπλό τύπο $h(x) = \begin{cases} 3x-3, & x \in [2,+\infty) \\ x+1, & x \in [\frac{1}{2}, 2) \\ -3x+3, & x \in (-\infty, \frac{1}{2}] \end{cases}$

Τα δε σημεία $2, \frac{1}{2}$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(h)$ και επομένως έχουν έννοια τα ζητούμενα όρια. Επειδή δε στις θέσεις αυτές η h αλλάζει τύπο θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στα σημεία αυτά.

Είναι με $x \to 2^+ \rightarrow \lim\limits_{2^+} h(x) = 3$.

Πράγματι: 'Εστω $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in [2,+\infty)$ με

$2 < x < 2+\delta \Rightarrow |h(x)-3| < \varepsilon$. Αλλά $|h(x)-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x-3-3| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ που αν διαλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ θα είναι $0 < x-2 < \delta$ και θα ισχύει

$|h(x)-3| < \varepsilon$ που σημαίνει $\lim_{2^+} h(x) = 3$.

Όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι $\lim_{2^-} h(x) = 3$. Επομένως υπάρχει το $\lim_{2} h(x) = 3$.

Για $x \to \frac{1}{2}^+$ είναι $\lim_{\frac{1}{2}^+} h(x) = \frac{3}{2}$

Πράγματι με $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$: $\forall\, x \in [\frac{1}{2}, 2)$ με $\frac{1}{2} < x < \delta + \frac{1}{2}$ ισχύει

$|h(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon$. Έχουμε $|h(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1-\frac{3}{2}| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{2x+2-3}{2}| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |\frac{2x-1}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ που αν διαλέξουμε $\delta = \varepsilon$ θα έχουμε:

$0 < x - \frac{1}{2} < \delta$ και $|h(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon$ που σημαίνει $\lim_{\frac{1}{2}^+} h(x) = \frac{3}{2}$

Όμοια βρίσκουμε ότι $\lim_{\frac{1}{2}^-} h(x) = \frac{3}{2}$. Επομένως υπάρχει το $\lim_{\frac{1}{2}} h(x) = \frac{3}{2}$.

6. Δείξετε ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ αν $f(x) = x\,ημ\frac{1}{x}$.

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ άρα το 0 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια.

Επειδή η f στο 0 δεν ορίζεται θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα πλευρικά όρια στο 0.

α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο θα προσδιορίσουμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in (0, +\infty)$ με $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon$. Αλλά $|f(x)-0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x\,ημ\frac{1}{x}| < \varepsilon$ (1)

Το πρώτο μέλος της (1) γίνεται: $|x\,ημ\frac{1}{x}| \leq |x|\ |x\,ημ\frac{1}{x}| \leq x$ (2)

Επομένως αν πάρουμε $|x| < \varepsilon$ θα είναι $|f(x)-0| < \varepsilon$. Ακόμη αν διαλέξουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ θα ισχύει $|x| < \delta = \varepsilon$ και $|f(x)-0| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim_{0} f(x) = 0$.

Επαλήθευση. Με $|x| < \varepsilon \Rightarrow |x| < \varepsilon$ και $|ημ\frac{1}{x}| \leq 1 \Leftrightarrow |x|\,|ημ\frac{1}{x}| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x\,ημ\frac{1}{x}| < \varepsilon \Leftrightarrow |x\,ημ\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Όμοια εργαζόμενοι στο διάστημα $(-\infty, 0)$ βρίσκουμε ότι $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

Επομένως $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

4.8. Μη πεπερασμένο όριο στο ξ.

Ορισμός 1. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει στο σημείο ξ που είναι σ.σ

του $\mathcal{D}(f)$ όριο το $+\infty$, τότε και μόνο τότε όταν $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $0 < |x-\xi| < \delta \rightarrow f(x) > \varepsilon$.

Συμβολικά:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ x\in\mathcal{D}(f) \text{ μέ } 0 < |x-\xi| < \delta \rightarrow f(x) > \varepsilon$$

Ορισμός 2. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει στο σημείο ξ που είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ όριο το $(-\infty)$, τότε και μόνο τότε όταν $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $0 < |x-\xi| < \delta \rightarrow f(x) < -\varepsilon$. Συμβολικά:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty \longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\ x\in\mathcal{D}(f) \text{ με } 0 < |x-\xi| < \delta \rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

Παρατηρήσεις:

1. $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \longleftrightarrow \lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\infty$
2. Αν g είναι περιορισμός της f στην τομή $\mathcal{D}(f)-\{\xi\}$ με διάστημα κέντρου ξ τότε: $\lim_{x\to\xi} f = +\infty \longleftrightarrow \lim_{x\to\xi} g = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} f = -\infty \longleftrightarrow \lim_{x\to\xi} g = -\infty$

4.9. Κριτήρια σύγκλισης μιας συνάρτησης προς το 0.

Πρόταση 1. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0 \longleftrightarrow \lim_{\xi}(-f(x)) = 0 \longleftrightarrow \lim_{\xi} |f(x)| = 0$

Πρόταση 2. Αν $\lim_{\xi} f(x) = \lambda \longleftrightarrow \lim_{\xi}(f(x)-\lambda) = 0$

Πρόταση 3. Αν η f έχει στο ξ σ.σ του $\Sigma \subseteq \mathcal{D}(f)$ όριο το μηδέν και η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του $\xi \in \Sigma$ τότε ισχύει: $\lim_{\xi}(f.g)(x) = 0$

Πρόταση 4. Εάν σε μια περιοχή του ξ ισχύει $\lim_{\xi} f(x) = 0$ και $|g(x)| \leq |f(x)|\ \forall\ x \in \Sigma \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ τότε $\lim_{\xi} g(x) = 0$.

4.10. Κριτήριο μη σύκλισης συνάρτησης σε πεπερασμένο όριο.

Πρόταση 1. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f)$ και ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ έχει οριακή τιμή για $x \to \xi \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν, $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ με $0 < |x_1-\xi| < \delta$ και με $0 < |x_2-\xi| < \delta$ να ισχύει: $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$.

Πρόταση 2. Μια συνάρτηση f δεν έχει όριο στο ξ σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ τον πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ή έχει όριο το $(+\infty)$ ή $(-\infty)$ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε σε κάθε περιοχή του ξ να υπάρχουν αριθμοί $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ τέτοιοι ώστε: $|f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon$.

4.11. Φραγμένη συνάρτηση συνέπεια της σύγκλισης Πρόσημο συνάρτησης και πρόσημο του ορίου.

Πρόταση 1. Εάν $\lim_{\xi} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει περιοχή του $\xi \in \mathbb{R}$ η $\pi(\xi,\delta)-\{\xi\}$ έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στην περιοχή του ξ. Αν δε $\lim_{\xi} f(x) =$ $= \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ τότε αν $\lim_{\xi} f(x) = \lambda > 0 \rightarrow f(x) > 0$ και αν $\lambda < 0 \rightarrow$ $\rightarrow f(x) < 0 \;\forall\; x \in \pi(\xi,\delta)-\{\xi\}$

Σημείωση: Από την πρόταση 1 συμπεραίνουμε ότι αν το όριο στο ξ μιας συνάρτησης είναι $\lambda \neq 0$, τότε όχι μόνο η f αλλά και η 1/f είναι φραγμένη σε μια περιοχή του ξ.

4.12. Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση στα όρια.

Πρόταση 1. Αν $\lim_{\xi} f(x) = \alpha$ και $\lim_{\xi} g(x) = \beta$ όπου ξ σημείο συσσωρεύσεως του $A \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ τότε $\lim_{\xi}[f(x)+g(x)] = \alpha+\beta$.

Πρόταση 2. Εάν $\lim_{\xi} f(x) = \alpha$ και $\lim_{\xi} g(x) = \beta$ τότε ισχύει $\lim_{\xi}[f(x)g(x)] =$ $= \alpha.\beta$.

Πρόταση 3. Αν $\lim_{\xi} f(x) = \lambda \in \widetilde{\mathbb{R}}$ τότε: $\lim_{\xi}|f(x)| = \begin{cases} |\lambda| & \text{αν } \lambda \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{αν } \lambda = +\infty \text{ ή } \lambda = -\infty \end{cases}$

Πρόταση 4. Έστω οι συναρτήσεις f και g ορισμένες στο σύνολο Σ και ξ σ.σ του Σ. Ισχύει δε $\lim_{\xi} f = +\infty$ και η g φραγμένη κάτω με θετικό αριθμό τότε:
i) $\lim_{\xi}[f(x)g(x)] = +\infty$, ii) $[\lim_{\xi} f(x)g(x)] = -\infty$ αν η g είναι φραγμένη άνω με αρνητικό αριθμό.

Πρόταση 5. Εάν η f είναι ορισμένη στο $\Sigma \subseteq \mathcal{D}(f)$ και $\lim_{\xi} f = \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ και $f(x) \neq 0 \;\forall\; x \in \Sigma$ τότε: $\lim_{\xi} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda}$

Πρόταση 6. Εάν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο Σ και $\lim_{\xi} f = \alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{\xi} g = \beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, $g(x) \neq 0 \;\forall\; x \in \Sigma$ τότε υπάρχει το $\lim_{\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} =$ $= \frac{\lim_{\xi} f}{\lim_{\xi} g}$

4.13. Όριο ρίζας μιας συνάρτησης.

Πρόταση 1. Αν η f είναι ορισμένη στο $\Sigma \subseteq \mathcal{D}(f)$ και $\lim_{\xi} f = \lambda \in \widetilde{\mathbb{R}}$ τότε ισχύ-

ει $\lim\limits_{\xi}\sqrt{|f(x)|} = \begin{cases} \sqrt{|\lambda|}, & \text{αν } \lambda\in\mathbb{R} \\ +\infty, & \text{αν } \lambda = +\infty \text{ ή } -\infty. \end{cases}$

Σημείωση: Η πρόταση 1 ισχύει και όταν το ριζικό είναι κ τάξεως με $\kappa\in\mathbb{N}$

δηλαδή ισχύει: $\lim\limits_{\xi}\sqrt[\kappa]{|f(x)|} = \begin{cases} \sqrt[\kappa]{|\lambda|}, & \text{αν } \lambda\in\mathbb{R} \\ +\infty, & \text{αν } \lambda = +\infty \end{cases}$

2. Από την πρόταση 1 συμπεραίνουμε ότι:
$\lim\limits_{\xi}\sqrt[\kappa]{|f(x)|} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{\xi}|f(x)|} = \sqrt[\kappa]{|\lim\limits_{\xi}f(x)|} = \sqrt[\kappa]{|\lambda|}$.

4.14. Όριο και διάταξη

Πρόταση 1. Εάν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο σύνολο Σ και ισχύουν $\lim\limits_{\xi}f = \alpha$, $\lim\limits_{\xi}g = \beta$ και $f(x)\leq g(x)$ $\forall$ $x\in\Sigma$ τότε ισχύει $\lim\limits_{\xi}f\leq\lim\limits_{\xi}g$ δηλ. $\alpha\leq\beta$.

Σημείωση: 1. Αν $\lim\limits_{\xi}f = \alpha$ και $f(x)\leq c$ $\forall$ $x\in\Sigma$ τότε ισχύει $\lim\limits_{\xi}f\leq c \longleftrightarrow \alpha\leq c$

2. Όμοια αν $\lim\limits_{\xi}f = \alpha$ και $f(x)\geq c$ $\forall$ $x\in\Sigma$ ισχύει $\lim\limits_{\xi}f\geq c\longleftrightarrow \alpha\geq c$.

Πρόταση 2. Εάν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο Σ και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ $\forall$ $x\in\Sigma$ τότε:

i) Αν $\lim\limits_{\xi}g(x) = -\infty \rightarrow \lim\limits_{\xi}f(x) = -\infty$

ii) Αν $\lim\limits_{\xi}f(x) = +\infty \rightarrow \lim\limits_{\xi}g(x) = +\infty$

Πρόταση 3. Εάν οι συναρτήσεις f,g,φ είναι ορισμένες στο σύνολο Σ και ξ σ.σ του Σ ισχύει δε $f(x)\leq g(x)\leq \varphi(x)$ $\forall$ $x\in\Sigma$ και $\lim\limits_{\xi}f = \lim\limits_{\xi}\varphi = \lambda\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχει $\lim\limits_{\xi}g = \lambda$.

Πρόταση 4. Αν οι συναρτήσεις f,g,h είναι ορισμένες στο σύνολο Σ και ξ σ.σ του Σ είναι δε $f(x)\leq g(x)\leq\varphi(x)$ $\forall$ $x\in\Sigma$ και $\lim\limits_{\xi}f = \alpha$, $\lim\limits_{\xi}\varphi = \beta$ τότε αν υπάρχει το $\lim\limits_{\xi}g$ ισχύει $\alpha\leq\lim\limits_{\xi}g(x)\leq\beta$.

Πρόταση 5. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$

4.15. Επιτρεπτές πράξεις στο $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Στο σύνολο $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ είναι επιτρεπτές οι παρακάτω πράξεις μεταξύ των συμβόλων $-\infty,+\infty$ και του $\lambda\in\mathbb{R}$.
$\lambda+(+\infty) = +\infty$, $\lambda+(-\infty) = -\infty$, $\lambda(+\infty) = +\infty$ αν $\lambda>0$ και $\lambda(+\infty) = -\infty$ αν $\lambda<0$, $\lambda(-\infty) = -\infty$ αν $\lambda>0$, $\lambda(-\infty) = +\infty$ αν $\lambda<0$.

$+\infty+(+\infty) = +\infty$, $-\infty+(-\infty) = -\infty$, $(-\infty-(+\infty)) = -\infty$
$-(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $+\infty(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(+\infty) = -\infty$,
$(+\infty)(-\infty) = -\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $\frac{\lambda}{\pm\infty} = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.16. Μη επιτρεπτές πράξεις στο $\widetilde{\mathbb{R}}$.

$(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $0(\pm\infty)$, $-\infty-(-\infty)$, $+\infty-(+\infty)$
$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{0}$, $\frac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R}$.

4.17. Απροσδιόριστες μορφές

Αν κατά τον υπολογισμό των ορίων καταλήξουμε σε κάποια από τις μορφές
1) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, 2) $\frac{0}{0}$, 3) $0(\pm\infty)$, 4) $\infty-\infty$, $-\infty+\infty$, 5) 0^0, 6) ∞^0, 7) 1^∞
λέμε ότι η f έχει απροσδιοριστία. Στις περιπτώσεις αυτές μετασχηματίζοντας τον τύπο της f δυνάμεθα να υπολογίσουμε το οριό της. Το όριο λέγεται **αληθής τιμή** της f και η εργασία **άρση της απροσδιοριστίας**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x-2}{x}$. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ οπότε ο μηδέν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ και επομένως το ζητούμενο όριο έχει έννοια.
Έχουμε: $f(x) \to -\infty \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $0 < x < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x} < -\varepsilon \Leftrightarrow x-2 < -x\varepsilon \Leftrightarrow x(1+\varepsilon) < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{1+\varepsilon}$$
και αν επιλέξουμε $\delta \le \frac{2}{1+\varepsilon}$ θα έχουμε ότι $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $0 < x < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x+|x|}{x^2}$. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Λύση: Είναι το 0 σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
Έχουμε $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x+|x|}{x^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2} > \varepsilon \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x}{2} < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < \frac{2}{\varepsilon}.$$
Άρα αν επιλέξουμε $\delta \le \frac{2}{3}$ τότε θα ισχύει $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με $0 < x < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$. Δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στο 2.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{2\} = (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$ οπότε το 2 είναι σ. συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. Πράγματι $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \delta > 0$: $2 < x < 2+\delta \rightarrow f(x) > \varepsilon \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dfrac{x^2+3x+1}{x-2} > \varepsilon \Longleftrightarrow x^2+4x+1 > x\varepsilon-2\varepsilon \Longleftrightarrow x^2+(4-\varepsilon)x+1+2\varepsilon > 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2+2\dfrac{4-\varepsilon}{2}x+\left(\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right)^2-\left(\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right)^2+1+2\varepsilon > 0 \Longleftrightarrow \left(x+\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right)^2 > \left(\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right)^2-1-2\varepsilon$

$\Longleftrightarrow \left|x+\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right| > \sqrt{\left(\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right)^2-1-2\varepsilon} \Longleftrightarrow x > -\dfrac{4-\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right)^2-1-2\varepsilon}$ ή

$x < -\dfrac{4-\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right)^2-1-2\varepsilon}$ και αν επιλέξουμε $\delta+2 = -\dfrac{4-\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{4-\varepsilon}{2}\right)^2-1-2\varepsilon}$

θα έχουμε $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: $0 < |x-2| < \delta \rightarrow f(x) > \varepsilon$ που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και η f δεν έχει όριο στο 2.

4. Να υπολογιστούν τα όρια.

1. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3}{x-5}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{(x-1)^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)(x^2+5x+6)}{(x+1)(x+2)|x|}$ 5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+|x|}{(x-2)(x+3)}$

Λύση: 1. **1ος τρόπος.** Αν θέσουμε όπου x = 5 το ζητούμενο όριο παίρνει τη μορφή $\dfrac{3}{0}$ επομένως θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο 5.

α) Αν $x \to 5^+ \rightarrow x-5 > 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{3}{x-5} = +\infty$

β) Αν $x \to 5^- \rightarrow x-5 < 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{3}{x-5} = -\infty$

Άρα δεν υπάρχει το όριο στο 5.

2ος τρόπος. Θέτουμε $x-5 = t \rightarrow t \to 0$ και το ζητούμενο όριο γίνεται $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3}{t}$ οπότε με t = 0 έχουμε την μορφή $\dfrac{3}{0}$ επομένως πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο μηδέν και είναι: $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{3}{t} = +\infty$ και $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{3}{t} = -\infty$.

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3}{x-5}$.

2. Αν θέσουμε όπου x = 1 έχουμε την μορφή $\dfrac{0}{0}$ επομένως θα παραγοντοποιήσουμε τους όρους.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{1}\dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{1}\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$ (i).

Αν στη (i) θέσουμε όπου $x = 1$ το όριο παίρνει την μορφή $\dfrac{3}{0}$ επομένως πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο 1.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty$ γιατί $x \to 1^+ \Rightarrow x-1>0$ και

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$ γιατί $x \to 1^- \Rightarrow x-1<0$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{(x-1)^2}$

3. Με $x = 3$ έχουμε τη μορφή $\dfrac{\sqrt{3}-3}{0}$ επομένως πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο 3.

Είναι με $x \to 3^+ \Rightarrow \sqrt[3]{x} \to \sqrt[3]{3}^+ \Rightarrow \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}} = -\infty$

και με $x \to 3^- \Rightarrow \sqrt[3]{x} \to \sqrt[3]{3}^- \Rightarrow \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}} = +\infty$

Άρα δεν υπάρχει το όριο στο 3.

4. Με $x = 0$ έχουμε την μορφή $\dfrac{6}{0}$ άρα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο 0.

Είναι: με $x \to 0^+ \Rightarrow x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)(x^2+5x+6)}{(x+1)(x+2)x} = +\infty$

και με $x \to 0^- \Rightarrow x<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x+1)(x^2+5x+6)}{-(x+1)(x+2)x} = -\infty$

Επομένως δεν υπάρχει όριο στο 0.

5. Με $x = 2$ έχουμε $\dfrac{4}{0}$ επομένως θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 2.

Είναι με $x \to 2^+ \Rightarrow x-2>0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+|x|}{(x-2)(x+3)} = +\infty$

και με $x \to 2^- \Rightarrow x-2<0$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+|x|}{(x-2)(x+3)} = -\infty$

Άρα δεν υπάρχει όριο στο 2.

5. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x) = 0$ αν $f(x) = \dfrac{x+\eta\mu x}{x^2+1}$

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια γιατί το $(+\infty)$ είναι σ.συσσωρεύσεως.

Έχουμε: $|f(x)| = \left|\dfrac{x+\eta\mu x}{x^2+1}\right| \le \dfrac{|x|+|\eta\mu x|}{x^2+1} \le \dfrac{|x|+1}{x^2+1} \le \dfrac{|x|+1}{|x|^2} = \dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|x|^2} \to 0$

γιατί $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|^2} = 0$.

Επομένως με βάση γνωστή πρόταση είναι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

6. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ με $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+3x-1}$

Λύση: $\mathcal{D}(f) = \{x\in\mathbb{R}: x^2+3x-1\geq 0\} = (-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$

και το $(+\infty)$ είναι σ.συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$.

Η f γράφεται $f(x) = |\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+3x-1}| =$

$$= \frac{|(\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+3x-1})(\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x^2+3x-1})|}{\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x^2+3x-1}} = \frac{|x^2+3x+4-x^2-3x+1|}{\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x^2+3x-1}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x^2+3x-1}} \leq \frac{5}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \frac{5}{2x} \to 0$$

Άρα με βάση γνωστή πρόταση είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Σημείωση: Επειδή $x\to+\infty$ δεχόμαστε ότι $x\in(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$ και επομένως είναι $3x+4>0$ και $3x-1>0$.

7. Δείξτε ότι: i) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{ημ}\frac{1}{x} = 0$, ii) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\kappa}\,\text{ημ}\frac{1}{x} = 0$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$

Λύση: i) Το 0 είναι σ. συσσωρεύσεως της f με $f(x) = x\,\text{ημ}\frac{1}{x}$.

Έχουμε: $|f(x)| = |x\,\text{ημ}\frac{1}{x}| = |x|\,|\text{ημ}\frac{1}{x}| \leq |x| \to 0$.

Άρα και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

ii) Όμοια είναι $|x^{\kappa}\,\text{ημ}\frac{1}{x}| = |x^{\kappa}|\,|\text{ημ}\frac{1}{x}| \leq |x^{\kappa}| \to 0$

Άρα και $\lim\limits_{x\to 0} x^{\kappa}\,\text{ημ}\frac{1}{x} = 0$.

8. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{ημ}\sqrt{x+1}-\text{ημ}\sqrt{x}) = 0$.

Λύση: Είναι $|\text{ημ}\sqrt{x+1}-\text{ημ}\sqrt{x}| = |2\text{ημ}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\,\text{συν}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}|$

$$\leq 2|\text{ημ}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| = 2|\text{ημ}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}| = 2|\text{ημ}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}| \leq 2|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}|$$

$$\leq 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$$

Άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{ημ}\sqrt{x+1}-\text{ημ}\sqrt{x}) = 0$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{συν}x$. Δείξτε ότι το $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ δεν είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός.

Λύση: Θεωρούμε μια περιοχή του $+\infty$ έστω την $(\alpha, +\infty)$ και τους αριθμούς

$x_1, x_2 \in (\alpha, +\infty)$ με $x_1 = 2\nu\pi + \frac{\pi}{3}$ και $x_2 = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2}$.

Τότε είναι $|f(x_1) - f(x_2)| = |\sigma\upsilon\nu(2\nu\pi + \frac{\pi}{3}) - \sigma\upsilon\nu(2\nu\pi + \frac{\pi}{2})| = |\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$

Δηλαδή υπάρχει θετικός αριθμός ε τέτοιος ώστε σε κάθε διάστημα $(\alpha, +\infty)$ υπάρχουν αριθμοί x_1, x_2 τέτοιοι ώστε $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$ που σημαίνει ότι η f δεν έχει πεπερασμένο όριο στο $+\infty$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$. Δείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Λύση: Θεωρούμε τους αριθμούς $x_1 = \frac{1}{2\nu\pi}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $x_2 = \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}$ τότε είναι: $|f(x_1) - f(x_2)| = |\eta\mu\frac{1}{x_1} - \eta\mu\frac{1}{x_2}| = |\eta\mu 2\nu\pi - \eta\mu(2\nu\pi + \frac{\pi}{2})| = |0 - \eta\mu\frac{\pi}{2}| =$

$= |\eta\mu\frac{\pi}{2}| = 1$. Άρα υπάρχει θετικός αριθμός $\varepsilon \leq 1$ ώστε σε κάθε περιοχή του μηδέν υπάρχουν αριθμοί x_1 και x_2 τέτοιοι ώστε $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$ που σημαίνει ότι η f δεν έχει όριο στο 0.

11. Αν $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2+1} = 0$. Δείξετε ότι η f με $f(x) = \frac{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2+1}$ είναι φραγμένη στην περιοχή του $(+\infty)$.

Λύση: Είναι $|f(x)| = |\frac{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2+1}| \leq \frac{|x\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu^2 x|}{x^2+1} \leq \frac{|x|+1}{x^2+1} \leq \frac{|x|+1}{|x|^2} <$

$< \frac{|x|+|x|}{|x|^2} = \frac{2}{|x|} < \varepsilon$ και $x > 1$ τότε $\forall\ \varepsilon > 0$ και επομένως και με $\varepsilon = 1$ θα έχουμε $|f(x)| < 1 \longleftrightarrow -1 < f(x) < 1\ \forall\ x \in (1, +\infty)$. Άρα η f είναι φραγμένη.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3x^2 + \eta\mu(x-1) + 2}{x^2+3}$.
Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Λύση: Επειδή $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Βάζουμε στον τύπο της f όπου $x = 1$ και έχουμε $f(1) = \frac{5}{4} \in \mathbb{R}$ επομένως το ζητούμενο όριο είναι το $\frac{5}{4}$. Πράγματι αν πάρουμε όρια έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\lim\limits_{1} 3x^2 + \lim\limits_{1} \eta\mu(x-1) + 2}{\lim\limits_{1} x^2 + 3} = \frac{2(\lim\limits_{1} x)^2 + \lim\limits_{1} \eta\mu(x-1) + 2}{(\lim\limits_{1} x)^2 + 3} = \frac{3.1 + \eta\mu 0 + 2}{1+3}$$

$$= \frac{5}{4}.$$

13. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$ iv) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-1}$ v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

Λύση: Αν θέσουμε $x = 2$ έχουμε αοριστία $\frac{0}{0}$ οπότε θα πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τους όρους και έχουμε:

$$\lim_{2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2-1)} = \lim_{2}\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{\lim\limits_{2} x-3}{(\lim\limits_{2} x)^2-1} = -\frac{1}{3}$$

ii) Αν θέσουμε όπου $x = 1$ έχουμε αοριστία $\frac{0}{0}$ οπότε θα πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τους όρους και έχουμε:

$$\lim_{1}\frac{(x-1)(x^2-4x+4)}{x-1} = \lim_{1}(x^2-4x+4) = \lim_{1}x^2-4\lim_{1}x+4 = 1-4+4 = 1$$

iii) Αν θέσουμε $x = -2$ έχουμε αοριστία $\frac{0}{0}$ οπότε θα πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τους όρους και έχουμε:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2} = \lim_{-2}\frac{3(x-\frac{1}{3})(x+2)}{4(x+\frac{1}{4})(x+2)} = \lim_{-2}\frac{3(x-\frac{1}{3})}{4(x+\frac{1}{4})} = \frac{3(-2-\frac{1}{3})}{4(-2+\frac{1}{4})} = 1.$$

iv) Με $x = -2$ έχουμε αοριστία $\frac{0}{0}$ οπότε κάνουμε γινόμενο τους όρους και έχουμε:

$$\lim_{-2}\frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{-2}\frac{1}{x^2-2x+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{16}$$

v) Με $x = 1$ έχουμε αοριστία $\frac{0}{0}$ και επειδή υπάρχουν ριζικά στον τύπο πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ και έχουμε:

$$\lim_{1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{1}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}$$

2ος τρόπος. Θέτουμε $\sqrt[3]{x} = y$ με $y \to 1$ και $x = y^3$ και το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^3-1} \overset{0/0}{=} \lim_{y\to 1}\frac{v-1}{(y-1)(y^2+y+1)} = \lim_{y\to 1}\frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3}$$

vi) Με $x = 0$ έχουμε την αοριστία $\frac{0}{0}$ οπότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2+x}+1$ και έχουμε:

$$\lim_{0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \lim_{0}\frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2-1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{0}\frac{x(x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} =$$

$$= \lim_{0}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

13. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[\nu]{x}-1}{\sqrt[\mu]{x^{\kappa}}-1}$, $\mu,\nu,\kappa\in\mathbb{N}$, $\mu,\nu\geq 2$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\nu}-1}{x^{\mu}-1}$, $\mu,\nu\in\mathbb{N}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+|x|}{|x|(x+2)}$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+x^3}{|x-2|(x+3)}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$

Λύση: 1. Με $x = 1$ έχουμε την αοριστία $\dfrac{0}{0}$ και επειδή υπάρχουν ριζικά το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{1}\frac{(\sqrt[\nu]{x}-1)(\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{x^{\nu-2}}+\ldots+1)(\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-1)}}+\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-2)}}+\ldots+1)}{(\sqrt[\mu]{x^{\kappa}}-1)(\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-1)}}+\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-2)}}+\ldots+1)(\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{x^{\nu-2}}+\ldots+1)}=$$

$$=\lim_{1}\frac{(x-1)(\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-1)}}+\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-2)}}+\ldots+1)}{(x^{\kappa}-1)(\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{x^{\nu-2}}+\ldots+1)}$$

$$=\lim_{1}\frac{(x-1)(\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-1)}}+\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-2)}}+\ldots+1)}{(x-1)(x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+\ldots+1)(\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}+\ldots+1)}=$$

$$=\lim_{1}\frac{(\sqrt[\mu]{x^{\kappa(\mu-1)}}+\sqrt{x^{\kappa(\mu-2)}}+\ldots+1)}{(x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+\ldots+1)(\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}+\ldots+1)}=\frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{\mu}}{(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\kappa})(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\nu})}=\frac{\mu}{\kappa\nu}$$

2. Με $x = 1$ έχουμε την αοριστία $\dfrac{0}{0}$ οπότε παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος και έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\nu}-1}{x^{\mu}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+\ldots+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1}{x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+\ldots+x+1}=$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{\nu}}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\mu}}=\frac{\nu}{\mu}$$

3. Με $x = 0$ έχουμε την αοριστία $\dfrac{0}{0}$ οπότε το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2|x|^2+|x|}{|x|(x+2)}=\lim_{0}\frac{|x|(2|x|+1)}{|x|(x+2)}=\lim_{0}\frac{2|x|+1}{x+2}=\frac{1}{2}$$

4. Με $x = -3$ έχουμε την αοριστία $\dfrac{0}{0}$ επομένως παραγοντοποιούμε τους όρους και έχουμε:

$$\lim_{x\to -3}\frac{3x^2+x^3}{|x-2|(x+3)}=\lim_{-3}\frac{x^2(x+3)}{|x-2|(x+3)}=\lim_{-3}\frac{x^2}{|x-2|}=\frac{9}{5}$$

5. Με $x = 3$ έχουμε αοριστία $\dfrac{0}{0}$ οπότε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{|x-3|}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{|x-3|}$$

Για να υπολογίσουμε το όριο διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $x > 3 \Leftrightarrow x-3 > 0$ που σημαίνει $x \to 3^+$ οπότε $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x-2)}{|x-3|} = \lim\limits_{x\to 3^+}(x-2) = 3-2 = 1$.

ii) $x < 3 \Leftrightarrow x-3 < 0$ που σημαίνει $x \to 3^-$ οπότε $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x-2)}{|x-3|} =$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x-2)}{-(x-3)} = -\lim\limits_{x\to 3^-}(x-2) = -(3-2) = -1$.

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-5x+6}{|x-3|} \neq \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2-5x+6}{|x-3|}$ και επομένως δεν υπάρχει το όριο στην θέση $x = 3$.

6. Με $x = 2$ έχουμε αοριστία $\frac{0}{0}$ επομένως θα παραγοντοποιήσουμε και επειδή υπάρχουν απόλυτα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $x > 2 \Rightarrow x-2 > 0$ που σημαίνει ότι $x \to 2^+$ οπότε: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{|x||x-2|+x-2}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{2^+} \frac{(x-2)(|x|+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{2^+} \frac{|x|+1}{x+2} = \frac{3}{4}$

ii) $x < 2 \Rightarrow x-2 < 0$ που σημαίνει $x \to 2^-$ οπότε: $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|x||x-2|+(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{2^-} \frac{(x-2)(-|x|+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{2^-} \frac{-|x|+1}{x+2} = \frac{-1}{4}$

Επειδή δε $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4} \neq \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$ δεν υπάρχει όριο στη θέση $x = 2$.

14. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$.

Λύση: Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ και ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ τότε είναι

$\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi} \alpha_\nu x^\nu + \lim\limits_{x\to\xi} \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \lim\limits_{x\to\xi} \alpha_1 x + \lim\limits_{x\to\xi} \alpha_0 =$

$= \alpha_\nu \lim\limits_{x\to\xi} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim\limits_{x\to\xi} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \lim\limits_{x\to\xi} x + \alpha_0 = \alpha_\nu \xi^\nu + \alpha_{\nu-1}\xi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\xi + \alpha_0$.

Άρα το όριο πολυωνυμικής συνάρτησης στο $\xi \in \mathbb{R}$ ισούται με την τιμή της συνάρτησης όταν $x = \xi$.

15. Είναι $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{\pm\infty}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim\limits_{\pm\infty} \alpha_\nu x^\nu$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, \nu$, $\alpha_\nu \neq 0$.

Λύση: Επειδή $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ τα σημεία $(-\infty)$, $(+\infty)$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και έχει έννοια το $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)$.

Είναι: $f(x) = \alpha_\nu x^\nu \left[1 + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{x^\nu}\right] \Rightarrow \lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{\pm\infty} \alpha_\nu x^\nu$

γιατί $\lim\limits_{\pm\infty}\left[1+\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_0}{a_\nu}\frac{1}{x^\nu}\right] = 1+\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}\lim\limits_{\pm\infty}\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_0}{a_\nu}\lim\limits_{\pm\infty}\frac{1}{x^\nu} =$

$= 1+\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}0+\ldots+\frac{a_0}{a_\nu}0 = 1$. Επειδή $\lim\limits_{\pm\infty}\frac{1}{x^\kappa} = 0$.

Δηλαδή το όριο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης στο (+∞) ή (-∞) ισούται με το όριο στο (+∞) ή (-∞) του μεγιστοβάθμιου όρου της.

16. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{+\infty}f(x)$, με $f(x) = \frac{3x^2-5x+6}{x^2+x+1}$ 4. $\lim\limits_{-\infty}\varphi(x)$ με $\varphi(x) = \frac{x^2-6x}{x^2+1}$

2. $\lim\limits_{+\infty}g(x)$ με $g(x) = \frac{3x^2+2x-6}{x+2}$ 5. $\lim\limits_{-\infty}\sigma(x)$ με $\sigma(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

3. $\lim\limits_{+\infty}h(x)$ με $h(x) = \frac{x+8}{x^2-6x+2}$ 6. $\lim\limits_{-\infty}t(x)$ με $t(x) = \frac{(3x+1)^2(x-1)^3}{x^5+1}$

Λύση: 1. Η συνάρτηση f(x) έχει $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ επομένως έχει νόημα το $\lim\limits_{\infty}f$. Αν στην f θέσουμε όπου x το +∞ προκύπτει η αοριστία $\frac{\infty}{\infty}$ οπότε εργαζόμαστε ως εξής για τον υπολογισμό του ορίου.

1ος τρόπος. Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x^2 από τους όρους και έχουμε:

$$\lim_{+\infty}f(x) = \lim_{+\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{+\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{3-5\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x}+6\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x^2}}{1+\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{3-0+0}{1+0+0} = 3.$$

2ος τρόπος. Επειδή έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{-\infty}$ διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή με x^2 και έχουμε:

$$\lim_{+\infty}f(x) = \lim_{+\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{3-\lim\limits_{+\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{+\infty}\frac{6}{x^2}}{1+\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x^2}} = 3.$$

2. Πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}-\{-2\} = (-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$ επομένως το (+∞) είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και το $\lim\limits_{+\infty}h(x)$ έχει νόημα. Αν θέσουμε στον τύπο της h όπου x το (+∞) η h παίρνει τη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Άρα για να βρούμε το όριο εργαζόμαστε με τους παραπάνω δύο τρόπους.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{+\infty}h(x) = \lim_{+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{+\infty}x.\lim_{+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = (+\infty).3 = +\infty.$$

3. Πεδίο ορισμού της g είναι $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}-\{3-\sqrt{7},3+\sqrt{7}\}$ επομένως το (+∞) εί-

ναι σ.σ και το $\lim\limits_{+\infty} g$ έχει νόημα. Επειδή αν στον τύπο της g θέσουμε όπου x το (+∞) η g(x) παίρνει την μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ έχουμε:

$$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty}\frac{x(1+\frac{8}{x})}{x^2(1-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2})} = \lim_{+\infty}\frac{1}{x}\lim_{+\infty}\frac{1+\frac{8}{x}}{1-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}} = 0(+1) = 0$$

4. Είναι $\mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ επομένως το (-∞) είναι σ.σ και άρα έχει έννοια το $\lim\limits_{-\infty}\varphi$. Επειδή η φ με x = -∞ παίρνει τη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ έχουμε:

$$\lim_{-\infty}\varphi(x) = \lim\frac{x^2(1-\frac{6}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{-\infty}\frac{1-\frac{6}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

5. Η σ(x) έχει $\mathcal{D}(\sigma) = \mathbb{R}-\{-1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ οπότε το (-∞) είναι σ.σ του $\mathcal{D}(\sigma)$ και το $\lim\limits_{-\infty}\sigma$ έχει νόημα. Ακόμη με x = -∞ η σ(x) παίρνει τη μορφή $\frac{+\infty}{-\infty}$ οπότε:

$$\lim_{-\infty}\sigma(x) = \lim_{-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} = -\lim_{-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -1$$

6. Είναι $\mathcal{D}(t) = \mathbb{R}-\{-1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και (-∞) είναι σ.σ του $\mathcal{D}(t)$ και το lim t(x) έχει έννοια. Επίσης αν στον τύπο της t θέσουμε όπου x = -∞ παίρνουμε την αοριστία $\frac{-\infty}{-\infty}$ οπότε έχουμε:

$$\lim_{-\infty} t(x) = \lim_{-\infty}\frac{x^2(3+\frac{1}{x})^2x^3(1-\frac{1}{x})^3}{x^5(1+\frac{1}{x^5})} = \frac{\lim\limits_{-\infty}(3+\frac{1}{x})^2\lim\limits_{-\infty}(1-\frac{1}{x})^3}{\lim\limits_{-\infty}(1+\frac{1}{x^5})} = \frac{3.1}{1} = 3$$

Βασική σημείωση: Αν μια συνάρτηση είναι ρητή τότε η οριακή τιμή της στο (±∞) ισούται

i) με τον λόγο των συντελεστών των μεγιστοβαθμίων όρων όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή.

ii) ισούται με το 0 αν ο βαθμό του παρανομαστή είναι μεγαλύτερος του αριθμητή

iii) ισούται με το ±∞ αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος του παρανομαστή, και είναι το (+∞) αν οι μεγιστοβάθμιοι συντελεστές είναι ομόσημοι, είναι δε το (-∞) αν οι μεγιστοβάθμιοι συντελεστές είναι ετερόσημοι.

17. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ με $f(x) = \frac{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}-5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{4x-1}+\sqrt[3]{2x-3}}$ 2. $\lim\limits_{+\infty} h(x)$ με $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}$

3. $\lim\limits_{+\infty} g(x)$ με $g(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3-1}+\sqrt{x-1}}$ 4. $\lim\limits_{+\infty} \sigma(x)$ με $\sigma(x) = \frac{\sqrt{4x^3-3x}+1}{x\sqrt{x}+2}$

Λύση: 1. Εύκολα βρίσκουμε ότι η f ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ οπότε το $(+\infty)$ είναι σ.σ και το $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ έχει νόημα. Η f με $x = +\infty$ παίρνει τη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ επομένως για να βρούμε το όριο διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με το $\sqrt{x}$ γιατί ο μεγαλύτερος βαθμός ως προς x των όρων είναι $\frac{1}{2}$.

Έχουμε: $$f(x) = \frac{1+4\frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[6]{x^3}}-5\frac{\sqrt[10]{x^2}}{\sqrt[10]{x^5}}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\frac{\sqrt[6]{(2x-3)^2}}{\sqrt[6]{x^3}}} = \frac{1+4\sqrt[6]{\frac{1}{x}}-5\sqrt[10]{\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}}$$

και επειδή $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{+\infty}\frac{4}{x} = 0$, κ.λ.π έχουμε

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty}\frac{1+4\sqrt[6]{\frac{1}{x}}-5\sqrt[10]{\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}} = \frac{1+4.0-5.0}{\sqrt{4}-0+0} = \frac{1}{2}$$

2. Είναι το $(+\infty)$ σ.σ του $\mathcal{D}(h)$ και επομένως έχει έννοια το $\lim\limits_{+\infty} h(x)$. Εύκολα βλέπουμε ότι με $x = +\infty$ έχουμε την αοριστία $\frac{\infty}{\infty}$. Επομένως διαιρούμε και τους δύο όρους με $\sqrt{x}$ οπότε έχουμε:

$$\lim_{+\infty} h(x) = \lim_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}} = \frac{1}{1+0+0} = 1$$

3. Η $g(x)$ έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(g) = [1,+\infty)$ και επομένως είναι το $+\infty$ σ.σ του $\mathcal{D}(g)$ και το ζητούμενο $\lim\limits_{+\infty} g(x)$ έχει έννοια. Εύκολα βλέπουμε ότι με $x = \infty$ έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ επομένως διαιρούμε τους όρους με $\sqrt[4]{x^3}$ και έχουμε:

$$g(x) = \frac{\frac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{\sqrt[12]{x^8}}{\sqrt[12]{x^9}}+1}{\sqrt[4]{\frac{x^3-1}{x^3}}+\sqrt[4]{\frac{(x-1)^2}{x^4}}} = \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{x}}+\sqrt[12]{\frac{1}{x}}+1}{\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^3}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}$$

και αν πάρουμε τα όρια στο $(+\infty)$ των μελών έχουμε: $\lim\limits_{+\infty} g(x) = \frac{1}{1} = 1$.

4. Η $\sigma(x)$ έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(\sigma) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ επομένως είναι το $+\infty$ σ.σ και το ζητούμενο $\lim\limits_{+\infty}\sigma(x)$ έχει νόημα. Αν θέσουμε όπου $x = +\infty$ έχουμε την αοριστία $\frac{\infty}{\infty}$ οπότε διαιρούμε και τους δύο όρους με $\sqrt{x^3}$ και έχουμε:

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{4-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x^3}}} = \frac{\sqrt{4-\frac{3}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}}+\sqrt{\frac{4}{x^3}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2}{1} = 2$$

Επομένως $\lim\limits_{+\infty}\sigma(x) = 2$

18. Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ $\quad|\mathbb{R}-\{1\}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[7]{(x+1)^3}-1}{x}$ $\quad|\mathbb{R}-\{0\}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$ $\quad|[-1,+\infty)$

Λύση: 1. 1ος τρόπος. Το $(-\infty)$ είναι σ.σ του $\mathbb{R}-\{1\}$, επομένως έχει νόημα το ζητούμενο όριο και επειδή με $x = -\infty$ έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με x^2. Έχουμε:

$$\lim_{-\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^6}}-2\sqrt[3]{\frac{x}{x^6}}+\frac{1}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2} = \lim_{-\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}-2\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}+\frac{1}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2} = \frac{0}{1} = 0$$

2ος τρόπος: Θέτουμε $\sqrt[3]{x} = y \Rightarrow y \to -\infty$ και $\sqrt[3]{x^2} = y^2$, $x = y^3$ και το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{y^2-2y+1}{(y^3-1)^2} = \lim_{y\to-\infty} \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2(y^2+y+1)^2} = \lim_{-\infty} \frac{1}{(y^2+y+1)^2} = 0$$

2. 1ος τρόπος: Το $(-\infty)$ είναι σ.σ του $\mathbb{R}-\{0\}$ επομένως το ζητούμενο όριο έχει νόημα και επειδή έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{-\infty}{-\infty}$ διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με x. Είναι:

$$\lim_{-\infty} \frac{\sqrt[7]{(x+1)^3}-1}{x} = \lim_{-\infty} \frac{\sqrt[7]{(1+\frac{1}{x})^3\frac{1}{x^4}}-\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

2ος τρόπος: Θέτουμε $(x+1) = y^7 \Rightarrow y \to -\infty$ όταν το $x \to -\infty$ και βρίσκουμε $x = y^7-1$. Οπότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3-1}{y^7-1} = \lim_{-\infty}\frac{\frac{1}{y^4}-\frac{1}{y^7}}{1-\frac{1}{y^7}} = \frac{0}{1} = 0$$

3. 1ος τρόπος: Είναι το $(+\infty)$ σ.σ του $[-1,+\infty)$ επομένως έχει έννοια το ζητούμενο όριο και επειδή $x\to+\infty$ έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$ διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με $\sqrt{x}$. Οπότε έχουμε:

$$\lim_{+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} = \lim_{+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{2}{1} = 2$$

2ος τρόπος: Θέτουμε $\sqrt{x+1} = y$ όπου $y\to+\infty$ όταν το $x\to+\infty$ και το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+2}} = \lim_{\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}{\sqrt{1+\frac{2}{y^2}}} = 2$$

19. Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)$ με $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ **2.** $\lim\limits_{\pm\infty}\varphi(x)$ με $\varphi(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x^2+3x+2)|x|}$

3. $\lim\limits_{\pm\infty} h(x)$ με $h(x) = \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+3}$ **4.** $\lim\limits_{\pm\infty} t(x)$ με $t(x) = \frac{x^2}{1-x^2}+3^{\frac{1}{x}}$

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{1\}$ επομένως το $(\pm\infty)$ είναι σημείο συσσωρεύσεως και το $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)$ έχει νόημα. Επειδή στον τύπο της f υπάρχουν απόλυτα η f γράφεται με πολλαπλό τύπο που είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{με } x > 1 \\ \frac{x^2-1}{-x+1} & \text{με } x < 1 \end{cases}$$

Οπότε: $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{+\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{+\infty} x.\lim\limits_{+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = (+\infty)$

και $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty}\frac{x^2-1}{-(x-1)} = \lim\limits_{-\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{-x(1-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{-\infty}(-x)\lim\limits_{-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} =$ $-(+\infty)1 = +\infty$.

2. Η φ έχει $\mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{R}-\{0,-1,-2\} = (-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$ επομένως είναι τα $(\pm\infty)$ σημεία συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(\varphi)$ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Επειδή ο τύπος της φ έχει απόλυτα μπορεί να γραφεί με

πολλαπλή μορφή.

Είναι $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x}, & x > 0 \\ -\frac{x+3}{x}, & x < 0 \end{cases}$

Οπότε $\lim\limits_{+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{+\infty}\frac{x+3}{x} = \lim\limits_{+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1} = 1$ και $\lim\limits_{-\infty}\varphi(x) = -\lim\limits_{-\infty}\frac{x+3}{x} =$

$= \lim\limits_{-\infty}\frac{-1-\frac{3}{x}}{1} = -1.$

3. Το $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}-\{-\frac{3}{4}\} = (-\infty,-\frac{3}{4}) \cup (-\frac{3}{4},+\infty)$ οπότε τα $(\pm\infty)$ είναι σημεία συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(h)$ και το ζητούμενο όριο έχει νόημα.

Είναι: $\lim\limits_{+\infty}h(x) = \lim\limits_{+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+3} = \lim\limits_{+\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}{4+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

και $\lim\limits_{-\infty}h(x) = \lim\limits_{-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+3} = \lim\limits_{-\infty}\frac{|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}{x(4+\frac{3}{x})} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

γιατί $|x| = -x$ επειδή εργαζόμαστε σε μια περιοχή του $(-\infty)$ και δεχόμαστε χωρίς βλάβη της γενικότητας $x < 0$.

4. Η t έχει $\mathcal{D}(t) = \mathbb{R}-\{1,-1,0\} = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$ οπότε τα $(\pm\infty)$ είναι σημεία συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(t)$ και το ζητούμενο όριο έχει νόημα.

Έχουμε: $\lim\limits_{+\infty}t(x) = \lim\limits_{+\infty}\left(\frac{x^2}{1-x^2}+3^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{+\infty}\frac{x^2}{1-x^2}+\lim\limits_{+\infty}3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}+3^{\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x}} =$

$= -1+3^0 = 0$ και $\lim\limits_{-\infty}t(x) = \lim\limits_{-\infty}\frac{x^2}{1-x^2}+\lim\limits_{-\infty}3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{-\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}+3^{\lim\limits_{-\infty}\frac{1}{x}} = -1+3^0 = 0$

Σημείωση: Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

20. **Να βρεθεί το** $\lim\limits_{+\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right)$

Λύση: Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{-\frac{2}{3},\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\}$ και το $+\infty$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Εάν εφαρμοστεί η ιδιότητα του ορίου:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x^2-4}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x+2}$$

οδηγούμαστε στην απροσδιόριστο μορφή $\infty-\infty$

(γιατί $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}}=\frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)}=+\infty$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)=0-0=0$, κ.λ.π.)

Μετά από αυτό κάνουμε την αφαίρεση των παραστάσεων που είναι στην παρένθεση και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\frac{2}{9}$$

Σημείωση: Όπως είναι γνωστό από την μελέτη του $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, όπου $f_1(x)$ και $f_2(x)$ ακέραια πολυώνυμα εφ' όσον είναι του ίδιου βαθμού, σαν οριακή τιμή για $x\to+\infty$ είναι ο λόγος των συντελεστών των μεγιστοβαθμίων όρων.

21. Να βρεθεί το $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f)=\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ και το $+\infty$ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$

Προφανώς οδηγούμαστε στην απροσδιόριστο μορφή $\frac{\infty}{\infty}$. Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[\nu]{a_0x^\mu+a_1x^{\mu-1}+\ldots+a_\mu}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[\nu]{x^\mu\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_\mu}{x^\mu}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[\nu]{x^\mu}\cdot\lim_{x\to+\infty}\sqrt[\nu]{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_\mu}{x^\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[\nu]{x^\mu}\sqrt[\nu]{a_0}/a_0>0$$

θα έχουμε τελικά σαν οριακή τιμή $(+\infty)\sqrt[\nu]{a_0}=+\infty$. Μετά από αυτό διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με την μεγαλύτερη δύναμη του x, που εδώ είναι η $x^{\frac{1}{2}}$ και παίρνουμε:

$$\lim\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\lim\frac{2+3\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+5\frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}}$$

και με εφαρμογή τώρα του κανόνα πηλίκου, έχουμε σαν οριακή τιμή $\frac{2}{\sqrt{3}}$ για $x\to+\infty$.

22. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

1. $\lim_{+\infty}\varphi(x)$ με $\varphi(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$
2. $\lim_{+\infty}\varphi(x)$ με $\varphi(x)=x\left(\sqrt{ax^2+5x+7}-ax-1\right)$

3. $\lim\limits_{-\infty} h(x)$ με $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}-ax$

4. $\lim\limits_{-\infty} g(x)$ με $g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}-\sqrt[3]{x^2(x+1)}$

Λύση: 1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = [0,+\infty)$, επομένως το $(+\infty)$ είναι σ.σ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Αν θέσουμε όπου $x = +\infty$ η f παίρνει την απροσδιόριστη μορφή $\infty-\infty$. Οπότε για την λύση πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}$ και έχουμε:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{x+\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} \quad (1)$$

Αν και πάλι στην (1) θέσουμε όπου $x = +\infty$ έχουμε την αοριστία $\frac{\infty}{\infty}$ επομένως θα διαιρέσουμε τους όρους του κλάσματος με x στην ποιό μεγάλη δύναμη που είναι $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Είναι επομένως: $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{x}}{x}}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}$

και επειδή $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ παίρνουμε: $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \frac{2}{2} = 1$.

2. Επειδή ζητάμε όριο στο $(+\infty)$ θα πρέπει η φ να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\kappa,+\infty)$ επομένως θα πρέπει να είναι το $a>0$ με $a>0$ το τριώνυμο $ax^2+5x+7 \geq 0$ θα αληθεύει η $\forall\, x\in\mathbb{R}$ αν έχει διακρίνουσα αρνητική ή για τα x τα πραγματικά που βρίσκονται έξω από τις ρίζες του τριωνύμου αν η διακρίνουσα είναι θετική οπότε το $(+\infty)$ θα είναι σ.σ του $\mathcal{D}(\varphi)$ και το ζητούμενο όριο θα έχει έννοια.

Μετά από αυτά αν θέσουμε όπου $x = +\infty$ η φ παίρνει την απροσδιόριστη μορφή $(\infty-\infty)$ οπότε διαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε με την συζυγή παράσταση $\sqrt{ax^2+5x+7}+(ax+1)$ και έχουμε:

$$\varphi(x) = x\,\frac{ax^2+5x+7-(ax+1)^2}{\sqrt{ax^2+5x+7}+ax+1} = x\,\frac{a(1-a)x^2+(5-2a)x+6}{\sqrt{ax^2+5x+7}+ax+1} \quad (1)$$

όπου με $x = +\infty$ έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ επομένως θα διαιρέσουμε αριθμητή και παρανομαστή με x. Άρα έχουμε:

$$\varphi(x) = \frac{x^2a(1-a)+(5-2a)x+6}{\sqrt{a+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+a+\frac{1}{x}} = x^2\,\frac{a(1-a)+\frac{5-2a}{x}+\frac{6}{x^2}}{\sqrt{a+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+a+\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$\lim_{+\infty}\varphi(x) = \lim_{+\infty}x^2\lim_{+\infty}\frac{a(1-a)+\frac{5-2a}{x}+\frac{6}{x^2}}{\sqrt{a+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+a+\frac{1}{x}} = +\infty\,\frac{a(1-a)}{2a} = (+\infty)\,\frac{(1-a)}{2}$$

i) Εάν $1-a>0 \Leftrightarrow a<1 \Leftrightarrow 0<a<1$ τότε $\lim\limits_{+\infty}\varphi(x) = +\infty$

ii) Εάν $1-a<0 \Leftrightarrow a>1$ τότε $\lim\limits_{+\infty}\varphi(x) = -\infty$

iii) Εάν $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$ τότε έχουμε αοριστία της μορφής $\infty.0$ οπότε για να βρούμε το όριο αναχωρούμε από την σχέση (1) και με $a=1$ παίρνουμε:

$$\varphi(x) = \frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^2+5x+7}+x+1} = \frac{x^2(3+\frac{6}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+x+1} = \frac{x(3+\frac{6}{x})}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}$$

επειδή $x\in \pi(+\infty)$ είναι $|x|=x$.

$$\text{'Αρα } \lim_{+\infty}\varphi(x) = \lim_{+\infty}x.\lim_{+\infty}\frac{3+\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+1+\frac{1}{x}} = \infty.\frac{3}{2} = +\infty$$

3. Η h έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ επομένως το $-\infty$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(h)$ και το ζητούμενο όριο έχει νόημα. Αν θέσουμε όπου $x=-\infty$ η h παίρνει την μορφή $\infty-a(-\infty)=\infty+a(\infty)$ και αν $a>0$ τότε η πράξη $\infty+\infty$ ορίζεται και κάνει $+\infty$ οπότε είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x) = +\infty$ με $a>0$. Αν δε $a<0$ τότε έχουμε αοριστία της μορφής $(\infty-\infty)$ και η h γράφεται:

$$h(x) = \frac{x^2+x+1-a^2x}{\sqrt{x^2+x+1}+ax} = \frac{(1-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+ax}$$ που με $x=-\infty$ έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$ και η h γίνεται:

$$h(x) = \frac{x^2\left[(1-a^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+ax} = \frac{x^2\left[(1-a^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}{x\left[-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a\right]} =$$

(επειδή το $x\in\pi(-\infty)$ είναι $|x|=-x$)

$$= x\frac{(1-a^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a} \rightarrow \lim_{-\infty}h(x) = \lim_{-\infty}x\lim_{-\infty}\frac{(1-a^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a} =$$

$$= -(-\infty)\frac{1-a^2}{1-a} = (+\infty)(1+a)$$

Επομένως:

i) αν $1+a>0 \Leftrightarrow a>-1 \Leftrightarrow -1<a<0$ τότε $\lim\limits_{-\infty}h(x) = +\infty$

ii) αν $1+a<0 \Leftrightarrow a<-1$ τότε $\lim\limits_{-\infty}h(x) = -\infty$

iii) αν $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$ τότε έχουμε αοριστία της μορφής $(-\infty)0$ και το ζητούμενο όριο θα το βρούμε από την σχέση:

$$h(x) = \frac{(1-\alpha^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\alpha} \overset{\alpha=-1}{=} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}$$

Οπότε $\lim\limits_{-\infty} h(x) = -\frac{1}{2}$.

4. Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ άρα το $+\infty$ είναι σ.σ και το ζητούμενο όριο έχει έννοια. Αν στον τύπο της g θέσουμε όπου $x = +\infty$ έχουμε αοριστία της μορφής $\infty-\infty$ οπότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση:

$(\sqrt[3]{x^2(x-1)})^2+\sqrt[3]{x^2(x-1)}\sqrt[3]{x^2(x+1)}+(\sqrt[3]{x^2(x+1)})^2 = A$ και η g γίνεται:

$$g(x) = \frac{(\sqrt[3]{x^2(x-1)})^3-(\sqrt[3]{x^2(x+1)})^3}{A} = \frac{x^2(x-1)-x^2(x+1)}{A} = \frac{-2x^2}{A}$$

όπου με $x = +\infty$ η $g(x)$ παίρνει τη μορφή $\frac{-\infty}{+\infty}$ που αν διαιρέσουμε με x^2 τους όρους του κλάσματος παίρνουμε:

$$g(x) = \frac{-\frac{2}{x}}{\sqrt[3]{\frac{x^4(x-1)^2}{x^6}}+\sqrt[3]{\frac{x^2(x-1)}{x^3}}\sqrt[3]{x^2(x+1)}+\sqrt[3]{\frac{x^4(x+1)^2}{x^6}}} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{x}}{\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}} \to \frac{0}{2} = 0$$

Δηλαδή $\lim\limits_{+\infty} g(x) = 0$.

23. Να προσδιοριστούν τα πραγματικά α,β,γ έτσι ώστε:

$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^4-2x^2+6x+1}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)] = 0$$

Λύση: Δεχόμαστε ότι η f αν $f(x) = \sqrt{x^4-2x^2+6x+1}-\alpha x^2-\beta x-\gamma$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\kappa,+\infty)$ για να έχει νόημα το $\lim\limits_{+\infty} f(x)$. Η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^4-2x^2+6x+1-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}{\sqrt{x^4-2x^2+6x+1}+\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{(1-\alpha^2)x^4-2\alpha\beta x^3-(2+2\alpha\gamma-\beta^2)x^2+(6-2\beta\gamma)x+1-\gamma^2}{\sqrt{x^4-2x^2+6x+1}+\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

και αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρανομαστή με x^2 έχουμε:

$$f(x) = \frac{(1-\alpha^2)x^2-2\alpha\beta x-(2+2\alpha\gamma-\beta^2)+\frac{6-2\beta\gamma}{x}+\frac{1-\gamma^2}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}$$

Επειδή τώρα θέλουμε $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ $\forall x\in\pi(+\infty)$ θα πρέπει

$$\frac{(1-\alpha^2)x^2-2\alpha\beta x-(2+2\alpha\gamma+\beta^2)}{1+\alpha} \to 0 \ \forall x\in\pi(+\infty)$$

Δηλαδή: $(1+\alpha \neq 0,\ 1-\alpha^2 = 0,\ 2\alpha\beta = 0,\ 2+2\alpha\gamma+\beta^2 = 0) \iff \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = -1$. Επομένως για να είναι το $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ πρέπει $\alpha = 1$, $\beta = 0$ και $\gamma = -1$

24. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|+x^2-x-6}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3|x|}{x^3-3|x|}$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\max(3x+2,x)$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$

Λύση: 1. Με $x = 3$ το ζητούμενο όριο παίρνει τη μορφή $\frac{0}{0}$ επομένως πρέπει να κάνουμε γινόμενο παραγόντων τον αριθμητή. Είναι:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{|x-3|}$ (i)

Για τον υπολογισμό του ορίου (i) θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικα όρια στο 3.

Έχουμε αν $x\to 3^+ \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-3)(x-2)}{|x-3|} = \lim\limits_{3^+}(x-2) = 1$

και αν $x\to 3^- \Rightarrow x-3<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(x-3)(x-2)}{|x-3|} = -\lim\limits_{3^-}(x-2) = -1$

Επομένως δεν υπάρχει όριο στο 3.

2. **1ος τρόπος.** Επειδή με $x = 2$ έχουμε την μορφή $\frac{0}{0}$ κάνουμε γινόμενο τους όρους και σε συνέχεια θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 2.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+2)}{|x-2|} = \lim\limits_{2^+}(x+2) = 4$ γιατί $x\to 2^+ \Rightarrow x-2>0$

και $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{|x-2|} = -\lim\limits_{2^-}(x+2) = -4$ γιατί $x\to 2^- \Rightarrow x-2<0$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο στο 2.

2ος τρόπος. Θέτουμε $x-2 = y \Rightarrow y\to 0$ και $x = y+2$, $x+2 = y+4$ και το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y(y+4)}{|y|}$ οπότε βρίσκουμε τα πλευρικά όρια στο 0.

Έχουμε $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{y(y+4)}{|y|} = \lim\limits_{0^+}(y+4) = 4$ και $\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{y(y+4)}{|y|} = -\lim\limits_{0^-}(y+4) = -4$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{0}\dfrac{y(y+4)}{|y|}$ επομένως και το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{|x-2|}$

3. Αν θέσουμε $f(x) = \dfrac{|x-3|+x^2-x-6}{x-3}$ είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{3\} =$ $= (-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ οπότε επειδή το 3 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ και είναι και σημείο ένωσης του $\mathcal{D}(f)$ θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο 3.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{3^+}(x+3) = 6$ και $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x) = \lim\limits_{3^-}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} =$ $= \lim\limits_{3^-}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim\limits_{3^-}(x+1) = 4$. Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

4. Αν $\varphi(x) = \frac{x^3+3|x|}{x^3-3|x|}$ τότε $\mathcal{D}(\varphi) = (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3},0) \cup (0,\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$

οπότε θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο 0.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x) = \lim\limits_{0^+}\frac{x^2+3}{x^2-3} = -1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x) = \lim\limits_{0^-}\frac{x^2-3}{x^2+3} = -1$

Άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = -1$.

5. Γνωρίζουμε ότι $\max(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ οπότε αν $h(x) = \max(3x+2,x)$ είναι

$h(x) = \frac{3x+2+x+|3x+2-x|}{2} = \frac{4x+2+|2x+2|}{2}$ και επειδή υπάρχουν απόλυτα στον

τύπο της h θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο -1.

Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+}h(x) = \lim\limits_{-1^+}(3x+2) = 5$ και $\lim\limits_{x\to -1^-}h(x) = \lim\limits_{-1^-}x = 1$.

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{-1}h(x)$.

6. Με $x = 3$ παίρνουμε την μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε θα παραγοντοποιήσουμε τους όρους της $t(x)$ με $t(x) = \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$

Είναι: $t(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{\sqrt{x}\,|x-3|}$ και επειδή το 3 είναι σημείο ένωσης του $\mathcal{D}(t)$

θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 3.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 3^+}t(x) = \lim\limits_{3^+}\frac{x+2}{\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

και $\lim\limits_{x\to 3^-}t(x) = -\lim\limits_{3^-}\frac{x+2}{\sqrt{x}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$

Άρα η $t(x)$ δεν έχει όριο στη θέση $x = 3$.

25. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f(x) = |2x-1|+|x-2|$ **2.** $\varphi(x) = \left|\frac{3x-1}{x-2}\right|$

3. $h(x) = \frac{\eta\mu x}{|x|}$ **4.** $g(x) = \frac{\sqrt{\eta\mu^2 x}}{x}$

Να βρεθούν τα σημειωμένα όρια:

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

Λύση: 1. Για να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης σε κάποια θέση είναι καλύτερα να την γράψουμε χωρίς το σύμβολο του απολύτου (Δηλαδή με πολλαπλό τύπο). Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $x \geq 2 \Rightarrow f(x) = 3x-3$ γιατί $2x-1 > 0$ και $x-2 \geq 0$

ii) $\frac{1}{2} \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x+1$ γιατί $2x-1 \geq 0$ και $x-2 < 0$

iii) $x<\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -3x+3$ γιατί $2x+1<0$ και $x-2<0$

οπότε η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} 3x-3, & x\in[2,+\infty) \\ x+1, & x\in[\frac{1}{2},2) \\ -3x+3, & x\in(-\infty,\frac{1}{2}) \end{cases}$

Τα σημεία $2, \frac{1}{2}, +\infty$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f) = (-\infty,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},2) \cup [2,+\infty) = \mathbb{R}$ και επομένως τα ζητούμενα όρια έχουν έννοια.

Επειδή δε το 2 είναι σημείο ένωσης του $\mathcal{D}(f)$ θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 2. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{2^+}(3x-3) = 3$ και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{2^-}(x+1) = 3$ άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. Για το όριο στο $\frac{1}{2}$ θα πρέπει να βρούμε την αριστερή οριακή τιμή. Είναι: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(-3x+3) = \frac{3}{2}$.

Επειδή το $+\infty$ βρίσκεται στο $[2,+\infty)$ και είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ το όριο θα βρεθεί από τον πρώτο τύπο της f.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3x-3) = +\infty$.

2. Ρίζες των απολύτων είναι το $2, \frac{1}{3}$ οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$-\infty \quad \frac{1}{3} \quad 2 \quad \infty$

i) $x>2 \Rightarrow \varphi(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

ii) $\frac{1}{3} \le x < 2 \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{3x-1}{x-2}$

iii) $x<\frac{1}{3} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

Επομένως η φ γράφεται $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{x-2}, & x\in(-\infty,\frac{1}{3}) \cup (2,+\infty) \\ -\frac{3x-1}{x-2}, & x\in[\frac{1}{3},2) \end{cases}$

και έχει $\mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{R}-\{2\}$. Οπότε τα σημεία 2 και $\frac{1}{3}$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(\varphi)$.

Όταν μια συνάρτηση αλλάζει τύπο σε κάποιο σημείο που είναι σ.σ του πεδίου ορισμού της τότε για να βρούμε το όριο στο σημείο αυτό βρίσκουμε τα πλευρικά όρια.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+} \varphi(x) = \lim\limits_{2^+} \frac{3x-1}{x-2} = +\infty$ γιατί $x\to 2^+ \Rightarrow x-2>0$

και $\lim\limits_{x\to 2^-} \varphi(x) = -\lim\limits_{2^-} \frac{3x-1}{x-2} = -\infty$ γιατί $x\to 2^- \Rightarrow x-2<0$

Στο σημείο $\frac{1}{3}$ έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} \varphi(x) = -\lim\limits_{\frac{1}{3}^+} \frac{3x-1}{x-2} = 0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} \varphi(x) = \lim\limits_{\frac{1}{3}^-} \frac{3x-1}{x-2} = 0$

Άρα υπάρχει $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \varphi(x) = 0$.

3. Η h γράφεται: $h(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \in (0,+\infty) \\ -\frac{\eta\mu x}{x}, & x \in (-\infty,0) \end{cases}$

και έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}-\{0\}$.

Για να υπολογίσουμε το όριο στο μηδέν θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 0.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ (Πρόταση 18).

και $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -\lim\limits_{0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = -1$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

4. Η g γράφεται $g(x) = \frac{|\eta\mu x|}{x}$ και έχει τον πολλαπλό τύπο

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & \eta\mu x > 0 \\ -\frac{\eta\mu x}{x}, & \eta\mu x < 0 \end{cases}$$

Επομένως θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο μηδέν.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\lim\limits_{0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = -1$

Επομένως η g δεν έχει όριο στο μηδέν.

26. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-3}, & x \in (-\infty,3) \cup (3,+\infty) \\ 1, & x = 3 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty,0] \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \in (0,+\infty) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}, & |x| > 1 \\ 5, & |x| < 1 \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4}, & x \neq \pm 2 \\ 0, & x = \pm 2 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} \varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} \varphi(x)$.

Λύση: Επειδή το 3 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 3.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim\limits_{3^+}(x-2) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim\limits_{3^-}(x-2) = 1.$

Επομένως υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$.

Όμοια θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο 1 και -1.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{1^+} \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{1^-} 5 = 5$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

Επίσης $\lim\limits_{-1^+} g(x) = \lim\limits_{-1^+} 5 = 5$ και $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{-1^-} \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$.

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.

Για την h(x) έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \text{συν}x = \text{συν}0 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x =$
$= e^0 = 1$. Άρα $\exists \lim\limits_{x\to 0} h(x)$ και είναι $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$.

Για την φ(x) έχουμε: $\mathcal{D}(\varphi) = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty) \cup \{-2,2\}$.

Άρα είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} \varphi(x) = \lim\limits_{2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \varphi(x) = \lim\limits_{2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} \varphi(x)$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to -2^+} \varphi(x) = \lim\limits_{-2^+} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$ και $\lim\limits_{x\to -2^-} \varphi(x) = \lim\limits_{-2^-} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$

Άρα $\exists \lim\limits_{x\to -2} \varphi(x) = -\frac{1}{4}$.

27. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{εφ}x}{x}, & x \in [0,+\infty) \\ 3x^2-(2+\lambda)x+2\lambda^2-7, & x \in (-\infty,0] \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο πραγματικός λ έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Λύση: Επειδή η f αλλάζει τύπο στο μηδέν θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο μηδέν και επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ θα είναι ίσα.

Έχουμε επομένως: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \frac{\text{εφ}x}{x} = \lim\limits_{0^+} \frac{\text{ημ}x}{x} \cdot \frac{1}{\text{συν}x} =$

$= \lim\limits_{0^+} \frac{\text{ημ}x}{x} \cdot \lim\limits_{0^+} \frac{1}{\text{συν}x} = 1 \frac{1}{\text{συν}0} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-}(3x^2-(2+\lambda)x+2\lambda^2-7) =$
$= 2\lambda^2-7$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Leftrightarrow 1 = 2\lambda^2-7 \Leftrightarrow 2\lambda^2 = 8 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$.

28. Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x+3}{\sqrt[3]{28+x}-3}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty} x\,\text{ημ}\frac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[\nu]{x+1}-1}{x}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
5. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\text{ημ}x}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{ημ}(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\text{συν}x}$

Λύση: 1. 1ος τρόπος. Εισάγουμε νέα μεταβλητή στο ζητούμενο όριο. Θέτουμε $\sqrt[3]{28+x} = y \Leftrightarrow x+28 = y^3$ και όταν $x \to -1 \rightarrow y \to 3$ οπότε το ζητούμενο όριο

είναι: $\frac{3(y^3-28)+3}{y-3} = \lim_{y\to 3}\frac{3y^3-81}{y-3} = \lim_{y\to 3}\frac{3(y^3-27)}{y-3} = 3\lim_{y\to 3}(y^2+3y+9) = 3.27 =$
$= 81$.

2ος τρόπος. Με x = -1 παίρνουμε τη μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση $\sqrt[3]{(28+x)^2}+\sqrt[3]{28+x}.3+9 = A$ και το ζητούμενο όριο γίνεται:

$\lim_{x\to -1}\frac{3(x+1)A}{(\sqrt[3]{28+x}-3)A} = \lim_{x\to -1}\frac{3A(x+1)}{\sqrt[3]{(28+x)^3}-27} = \lim_{x\to -1}\frac{3A(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}3A = 3.(3^2+3^2+9) =$
$= 81$.

2. 1ος τρόπος. Θέτουμε $\frac{1}{x} = y \Rightarrow y\to 0$ και το ζητούμενο όριο γίνεται:

$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\eta\mu y = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y} = 1$.

2ος τρόπος. Αν θέσουμε όπου x = +∞ παίρνουμε τη μορφή ∞(0).

Και το όριο γίνεται: $\lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ γιατί όταν $x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0$

3. 1ος τρόπος. Θέτουμε $x-\frac{\pi}{2} = y \Rightarrow y\to 0$ και το όριο γίνεται:

$\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu(y+\frac{\pi}{2})}{y+\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu y}{y+\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

2ος τρόπος. Αν θέσουμε όπου $x = \frac{\pi}{2}$ παίρνουμε $\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ επομένως το όριο

είναι το $\frac{2}{\pi}$ γιατί $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{x} = \frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

4. 1ος τρόπος. Θέτουμε $\sqrt[\nu]{x+1} = y \Rightarrow x+1 = y^\nu \Rightarrow y\to 1$ και το ζητούμενο όριο γίνεται: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[\nu]{x+1}-1}{x} = \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^\nu-1} = \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y^{\nu-1}+y^{\nu-2}+...+y+1)} = \frac{1}{\nu}$

2ος τρόπος. Αν θέσουμε όπου x = 0 παίρνουμε την μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση $A = \sqrt[\nu]{(x+1)^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{(x+1)^{\nu-2}}+...+$ $+\sqrt[\nu]{x+1}+1$ και έχουμε: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[\nu]{x+1}-1}{x} = \lim_{0}\frac{(\sqrt[\nu]{x+1}-1)A}{x.A} = \lim_{0}\frac{x+1-1}{Ax} = \lim_{0}\frac{1}{A} = \frac{1}{\nu}$

5. 1ος τρόπος. Θέτουμε $x-\pi = y \Rightarrow x = y+\pi$ και $y\to 0$ οπότε το ζητούμενο όριο γίνεται: $\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu(y+\pi)}{y+\pi} = -\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y+\pi} = 0$.

2ος τρόπος. Είναι $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\eta\mu y}{y}=\frac{\eta\mu\pi}{\pi}=0$.

6. Θέτουμε $x-\frac{\pi}{6}=y \to x=y+\frac{\pi}{6}$ και $y\to 0$ και το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{\sqrt{3}-2\sigma\upsilon\nu(y+\frac{\pi}{6})}=\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sigma\upsilon\nu(y+\frac{\pi}{6}))}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{2(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu(y+\frac{\pi}{6}))}=\lim_{y\to 0}\frac{2\eta\mu\frac{y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{y}{2}}{4\eta\mu(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6})\eta\mu\frac{y}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{y}{2}}{2\eta\mu(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6})}=$$

$$=\frac{1}{2\frac{1}{2}}=1.$$

29. Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)\sqrt{x}+2\sqrt{x}-3x-1}{(x+1)\sqrt{x+3}+14\sqrt{x+3}-6x-26}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+8}-2}{\eta\mu^2 4x}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-\sqrt[3]{\eta\mu x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Λύση: 1. Με $x=1$ έχουμε την αοριστία $\frac{0}{0}$, οπότε το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3x-1}{(x+3)\sqrt{x+3}-6(x+3)+12\sqrt{x+3}-8}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{(\sqrt{x+3}-2)^3}=$$

$$=\lim_{1}\frac{(\sqrt{x}-1)^3(\sqrt{x}+1)^3(\sqrt{x+3}+2)^3}{(\sqrt{x}+1)^3(\sqrt{x+3}-2)^3(\sqrt{x+3}+2)^3}=\lim_{1}\frac{(x-1)^3(\sqrt{x+3}+2)^3}{(x+3-4)^3(\sqrt{x}+1)^3}=\lim_{1}\frac{(\sqrt{x+3}+2)^3}{(\sqrt{x}+1)^3}=$$

$$=\left(\frac{4}{2}\right)^3=8.$$

2. Με $x=0$ έχουμε την αοριστία $\frac{0}{0}$ οπότε το όριο γράφεται αν πολ/με και διαιρέσουμε με την παράσταση $A=\sqrt[3]{(x^2+8)^2}+2\sqrt[3]{x^2+8}+4$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x^2+8}-2)(\sqrt[3]{(x^2+8)^2}+\sqrt[3]{(x^2+8)}.2+4)}{\eta\mu^2 4x(\sqrt[3]{(x^2+8)^2}+\sqrt[3]{x^2+8})2+4)}=\lim_{0}\frac{x^2}{\eta\mu^2(4x)A}=$$

$$=\lim_{0}\frac{16x^2}{16\eta\mu^2 4xA}=\lim_{0}\left(\frac{4x}{\eta\mu 4x}\right)^2\frac{1}{16}\lim_{0}\frac{1}{A}=1.\frac{1}{16}\lim_{0}\frac{1}{A}=\frac{1}{192}$$

3. Με $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε την αοριστία $\frac{0}{0}$ και επειδή υπάρχουν ριζικά πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση $A=\eta\mu^2 x+\eta\mu x\sqrt[3]{\eta\mu x}+\sqrt[3]{\eta\mu^2 x}$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x-\sqrt[3]{\eta\mu x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x-\sqrt[3]{\eta\mu x})A}{A\sigma\upsilon\nu^2 x} = \lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x-\eta\mu x}{A\sigma\upsilon\nu^2 x} = \lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x(\eta\mu^2 x-1)}{A\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= -\lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{A\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{A} = -\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} A} = -\frac{1}{3}.$$

30. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 3x}{2x}+\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{1}{x}\varepsilon\varphi x\right)$.

Λύση: Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 3x}{2x}+\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 3x}{2x}\right)+\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu 2x-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu 3x}{3x}\right)+\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu 2x-\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \frac{3.1}{2}+1-1 = \frac{3}{2}$$

31. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^5}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$

Λύση: Παρακολουθείστε τον παρακάτω ειδικό τρόπο. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^5}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[5]{1+3x^5}-1)-(\sqrt{1-2x}-1)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)-(\sqrt{1+x}-1)} =$$

$$= \lim_{0}\frac{\frac{\sqrt[5]{1+3x^5}-1}{x}-\frac{\sqrt{1-2x}-1}{x}}{\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}}$$

Και τώρα υπολογίζουμε χωριστά την κάθε οριακή τιμή για τον αριθμητή και παρανομαστή και παίρνουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^5}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+3x^5-1}{[(\sqrt[5]{1+3x^5})^4+(\sqrt[5]{1+2x^5})^3+(\sqrt[5]{1+3x^5})^2+\sqrt[5]{1+3x^5}+1]x} =$

$= \frac{0}{1+1+1+1+1} = 0.$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-1}{x(\sqrt{1-2x}+1)} = \frac{-2}{2} = -1$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x-1}{[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1]x} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x-1}{(\sqrt{1+x}+1)x} = \frac{1}{2}$

Επομένως η ζητούμενη οριακή τιμή είναι: $\frac{0-(-1)}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = -6.$

32. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ **να βρεθεί το όριο**
$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ **με** $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}-\alpha x$.

Λύση: Η h έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ επομένως το $-\infty$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(h)$ και το ζητούμενο όριο έχει νόημα. Αν θέσουμε όπου $x = -\infty$ η h παίρνει τη μορφή $\infty-\alpha(-\infty) = \infty+\alpha(\infty)$ και αν $\alpha>0$ τότε η πράξη $\infty+\infty$ ορίζεται και κάνει

$+\infty$ οπότε το $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ με $a>0$. Αν δε $a<0$ τότε έχουμε αοριστία της μορφής $(\infty-\infty)$ και η h γράφεται:

$h(x) = \frac{x^2+x+1-a^2x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+ax} = \frac{(1-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+ax}$ που με $x = -\infty$ έχουμε αοριστία της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$ και η h γίνεται:

$$h(x) = \frac{x^2\left[(1-a^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a} = \frac{x^2\left[(1-a^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}{x\left[-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a\right]}$$

(επειδή το $x\in \pi(-\infty)$ είναι $|x| = -x$)

$$= x.\frac{(1-a^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a} \Rightarrow \lim_{-\infty} h(x) = \lim_{-\infty} x \lim_{-\infty}\frac{(1-a^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a} =$$

$$= -(-\infty)\,\frac{1-a^2}{1-a} = (+\infty)(1+a)$$

Επομένως:

i) αν $1+a>0 \Leftrightarrow a>-1 \Leftrightarrow -1<a<0$ τότε $\lim\limits_{-\infty} h(x) = +\infty$

ii) αν $1+a<0 \Leftrightarrow a<-1$ τότε $\lim\limits_{-\infty} h(x) = -\infty$

iii) αν $a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ τότε έχουμε αοριστία της μορφής $(-\infty)0$ και το ζητούμενο όριο θα το βρούμε από την σχέση:

$$h(x) = \frac{(1-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+a} \longrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}$$

Οπότε $\lim\limits_{-\infty} h(x) = -\frac{1}{2}$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{4}{2v+3} = 0$, ii) $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{2v^2+4v+1}{v^3+2} = 0$, iii) $\lim\limits_{v\to\infty}(\sqrt{v^2+v+2}-\sqrt{v^2+v+1}) = 0$,

iv) $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{2v+3}{v+1} = 2$, v) $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{\eta\mu v+\sigma\upsilon v}{v+2} = 0$, vi) $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{2v^2+3v+1}{4v^2+v} = \frac{1}{2}$,

vii) $\lim\limits_{v\to\infty}(-1)^v\frac{1}{3v+5} = 0$, viii) $\lim\limits_{v\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^v = 0$

2. Δείξετε με τον ορισμό ότι:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1} = 2$, 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+6}{x+4} = 4$, 3) $\lim\limits_{x\to2}(2x+3) = 7$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x+1) = +\infty$, 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x+6) = -\infty$, 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+3} = 0$.

3. Όμοια με τον ορισμό δείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{4x+2}{x-1} = 4$
2. $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{5x^2-5x+6}{x^2-1} = +5$
3. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2+2} = 1$
4. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$
5. $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty$
6. $\lim\limits_{-\infty} (4x^2-8x+13) = +\infty$

4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{3x-|x-2|}{2x}$

Να βρεθούν τα όρια της f στο $(+\infty)$ και $(-\infty)$ και να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

5. Όμοια για την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-5x}$

6. Να βρεθούν οι οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$

β) $f(x) = x-\sqrt{x^2-1}$

γ) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

δ) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

ε) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+10}{x-3}$

στ) $f(x) = \sqrt{x^2+x+3}$

7. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων

1. f με $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$
2. h με $h(x) = \dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{x^2+x+1}$
3. t με $t(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x+2}$
4. φ με $\varphi(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$

8. Να βρεθούν οι οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης f αν υπάρχουν

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+2}{x+3}, & x \le 2 \\ \dfrac{x^3+2x+1}{x^2+1}, & x > 2 \end{cases}$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

i) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

ii) $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

iii) $\varphi(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

iv) $h(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{|x|-1}$

v) $\sigma(x) = \dfrac{3x+2}{x|x|}$

vi) $t(x) = \dfrac{x^2-4x+5+|x-5|}{x-5}$

Να βρεθούν τα όρια αν υπάρχουν:

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\lim\limits_{3}g(x)$, $\lim\limits_{-3}g(x)$, $\lim\limits_{-8}\varphi(x)$, $\lim\limits_{8}\varphi(x)$

$\lim\limits_{1}h(x)$, $\lim\limits_{-1}h(x)$, $\lim\limits_{0^+}\sigma(x)$, $\lim\limits_{0^-}\sigma(x)$, $\lim\limits_{8}t(x)$.

10. Όμοια να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{0^+}\sqrt{3x^2-x}$
2. $\lim\limits_{1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$
3. $\lim\limits_{3}\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{x-3}$
4. $\lim\limits_{1}\dfrac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$
5. $\lim\limits_{0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$
6. $\lim\limits_{2^-}\dfrac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$

11. Δείξετε ότι $\lim\limits_{2^-}f(x) = 5$ και $\lim\limits_{2^+}f(x) = 1$

όπου $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 2 \\ x-1, & x > 2 \end{cases}$

12. Δείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{0^-}\dfrac{|x|(x+1)}{x} = -1$

ii) $\lim\limits_{1^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{3}$

iii) $\lim\limits_{5}(12+\sqrt{x-5}) = 12$

iv) $\lim\limits_{3^+}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|} = 1$

13. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

α) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x|x|}$

β) $g(x) = -\dfrac{|x|(x+1)}{x}$

γ) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{|x|}$

δ) $\varphi(x) = x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

Εξετάσετε αν έχουν όρια στο σημείο $x = 0$.

14. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & \text{αν } x \ge 1 \\ 2x-2 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x \in [-1,4) \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{αν } x \in [4,+\infty) \end{cases}$

Να βρεθούν τα όρια αν υπάρχουν:

$\lim\limits_{1}f(x)$, $\lim\limits_{-1}g(x)$, $\lim\limits_{4}g(x)$.

15. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$
2. $g(x) = \dfrac{x+1}{(x-3)^2}$
3. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-3}$
4. $\varphi(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x+2}$.

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες τους οριζόντιες-κατακόρυφες- και πλάγιες αν υπάρχουν.

16. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = ημ\frac{1}{x}$ δεν έχει οριακή τιμή στη θέση $x = 0$.

17. Δίδονται οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)|x|}$
2. $g(x) = \max(\frac{1}{x}, \frac{3}{x})$
3. $h(x) = \min(2x, 3x-1)$
4. $φ(x) = \frac{|x-1|}{x-2}$
5. $σ(x) = \frac{2x^2+1}{|x-2|(x+2)}$

Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια:

$\lim\limits_{0} f(x)$, $\lim\limits_{1^+} f(x)$, $\lim\limits_{0^-} g(x)$, $\lim\limits_{1} h(x)$, $\lim\limits_{2} φ(x)$, $\lim\limits_{1} t(x)$, $\lim\limits_{0} t(x)$

18. Δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ με

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [1, +\infty) \\ 4-x, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g,h με τύπους:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2-9|x+2|}, \quad h(x) = \begin{cases} 3-x^2, & x < 0 \\ \frac{x^2-1}{1-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Δείξετε ότι:

$\lim\limits_{0^-} f = -1$, $\lim\limits_{0^+} f = 1$

$\lim\limits_{-2^+} g = 2$, $\lim\limits_{(-2)^-} g = 2$, $\lim\limits_{(-3)^-} g = 0$, $\lim\limits_{(-6)^+} g = 0$

$\lim\limits_{0^-} h = 3$, $\lim\limits_{0^+} h = 1$.

20. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους:

$f(x) = x+\sqrt{x-x^2}$, $g(x) = \frac{|x+3|-2x}{4x-6-|x+3|}$

Εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια

$\lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{1^+} f$, $\lim\limits_{1^-} f$, $\lim\limits_{-3} g$, $\lim\limits_{3^-} g$, $\lim\limits_{3^+} g$.

21. Να βρεθούν τα όρια για τις συναρτήσεις:

$f(x) = \frac{1}{x} - x^3$, $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2}+5$, $φ(x) = \frac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$, $h(x) = \frac{(2x-5)\sqrt{x}}{x^2-5x+6}$,

$t(x) = \frac{x-α^2}{x-α}$.

$\lim\limits_{0^-} f$, $\lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{3^-} g$, $\lim\limits_{3^+} g$, $\lim\limits_{\sqrt{3}^+} φ$, $\lim\limits_{\sqrt{3}^-} φ$, $\lim\limits_{2^-} h$, $\lim\limits_{3^-} h$, $\lim\limits_{α^+} t$, $\lim\limits_{α^-} t$.

22. Έστω οι συναρτήσεις με τύπους

$f(x) = \frac{|x|+x}{x}$, $g(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$, $h(x) = \begin{cases} -x^3, & x \le 1 \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$

Να βρεθούν τα όρια αν υπάρχουν:

$\lim_{0^+} f$, $\lim_{0^-} f$, $\lim_{1^+} g$, $\lim_{1^-} g$, $\lim_{1} h$.

23. Να βρεθούν τα όρια αν υπάρχουν

i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

ii) $\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

iii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x+1}-1}$

iv) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(x+4)}$

v) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

vi) $\lim_{x \to \alpha} \frac{(x-\beta)^\nu-(\alpha-\beta)^\nu}{x-\alpha}$

24. Όμοια τα όρια:

i) $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2+1}{(x+1)|x|}$

ii) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}$

iii) $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x^2-4}$

iv) $\lim_{x \to 2} \frac{x+|x|}{|x-2|(x+3)}$

v) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2-3x}{x^3+2x^2}$

vi) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+3x^3}{3x^2+9x^3+x^4}$

25. Να υπολογισθούν τα όρια:

α. $\lim_{+\infty} \frac{x^3+x+4}{x^3+4x+1}$

β. $\lim_{+\infty} \frac{(1-x)(x^2-4)}{2x^3-2}$

γ. $\lim_{+\infty} \frac{x^2-4}{|x-2|}$

δ. $\lim_{\pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+1}$

ε. $\lim_{\pm\infty}(x^7-5x^6+3x^2+8x+1)$

στ. $\lim_{+\infty} \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1-\sqrt{x}}$

26. Όμοια τα όρια:

i) $\lim_{+\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$

ii) $\lim_{+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}-2x)$

iii) $\lim_{+\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})\sqrt{x}$

iv) $\lim_{-\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}+x)$

v) $\lim_{-\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$

vi) $\lim_{+\infty} x^{\frac{1}{3}}((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}})$.

27. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός λ έτσι ώστε το $\lim_{+\infty} x^\lambda(\sqrt[3]{x+\sqrt{x+3}}-\sqrt[3]{x+\sqrt{x+2}})$ να υπάρχει και να είναι διάφορο του μηδενός.

28. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{8x^4-24x^3+6x^2+4}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$. Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim_{+\infty} f(x) = \frac{5}{2}$.

29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}-\alpha x$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός α έτσι ώστε: i) $\lim\limits_{+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, ii) $\lim\limits_{-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

30. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2-4x+2}-(\alpha x+\beta)$. Να βρεθούν τα πραγματικά α,β έτσι ώστε:

i) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$, ii) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, iii) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -2$

31. Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+2)^3+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)$
2. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{|x^3-4x^2+6x+1|}{x^3-4}$

32. Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt[3]{x^2}}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\mu}-1}{x^{\nu}-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$

33. Δίνεται η συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\beta x)}{x} = \beta\lambda$, $\beta \neq 0$.

34. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x+4}-\alpha x-\beta$.

Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -3$.

35. Όμοια δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2+\kappa x+\lambda}+\beta x$ να βρείτε τα $\kappa,\lambda,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$. Δείξετε ότι δεν έχουν όρια οι συναρτήσεις

i) $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \text{συν}\dfrac{1}{x}$ στο 0.

ii) $g: \mathbb{N} \to \{-1,1\}$ με $f(x) = (-1)^{\nu}$ στο $(+\infty)$

36. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha x^{\nu}+\beta x^{\mu}+\gamma}{(x-1)^2}$ αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$ και $\nu\alpha+\mu\beta = 0$.

37. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ τότε να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ αν

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda^2+3\lambda x+5x^2, & x \le 0 \\ 4x^2+3\lambda+4-2x, & x > 0 \end{cases}$$

38. Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ημx}{x-2ημx}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-συν2x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ημ\sqrt{x}}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 ημ\frac{1}{x}}{ημx}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} xημ\frac{1}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ημ5x}{x}$

39. Όμοια τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ημ4x-ημ2x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{εφ5x}{εφ7x}$
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-ημx}{(\pi-2x)^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ημ(x+α)-ημ(x-α)-2ημα}{x^2}$

40. Να υπολογιστούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{συνx} - εφx)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2ημ3x}{2x-3ημ2x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-ημx}{\sqrt{1-συνx}}$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{ημ3x}{1-2συνx}$

41. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{ημ(x-1)α}{x(x-1)}, & x < 1 \\ 2αx^2-2x+1, & x > 1 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο $α \in \mathbb{N}$ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

42. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{1-συν2x}{ημx}, & x > 0 \\ \lambda^2+3\lambda x+5x^2+2\lambda, & x < 0 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

συνέχεια συνάρτησης

4.18. Συνεχής συνάρτηση

Ορισμός 1. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f)$ και $\xi \in \mathcal{D}(f)$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $|x-\xi| < \delta$ να ισχύει $|f(x)-f(\xi)| < \varepsilon$.

Ορισμός 2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)$ και ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε, όταν $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Ορισμός 3. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε όλο το σύνολο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Παρατηρήσεις: 1. Η συνάρτηση f πρέπει να είναι ορισμένη στο σημείο $\xi \in \mathcal{D}(f)$, δηλαδή πρέπει να υπάρχει ο αριθμός $f(\xi)$ και να είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός.

2. Πρέπει να υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ και να είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός και όχι το $\pm\infty$.

3. Το $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ πρέπει να είναι ακριβώς το $f(\xi)$.

4. Πρέπει το σημείο ξ να ανήκει στο $\mathcal{D}(f)$ και μπορεί να είναι σημείο συσωρεύσεως ή απομονωμένο σημείο και αν το ξ είναι απομωνομένο σημείο τότε είναι $|x-\xi| = 0 < \delta$ και ισχύει $|f(x)-f(\xi)| = 0 < \varepsilon$ και ο ορισμός 1 ισχύει.

5. Κάθε ακολουθεία (a_ν) $\nu \in \mathbb{N}$ που όπως γνωρίζουμε είναι μια συνάρτηση $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{N}$ γιατί το $\mathbb{N}$ αποτελείται μόνο από απομωνομένα σημεία.

4.19. Ασυνέχεια συνάρτησης.

Ορισμός 1. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)$ λέγεται ασυνεχής στο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ του $\mathcal{D}(f)$ όταν και μόνο όταν ισχύει μια τουλάχιστο από τις περιπτώσεις:

α) το $\xi \notin \mathcal{D}(f)$.

β) Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ ή υπάρχει και είναι το $+\infty$ ή $-\infty$.

γ) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ και είναι $f(\xi) \neq \lambda$.

Ορισμός 2. Μια συνάρτηση f λέγεται ασυνεχής σε ένα σύνολο A αν και μόνο αν είναι ασυνεχής σε ένα τουλάχιστο σημείο του A.

Ορισμός 3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)$ και ξ σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$ λέγεται ασυνεχής στο ξ, όταν και μόνο όταν, υπάρχει $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $x \in \mathcal{D}(f)$ με $|x-\xi| < \delta$ έτσι ώστε να ισχύει: $|f(x)-f(\xi)| \geq \varepsilon$.

4.20. Πλευρική συνέχεια συνάρτησης.

Ορισμός 1. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής **από δεξιά** στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$, τότε και μόνο τότε, όταν $\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = f(\xi)$.

Ορισμός 2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής **από αριστερά** στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ τότε και μόνο τότε, όταν $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) = f(\xi)$.

Παρατηρήσεις: 1. Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής από δεξιά στο ξ σημαίνει ότι υπάρχει διάστημα $[\xi,\xi+\delta)$, $\delta > 0$ στο οποίο η f είναι ορισμένη και ότι $\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = f(\xi)$.

2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής από αριστερά στο ξ σημαίνει, ότι υπάρχει ένα διάστημα $(\xi-\delta,\xi]$ στο οποίο η f είναι ορισμένη και ότι $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) = f(\xi)$

3. Εάν η f είναι ορισμένη στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ τότε είναι συνεχής σ'αυτό, αν και μόνο αν, είναι συνεχής από δεξιά και από αριστερά στο ξ. Δηλαδή:
$\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = f(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)$.

4. Εάν το σημείο ξ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ ή δεξιόπλευρο ή αριστερόπλευρο, και η f είναι συνεχής από δεξιά ή μόνο από αριστερά τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής από δεξιά μόνο ή μόνο από αριστερά.

5. Εάν τα πλευρικά όρια στο ξ είναι ίσα και διαφορετικά από το $f(\xi)$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) \neq f(\xi)$ τότε η ασυνέχεια στο ξ ονομάζεται μη ουσιώδης ή αιρομένη, και τότε αν θέσουμε $f(x) = \lambda$ η νέα συνάρτηση που προκύπτει είναι συνεχής στο ξ. Δηλαδή η ασυνέχεια "εξουδετερώνεται".

Εάν όμως η ασυνέχεια δεν αίρεται τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει πήδημα πεπερασμένου μήκους στο σημείο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ και αυτό συμβαίνει όταν

$\lim_{x\to\xi^+} f(x) \neq \lim_{x\to\xi^-} f(x)$ αλλά είναι πεπερασμένοι πραγματικοί αριθμοί.

Σαν πήδημα της f στο σημείο ξ ορίζεται τότε ο θετικός αριθμός
$d = \Pi\eta\delta(\xi) = |\lim_{x\to\xi^+} f(x) - \lim_{x\to\xi^-} f(x)| \neq 0$.

Στην περίπτωση που ένα τουλάχιστο από τα $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$ ή $\lim_{x\to\xi^-} f(x)$ είναι το $\pm\infty$ το πηδ(ξ) θεωρείται το άπειρο.

6. Μια ασυνέχεια στο $\xi\in\mathcal{D}(f)$ λέγεται ουσιώδης όταν και μόνο όταν δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ ένα τουλάχιστο από τα όρια $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$, $\lim_{x\to\xi^-} f(x)$.

4.21. Συνέχεια βασικών συναρτήσεων και πράξεις.

Πρόταση 1.

i) Η σταθερή συνάρτηση f με $f(x) = c$ είναι συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Η ταυτοτική συνάρτηση f με $f(x) = x$ είναι συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

iii) Η κ-δύναμις συνάρτηση f με $f(x) = x^\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

iv) Η μονώνυμος συνάρτηση f με $f(x) = ax^\nu$, $a\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$ είναι συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

v) Η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ με $a_i\in\mathbb{R}$, $i = 0,1,2,\ldots,\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$ είναι συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

vi) Η απόλυτος τιμή συνάρτηση f με $f(x) = |x|$ είναι συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

vii) Η τετραγωνική ρίζα συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+$.

Πρόταση 2. Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλίκο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Πρόταση 3. Αν $f: A\to B$ και η f είναι συνεχής στο $\xi\in A$ με $f(\xi)\neq 0$ τότε και $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής στο $\xi\in A$.

Πρόταση 4. Αν $f(\xi) > 0$ και η f είναι συνεχής στο ξ τότε και η $\sqrt{f}$ είναι συνεχής στο ξ.

Πρόταση 5. Οι συναρτήσεις ημx, συνx, εφx, σφx, είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Πρόταση 6. Αν η συνάρτηση $f: A\to B$ είναι συνεχής στο $\xi\in A$ και η $y = g(f(x))$ είναι συνεχής στο $\eta = f(\xi)\in B$ τότε και η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο ξ.

4.22. Συνέχεια σε κλειστό διάστημα.

Πρόταση 1. Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστο πραγματικός αριθμός $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$ (Bolzano)

Παρατήρηση: Αν μια συνάρτηση πληροί τις συνθήκες Bolzano και επιπλέον είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Πρόταση 2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.
(Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών)

Πρόταση 3. Κάθε συνεχής συνάρτηση f απεικονίζει ένα διάστημα A σε διάστημα (Διάστημα A όχι υποχρεωτικά κλειστό ή φραγμένο).

4.23. Μονοτονία της αντίστροφης συνάρτησης.

Πρόταση. Αν η f είναι ορισμένη, συνεχής και γνήσια μονότονη σ' ένα διάστημα A τότε είναι "1-1" και επί απεικόνιση του A στο f(A). Υπάρχει η f^{-1} και είναι συνεχής και γνήσια μονότονη στο f(A).
(Με το ίδιο είδος μονοτονίας).

4.24. Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης.

Πρόταση 1. Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχουν $\kappa,\lambda \in [\alpha,\beta]$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να ισχύει: $f(\kappa) \leq f(x) \leq f(\lambda)$.

Σημείωση: Η εικόνα κλειστού διαστήματος με συνεχή συνάρτηση είναι κλειστό διάστημα.

Πρόταση 2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε είναι φραγμένη σ'αυτό.

Λ Υ Μ Ε Ν Ε Σ   Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4x+5$. Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο σημείο $\xi = 2$.

Λύση: 1ος τρόπος. Με την μέθοδο "ε,δ".

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$: $\forall\ x\in\mathcal{D}(f)$ με $|x-2|<\delta$ να ισχύει: $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$ δηλ. $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$: $\forall\ x\in\mathcal{D}(f)$ με $|x-2|<\delta \rightarrow$
$\rightarrow |f(x)-13|<\varepsilon$ γιατί $f(2)=13$. Πρέπει επομένως να προσδιορίσουμε ένα κατάλληλο δ όταν το ε είναι ένας δοσμένος θετικός αριθμός αυθαίρετος για τον οποίο να ισχύει $|f(x)-13|<\varepsilon$ με την προϋπόθεση ότι ισχύει $|x-2|<\delta$.
Έχουμε $|f(x)-13|<\varepsilon \leftrightarrow |4x+5-13|<\delta \leftrightarrow |4x-8|<\varepsilon \leftrightarrow 4|x-2|<\varepsilon \leftrightarrow$
$\leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$. Αν επομένως εκλέξουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$ τότε θα έχουμε ότι $\forall\ \varepsilon>0$
$\exists\delta=\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}$: $\forall\ x\in\mathcal{D}(f)$ με $|x-2|<\delta=\frac{\varepsilon}{4} \rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{4} \leftrightarrow |4x-8|<\varepsilon$
$\leftrightarrow |4x+5-13|<\varepsilon \leftrightarrow |f(x)-f(2)|<\varepsilon$.
Δηλαδή η f είναι συνεχής στο σημείο $\xi=2$.

2ος τρόπος. Με την μέθοδο του ορίου.
Επειδή το σημείο $\xi=2$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ έχει νόημα το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(4x+5)=4\lim\limits_{x\to 2}x+5=4.2+5=13$.
Επειδή δε το $\xi\in\mathcal{D}(f)$ ορίζεται η f στο 2 και είναι $f(2)=13$. Άρα είναι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=13$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο 2.

2. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+2x+3$. Εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $\xi=1$.

Λύση: 1ος τρόπος: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$ και το 1 είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$.
Μέθοδος Cauchy
Αρκεί να δείξουμε ότι: $\forall\ \varepsilon>0, \exists\delta>0$: $\forall\ x\in\mathcal{D}(f)$ με $|x-1|<\delta \rightarrow$
$|f(x)-f(1)|<\varepsilon$. Επομένως αρκεί να προσδιορίσουμε ένα κατάλληλο $\delta>0$ έτσι ώστε με δοσμένο $\varepsilon>0$ αυθαίρετο και $x\in\mathcal{D}(f)$ να ισχύει $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$ με την υπόθεση ότι $|x-1|<\delta$.
Η σχέση $|f(x)-f(1)|<\varepsilon \leftrightarrow |x^2+2x+3-1^2-2.1-3|<\varepsilon \leftrightarrow$
$\leftrightarrow |(x-1)(x+1)+2(x-1)|<\varepsilon \leftrightarrow |x-1||x+3|<\varepsilon$ (1).
Θέλουμε τώρα στον παράγοντα $|x+3|$ να δώσουμε την μορφή $|x+3|<\theta$ όπου $\theta>0$ με την υπόθεση ότι το $x\neq 1$, δηλ. με την υπόθεση ότι το x βρίσκεται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,1)\cup[1,+\beta)$.
Αλλά τότε πρέπει $|x+3|<\theta \leftrightarrow -\theta<x+3<\theta \leftrightarrow -3-\theta<x<-3+\theta$ και για να είναι το x σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,1)\cup[1,\beta)$ αρκεί να πάρουμε σαν θ ένα οποιοδήποτε αριθμός ≥ 4 οπότε με $\theta=4$ έχουμε $-7<x<1 \leftrightarrow -7+3<x+3<$
$<4 \leftrightarrow -4<x+3<4 \leftrightarrow |x+3|<4$ και η (1) γίνεται:

$|x-1||x+3| < |x-1|4 < \varepsilon \rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Αν επομένως διαλέξουμε $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$, τότε θα έχουμε ότι $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$:

$\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $|x-1| < \delta \rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \leftrightarrow 4|x-1| < \varepsilon \leftrightarrow |x-1||x+3| < \varepsilon$

$\leftrightarrow |f(x)-f(1)| < \varepsilon$. Επομένως η f είναι συνεχής στη θέση x = 1.

2ος τρόπος. Με την μέθοδο του ορίου.

Επειδή το 1 είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$, έχει έννοια το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

οπότε αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2+2\lim\limits_{x\to 1} x+3 = (\lim\limits_{x\to 1} x)^2+2\lim\limits_{x\to 1} x+3 = 1^2+2.1+3 = f(1) = 6.$

Άρα η f είναι συνεχής στη θέση x = 1.

3. Έστω η συνάρτηση f με f(x) = c (c= σταθ. στο $\mathbb{R}$). Δείξετε ότι είναι συνεχής.

Λύση: Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Έστω $x = \xi \in \mathbb{R}$ τυχαίο σημείο του $\mathcal{D}(f)$, τότε επειδή $\forall\ x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = c$, θα είναι και $f(\xi) = c$. Τότε όμως $\forall\ \varepsilon > 0$ θα ισχύει: $|f(x)-f(\xi)| = |c-c| = 0 < \varepsilon\ \forall\ x, \forall\ \xi \in \mathbb{R}$.

Εάν τώρα δ τυχαίος θετικός αριθμός, τότε $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $|x-\xi| < \delta$ θα ισχύει $|f(x)-f(\xi)| = |c-c| = 0 < \varepsilon$ και η f είναι συνεχής στο $\mathcal{D}(f)$.

Ώστε η σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

4. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = x^2$ είναι συνεχής.

Λύση: 1ος τρόπος. Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Έστω $x = \xi \in \mathbb{R}$ τυχαίο σημείο του $\mathcal{D}(f)$ (προφανώς σημείο συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$).

Για να δείξουμε, ότι η f είναι συνεχής στο $\xi \in \mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε $\forall\ x \in \mathcal{D}(f)$ με $|x-\xi| < \delta$ να ισχύει: $|f(x)-f(\xi)| < \varepsilon$. Έχοντας τώρα υπ'όψη και τα σχετικά περί συγκλίσεως κατά Cauchy εργαζόμαστε ως εξής:

Επειδή $|f(x)-f(\xi)| = |x^2-\xi^2| = |x+\xi||x-\xi| = |(x-\xi)+2\xi||x-\xi| \leq$ $\leq |x-\xi|(|x-\xi|+2|\xi|)$ θα έχουμε: $|f(x)-f(\xi)| < \delta_1(\delta_1+2|\xi|)$, αν υποθέσουμε ότι: $|x-\xi| < \delta_1$ και με $0 < \delta_1 \leq 1$.

Επειδή θέλουμε να είναι: $|f(x)-f(\xi)| < \varepsilon$, εάν πάρουμε $0 < \delta_2 \leq \frac{\varepsilon}{1+2|\xi|}$ τότε

αφού $0 < \delta_1 \leq 1$, με $\delta \leq \min(1, \frac{\varepsilon}{1+2|\xi|})$, δηλαδή με $\delta = \frac{\varepsilon}{1+2|\xi|+\varepsilon}$, $\forall\ \varepsilon > 0$

θα έχουμε: με $|x-\xi| < \delta$, ότι: $|f(x)-f(\xi)| \leq |x-\xi|(|x-\xi|+2|\xi|) < \delta(\delta+2|\xi|) \leq$

$\le \delta(1+2|\xi|) < \frac{\varepsilon}{1+2|\xi|+\varepsilon}(1+2|\xi|) < \varepsilon$ αφού $\frac{1+2|\xi|}{1+2|\xi|+\varepsilon} < 1$ και επομένως η f, με $f(x) = x^2$, είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος. Με την μέθοδο του ορίου.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $\xi \in \mathfrak{D}(f) = \mathbb{R}$ τότε επειδή το ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathfrak{D}(f)$ έχει νόημα το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} x^2 = \xi^2 = f(\xi)$. Άρα η f είναι συνεχής στο ξ και επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο του $\mathfrak{D}(f)$ η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathfrak{D}(f)$.

5. Δείξετε ότι η f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$.

Λύση: Προφανώς $\mathfrak{D}(f) = \mathbb{R}_0^+$. Έστω τυχαίο σημείο $x = \xi \in \mathfrak{D}(f)$. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x = \xi > 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $|f(x)-f(\xi)| = |\sqrt{x}-\sqrt{\xi}| < \varepsilon$ $\forall\, x \in \mathfrak{D}(f)$ με $|x-\xi| < \delta$.

Επειδή $|f(x)-f(\xi)| = \frac{|x-\xi|}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}} \le \frac{|x-\xi|}{\sqrt{\xi}}$, αρκεί να δειχτεί ότι $\frac{|x-\xi|}{\sqrt{\xi}} < \varepsilon$ $\forall\, x \in \mathfrak{D}(f)$ με $|x-\xi| < \delta$. Εάν επομένως λάβουμε ως $\delta = \varepsilon\sqrt{\xi} > 0$ θα έχουμε:

$|f(x)-f(\xi)| < \frac{|x-\xi|}{\sqrt{\xi}} < \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} = \frac{\varepsilon\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} = \varepsilon$ $\forall\, x \in \mathfrak{D}(f)$ με $|x-\xi| < \delta = \varepsilon\sqrt{\xi}$, $\forall \varepsilon > 0$. Εάν $\xi = 0$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι: $|f(x)-f(\xi)| = |\sqrt{x}-0| < \varepsilon$ $\forall\, x \in \mathfrak{D}(f)$ με $|x-0| < \delta$. Εάν λοιπόν πάρουμε $\delta = \varepsilon^2 > 0$, τότε προφανώς $\forall\, x \in \mathfrak{D}(f)$ με $0 < x < \varepsilon^2 = \delta \leftrightarrow |x-0| < \delta$, θα έχουμε και $\sqrt{x} < \varepsilon \leftrightarrow |x-0| < \varepsilon$ και επομένως η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathfrak{D}(f) = \mathbb{R}_0^+$.

6. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$

Εξετάσετε αν είναι συνεχής στο σημείο $\xi = 1$.

Λύση: 1ος τρόπος. Μέθοδος "ε,δ".

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: \forall\, x \in \mathbb{R}-\{2\}$ με $|x-1| < \delta \to$ $\to |f(x)-f(1)| < \varepsilon$. Δηλαδή πρέπει να προσδιορίσουμε ένα κατάλληλο δ τέτοιο ώστε με $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο και $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ να ισχύει $|f(x)-f(1)| < \varepsilon$ με την υπόθεση ότι ισχύει $|x-1| < \delta$.

Από την σχέση $|f(x)-f(1)| < \varepsilon \to \left|\frac{3x+2}{x-2}+5\right| < \varepsilon \to \left|\frac{3x+2+5x-10}{x-2}\right| < \varepsilon \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \left|\frac{8x-8}{x-2}\right| < \varepsilon \leftrightarrow 8\left|\frac{x-1}{x-2}\right| < \varepsilon$ (1).

Επειδή δε το $x \to 1$ πρέπει το x να βρίσκεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,1) \cup [1,\beta)$ δηλαδή $-\delta < x-1 < \delta \leftrightarrow 1-\delta < x < 1+\delta$ και αν διαλέξουμε το $\delta = 1$ τότε θα έχουμε:

$|x-1|<\delta \Rightarrow |x-1|<1 \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow -2<x-2<0 \Rightarrow |x-2|>2 \Rightarrow \frac{1}{|x-2|}<\frac{1}{2}$ (2)

οπότε από την (1) και (2) παίρνουμε: $8|\frac{x-1}{x-2}|<8\frac{|x-1|}{2}=4|x-1|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$. Επομένως αν εκλέξουμε $\delta=\min(1,\frac{\varepsilon}{4})$ τότε:

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0: \forall x\in \mathbb{R}-\{2\}$ με $|x-1|<\delta \Rightarrow |x-2|>2 \wedge |x-1|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$

$(\frac{1}{|x-2|}<\frac{1}{2} \wedge |x-1|<\frac{\varepsilon}{4}) \Rightarrow \frac{|x-1|}{|x-2|}<\frac{\varepsilon}{8} \Leftrightarrow 8\frac{|x-1|}{|x-2|}<\varepsilon \Leftrightarrow |\frac{8x-8}{x-2}|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\frac{3x+2+5x-10}{x-2}|<\varepsilon \Leftrightarrow |\frac{3x+2}{x-2}+5|<\varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-f(1)|<\varepsilon.$

Άρα η f είναι συνεχής στη θέση $x=1$.

2ος τρόπος. Με την μέθοδο του ορίου.

Επειδή το 1 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ έχει έννοια το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και με βάσει τις ιδιότητες των ορίων είναι:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}=-5$$

Η f είναι ορισμένη με $x=1$ και έχει τιμή $f(1)=-5$. Οπότε είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=-5$ και η f είναι συνεχής στο 1.

7. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & \text{με } x\in\mathbb{R}-\{0\}\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

β) Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f είναι μονότονη στο $\mathbb{R}$ και ορίσετε την αντίστροφη της f^{-1}.

Λύση: α. Παρατηρούμε,ότι: $f(x)=-\sqrt{-x}$ αν $x<0$ και $f(x)=\sqrt{x}$ αν $x>0$, ενώ $f(0)=0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Σημειώνουμε ότι η f είναι περιττή.

β. Είναι αμέσως φανερό, ότι η f είναι παντού ορισμένη επί του $\mathbb{R}$ και συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$, αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$.

γ. Η f είναι γνήσια αύξουσα επί του $[0,+\infty)$ γιατί αν $0\le x_1<x_2$, τότε και $f(x_1)=\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}=f(x_2)$ και επειδή είναι και περιττή, θα είναι και γνήσια αύξουσα και επί του $(-\infty,0]$. Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα επί του $\mathbb{R}$, δηλαδή γνήσια μονότονη επί του $\mathbb{R}$.

Μετά από αυτό υπάρχει η αντίστροφη της f^{-1} και είναι επίσης γνήσια μονότονη επί του $\mathbb{R}$.

Εάν $y \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{-x} = y \Leftrightarrow x = -y^2 & \text{αν } y \le 0 \\ \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 & \text{αν } y \ge 0 \end{cases}$

και επομένως και στις δύο περιπτώσεις ισχύει:

$f(x) = y \Leftrightarrow x = y|y| = f^{-1}(y)$.

Με αλλαγή των μεταβλητών έχουμε, ότι η αντίστροφη της f είναι η f^{-1} με τύπο $f^{-1}(x) = x|x|$.

8. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{αν } x \le 1 \\ 7-\lambda^2 x+\lambda x^2 & \text{αν } x > 1, \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Να οριστεί ο λ ώστε να είναι συνεχής στο σημείο x = 1.

Λύση: Έχουμε: $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0}(2x+3) = 5$ και $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0}(7-\lambda^2 x+\lambda x^2) =$

$= 7-\lambda^2+\lambda$. Θα πρέπει: $5 = 7-\lambda^2+\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2 = 0$, από την οποία: $\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$. Για $\lambda = -1$ θα είναι:

$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{αν } x \le 1 \\ 7-x-x^2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Για $\lambda = 2$ θα είναι:

$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{αν } x \le 1 \\ 7-4x+2x^2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Δώστε πρόχειρη γραφική παράσταση.

9. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \ge 0 \\ x+\beta, & x < 0 \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα α,β έτσι ώστε να είναι συνεχής στο R.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f) = (-\infty,0) \cup [0,+\infty) = \mathbb{R}$. Εύκολα βλέπουμε ότι είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $[0,+\infty)$ Μένει επομένως να δούμε τι γίνεται στο σημείο $x = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(ax+1) = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(x+\beta) = -\beta$.

Ακόμη η f είναι ορισμένη στη θέση $x = 0$ από τον τύπο $f(x) = ax+1$ και είναι $f(0) = 1$.

Επειδή θέλουμε η f να είναι συνεχής στο R πρέπει $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ $= f(0)$ δηλαδή: $\beta = 1$ και α οτιδήποτε.

10. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x+2}$

Λύση: Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{-2\}$ και επειδή στον τύπο της f υπάρχουν απόλυτα την γράφουμε με πολλαπλό τύπο διακρίνοντας τις περιπτώσεις:

α) $x \geq 2 \vee x < -2 \Rightarrow f(x) = \frac{(x^2-4)}{x+2} = x-2$ γιατί $x^2-4 \geq 0$

β) $-2 < x \leq 2 \Rightarrow f(x) = \frac{-(x^2-4)}{x+2} = -(x-2)$ γιατί $x^2-4 \leq 0$

Επομένως η f έχει τον τύπο $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \vee x < -2 \\ -x+2, & -2 < x \leq 2 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-2,2]$ γιατί αν θεωρήσουμε τυχαίο $\xi \in (-2,2]$ τότε $f(\xi) = \xi-2$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \xi-2$ οπότε $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi) = \xi-2$.

Όμοια είναι συνεχής και στα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $[2,+\infty)$ γιατί αν θεωρήσουμε τυχαίο $\xi \in (-\infty,-2)$ αντίστοιχα $\xi \in [2,+\infty)$ είναι $f(\xi) = \xi-2$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \xi-2$.

Μένει επομένως να μελετήσουμε τη συνέχεια της f στα σημεία $x = -2$, $x = 2$. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(-x+2) = 0$ και $f(2) = 2-2 = 0$.

Επομένως η f είναι συνεχής και στο σημείο $x = 2$. Επίσης είναι: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(x-2) = -4$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}(-x+2) = 4$ και η f δεν ορίζεται στη θέση $x = -2$. Επομένως η f είναι ασυνεχής στη θέση $x = -2$.

11. Η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει προφανώς στη θέση $\xi = 0$ απλή ασυνέχεια.

Λύση: Γιατί $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 2 \neq f(0)$. Αυτή αίρεται αν πάρουμε $f(0) = 2$.

12. Η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει στο σημείο $\xi = 0$ απλή ασυνέχεια.

Λύση: Γιατί $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$ και είναι $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ ενώ $f(0) = 0$. Η απλή αυτή ασυνέχεια δεν αίρεται, αλλά στην θέση $\xi = 0$ παρουσιάζει άπειρο πήδημα. $\text{Πηδ}(0) = |+\infty-(-\infty)| = +\infty$.

13. Η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει στη θέση $\xi = 0$ απλή ασυνέχεια.

Λύση: Γιατί $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, ενώ $f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Επομένως στη θέση $\xi = 0$ απειρίζεται θετικά.

14. Η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & x \neq 2,-2 \\ 1 & \text{αν } x = 2 \text{ ή } x = -2. \end{cases}$

παρουσιάζει στην θέση ξ = 2 απλή ασυνέχεια.

Λύση: Γιατί $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \frac{1}{4} = \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$, ενώ $f(2) = 1$. Επομένως αν πάρουμε $f(2) = \frac{1}{4}$ η ασυνέχεια αίρεται. Στην θέση ξ = -2 παρουσιάζει απλή ασυνέχεια, γιατί $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = +\infty$ και είναι $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2+0} f(x)$ οπότε αυτή η ασυνέχεια δεν αίρεται, αλλά είναι απείρου πηδήματος.

15. Η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x \in (0,1] \\ x+4 & \text{αν } x \in (1,4) \end{cases}$ παρουσιάζει στην θέση ξ = 1 απλή ασυνέχεια.

Λύση: Γιατί $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 2+1 = 3 = f(1)$ (συνεχής από αριστερά) ενώ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 5 \neq f(1)$. Είναι συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, οπότε η ασυνέχεια δεν αίρεται, αλλά είναι πηδήματος πηδ(1) = |5-3| = 2.

16. Η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} ημ\,\frac{1}{x} & \text{αν } x > 0 \\ x & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ουσιώδη ασυνέχεια στη θέση ξ = 0.

Λύση: Γιατί, όπως ξέρουμε, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, ενώ υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ και είναι $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} x = 0 = f(0)$.

17. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} συνx, & x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}, & x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Λύση: Η f στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{4}]$ είναι συνεχής γιατί το συν είναι συνεχής σε όλο το ℝ άρα και στο $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Επίσης η f είναι συνεχής και στο διάστημα $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Μένει επομένως να εξετάσουμε την συνέχεια της f στην θέση $ξ = \frac{\pi}{4}$. Επειδή δε το σημείο $ξ = \frac{\pi}{4}$ είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f) = [0, \frac{\pi}{2}]$ και είναι σημείο ένωσης στο οποίο η f αλλάζει τύπο θα βρούμε τα πλευρικά όρια στο ξ.

Είναι: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+}(x^2 - \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = f(\frac{\pi}{4})$

και $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} συνx = συν\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} x = συν\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 'Αρα είναι

και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Επομένως η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} λ\text{συν}x+λ\text{ημ}x, & 0 \le x < \frac{\pi}{4} \\ (2λ+1)\text{εφ}x, & \frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η f να είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$

Λύση: Πεδίο ορισμού της f είναι $\mathcal{D}(f) = [0, \frac{\pi}{4}) \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = [0, \frac{\pi}{2})$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{4})$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων επίσης είναι συνεχής στο διάστημα $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Μένει επομένως να δούμε ως προς τη συνέχεια την f στην θέση $x = \frac{\pi}{4}$ που αλλάζει τύπο.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(2λ+1)\text{εφ}x = (2λ+1)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\text{εφ}x = 2λ+1$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(λ\text{συν}x+λ\text{ημ}x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + λ\frac{\sqrt{2}}{2} = λ\sqrt{2}$.

Ακόμη η f είναι ορισμένη στη θέση $x = \frac{\pi}{4}$ και είναι $f(\frac{\pi}{4}) = (2λ+1)$.

Επομένως για να είναι συνεχής η f στο $[0, \frac{\pi}{2})$ πρέπει:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{4})$. Δηλαδή $λ\sqrt{2} = (2λ+1) \Longleftrightarrow λ(2-\sqrt{2}) = -1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow λ = \frac{1}{\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}+2}{-2} = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

19. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\text{συν}x^4}}{2\text{ημ}^2\frac{x}{2}}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \\ λ, & x = 0 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο $λ \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο 0.

Λύση: Το 0 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f) = [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0) \cup (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}] \cup \{0\}$, και επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0) \cup (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\text{συν}x^4}}{2\text{ημ}^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\text{ημ}^2\frac{x^4}{2}}}{2\text{ημ}^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\left|\text{ημ}\frac{x^4}{2}\right|}{2\text{ημ}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu \frac{x^4}{2}}{\eta\mu^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu \frac{x^4}{2} \cdot \frac{x^4}{2}}{\frac{x^4}{2} \left(\eta\mu^2 \frac{x}{2} : (\frac{x}{2})^2\right) \frac{x^4}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 = \sqrt{2}$$

Αλλά είναι και $f(0) = \lambda$.
Επομένως για να είναι η f συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της πρέπει $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \longleftrightarrow \sqrt{2} = \lambda$.

20. Θεωρούμε την συνάρτηση f με f(0) = 0 και η οποία είναι συνεχής στην θέση x = 0.
Εάν για την συνάρτηση f_1 ισχύει $|f_1(x)| \leq |f(x)|$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$, δείξετε ότι η f_1 είναι συνεχής στην θέση x = 0.

Λύση: Αφού $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f_1(x)| \leq |f(x)|$ θα ισχύει και για x = 0 και επομένως: $|f_1(0)| \leq |f(0)| = 0 \rightarrow f_1(0) = 0$.
Επειδή όμως η f είναι συνεχής στην θέση x = 0, έπεται ότι $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε: $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$: $|x - 0| < \delta$, δηλαδή ισχύει: $|f(x)| < \varepsilon$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$: $|x| < \delta$. Επειδή όμως και $f_1(0) = 0$ και $|f_1(x)| \leq |f(x)| < \varepsilon$ θα έχουμε ότι ισχύει: $|f_1(x) - f_1(0)| < \varepsilon$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta$ και συνεπώς η f_1 είναι συνεχής στην θέση x = 0.

21. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $|f(x)| \leq |x|$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$. Να δειχτεί ότι η f είναι συνεχής στην θέση x = 0.

Λύση: Αφού η f πληροί την συνθήκη $|f(x)| \leq |x|$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$, θα την πληροί και για x = 0 και επομένως $|f(0)| \leq |0| = 0 \rightarrow f(0) = 0$.
Έχουμε τώρα, ότι $\forall$ $x \in \mathbb{R}$: $|x| < \varepsilon$ με $\varepsilon > 0$ (τυχαίο) θα ισχύει $|f(x)| \leq |x| < \varepsilon$ αλλά f(0) = 0 και συνεπώς $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$: $|x - 0| < \varepsilon$. Ώστε $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$ έτσι ώστε $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta = \varepsilon$, να ισχύει $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στην θέση x = 0.

22. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} + x & \text{για } x \neq 0 \\ \alpha & \text{για } x = 0 \ (\alpha \in \mathbb{R}). \end{cases}$

Είναι αυτή συνεχής στο πεδίο ορισμού της;

Λύση: Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
α) Έστω $\xi \in \mathcal{D}(f)$ και $\xi \neq 0$. Επειδή στην περίπτωση αυτή ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{|x|}{x} + x$ και οι συναρτήσεις $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$ και

$f_3(x) = \frac{|x|}{x}$ είναι συνεχείς στο $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$ και η f θα είναι συνεχής σε αυτό, ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων f_3 και f_1.

β) Έστω τώρα $\xi = 0$. Θα εξετάσουμε τα πλευρικά όρια. Έχουμε:

β_1) $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{x}{x}+x\right) = \lim\limits_{x\to 0+0}(1+x) = 1$

β_2) $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0}\left(-\frac{x}{x}+x\right) = \lim\limits_{x\to 0-0}(-1+x) = -1$

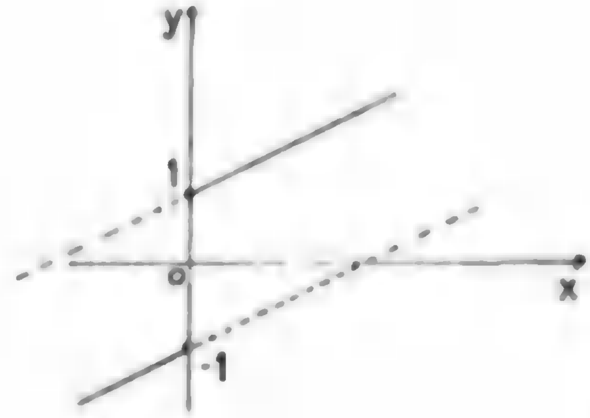
Επειδή $f(0) = \alpha$, αν $\alpha = 1$, τότε η f είναι συνεχής στο $\xi = 0$ από δεξιά, και ασυνεχής από αριστερά.

Αν $\alpha = -1$ είναι συνεχής από αριστερά στο μηδέν και ασυνεχής από δεξιά.

Αν $\alpha \neq \pm 1$, η f είναι ασυνεχής αμφίπλευρα.

Τελικά συμπεραίνουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο $\xi = 0$.

Όπως είναι φανερό έχουμε μη αιρομένη ασυνέχεια.



Η γραφική παράσταση αυτής με $\alpha = -1$.

23. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \lim \dfrac{\eta\mu x}{2^\nu \eta\mu \frac{x}{2^\nu}}, & x \neq 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο λ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Θα πρέπει να βρούμε τον τύπο της f χωρίς το lim.

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\eta\mu x}{2^\nu \eta\mu \frac{x}{2^\nu}} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} \cdot \dfrac{x}{2^\nu} \cdot \dfrac{1}{\eta\mu \frac{x}{2^\nu}} = \dfrac{\eta\mu x}{x} \lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\frac{x}{2^\nu}}{\eta\mu \frac{x}{2^\nu}} = \dfrac{\eta\mu x}{x}$

γιατί $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\frac{x}{2^\nu}}{\eta\mu \frac{x}{2^\nu}} = 1$ επειδή $\frac{x}{2^\nu} \to 0$.

Άρα η f γράφεται $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}-\{0\}$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή δε το 0 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ επίσης είναι $f(0) = \lambda$, και επειδή η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\Longleftrightarrow 1 = \lambda$.

24. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha+\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x>0 \\ \beta+2\sqrt{x^2+1}, & x\le 0 \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα α,β αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(-1) = 2$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ σαν άθροισμα και πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Όμοια είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Μένει επομένως να μελετήσουμε τη συνέχεια της f στο 0.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+\alpha+\dfrac{\eta\mu x}{x}) = \alpha+1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(\beta+2\sqrt{x^2+1}) = \beta+2$

Επίσης είναι $f(0) = \beta+2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Longleftrightarrow \beta+2 = \alpha+1$ (1).

Επειδή δε ισχύει και $f(-1) = 2$ έχουμε $\beta+2\sqrt{2} = 2$ (2).

Η (1), (2) αποτελούν σύστημα με άγνωστους τα α,β η λύση του οποίου δίνει $\beta = 2-2\sqrt{2}$, $\alpha = 3-2\sqrt{2}$.

25. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\pi-2x}+\lambda-x, & x<\dfrac{\pi}{2} \\ 5\lambda x-2, & x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο λ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\dfrac{\pi}{2})$ σαν άθροισμα και πηλίκο συνεχών συναρτήσεων επίσης είναι συνεχής στο $[\dfrac{\pi}{2},+\infty)$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Μένει επομένως η f να είναι συνεχής στο $\dfrac{\pi}{2}$.

Θέτουμε: $x-\dfrac{\pi}{2} = t \to t\to 0$ και $x = \dfrac{\pi}{2}+t$ και η f γίνεται:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+t)}{-2t}+\lambda-\dfrac{\pi}{2}-t, & t<0 \\ 5\lambda(\dfrac{\pi}{2}+t)-2, & t\ge 0 \end{cases}$$

Επομένως αρκεί η h να είναι συνεχής στο 0.

Είναι $\lim\limits_{t\to 0^-} h(t) = \lim\limits_{t\to 0^-}[\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+t)}{-2t}+\lambda-\dfrac{\pi}{2}-t] = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\eta\mu t}{t}+\lambda-\dfrac{\pi}{2}-\lim\limits_{t\to 0^-} t =$

$= \dfrac{1}{2}+\lambda-\dfrac{\pi}{2}$ και $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = \lim\limits_{t\to 0^+}[5\lambda(\dfrac{\pi}{2}+t)-2] = \dfrac{5\lambda\pi}{2}-2$. Επίσης είναι:

$h(0) = \frac{5\lambda\pi}{2} - 2$. Επειδή η h είναι συνεχής στο 0 δηλαδή η f συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$ ισχύει.

$\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} h(t) = h(0) \Longleftrightarrow \frac{5\lambda\pi}{2} - 2 = \frac{1}{2} + \lambda - \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \lambda(\frac{5\pi}{2} - 1) = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}$
$\Longleftrightarrow \lambda = \frac{5-\pi}{5\pi-2}$.

26. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και το 0 είναι σ.σ του $\mathcal{D}(f)$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Μένει επομένως να μελετήσουμε την f στο 0.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = -1$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο 0 γιατί δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

27. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι συναρτήσεις:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|(x-1)}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ 2. $h(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ x-2+\log x, & 1 < x \leq 2 \\ \log x, & x > 2 \end{cases}$

Λύση: 1. Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty) \cup \{0\} = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Μένει επομένως να μελετήσουμε τη συνέχεια της f στο 0.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x+1) = 1$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και επομένως η f δεν είναι συνεχής στο 0.

2. Η h είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,1]$, $(1,2]$, $(2,+\infty)$ γιατί οι συναρτήσεις $1-x$, $x-2+\log x$, $\log x$ είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα που ορίζονται. Μένει επομένως να μελετήσουμε τη συνέχεια στα σημεία 1 και 2

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-2+\log x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x) = 0$ και $h(1) = 0$

Επειδή δε είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = h(1)$ συμπεραίνουμε ότι η h δεν είναι συνεχής στο 1, είναι όμως αριστερά συνεχής στο 1.

Όμοια $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\log x = \log 2$, $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x-2+\log x) = \log 2$ και $h(2) = \log 2$ απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η h είναι συνεχής στο 2.

28. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1-x\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια.

Λύση: Η f είναι συνεχής $\forall\ x \in \mathbb{R}-\{0\}$ σαν άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Μένει επομένως να μελετήσουμε την συνέχεια της f στο 0. Είναι

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1-x\eta\mu\frac{1}{x}) = 1-\lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 1$ γιατί $\lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$

Πράγματι είναι: $|x\eta\mu\frac{1}{x}| \le |x| \to 0$. Επίσης είναι $f(0) = 1$.

Άρα ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Οπότε η f είναι συνεχής.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:

1. $f(x) = \eta\mu\frac{3x+2}{x^2+x+1}$
2. $f(x) = \eta\mu(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2+1})$
3. $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu(3x+2))$
4. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\eta\mu x}{x}}$
5. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x+\sqrt{x}+2^x)$
6. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu 5x)$
7. $f(x) = \eta\mu\sqrt{1-x^2}$

Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια.

Λύση: 1. Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\varphi(x) = \frac{3x+2}{x^2+x+1}$, $g(x) = \eta\mu x$, που είναι συνεχείς, η φ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και η g επειδή το ημx είναι συνεχής συνάρτηση. Επομένως και η f είναι συνεχής.

2. Η f μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\varphi(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2+1}$, $g(x) = \eta\mu x$ επομένως είναι συνεχής.

3. Η f μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση των συναρτήσεων $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu(3x+2)$ και $g(x) = \eta\mu x$ που είναι συνεχής.
Η δε $\varphi(x)$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = 3x+2$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ που είναι και αυτές συνεχείς. Άρα και η f είναι συνεχής.

4. Όμοια η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\varphi(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x}$ που είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}-\{0\}$. Επομένως και η f είναι συνεχής.

5. Είναι συνεχής σαν σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\varphi(x) = \eta\mu x+\sqrt{x}+2^x$ (άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

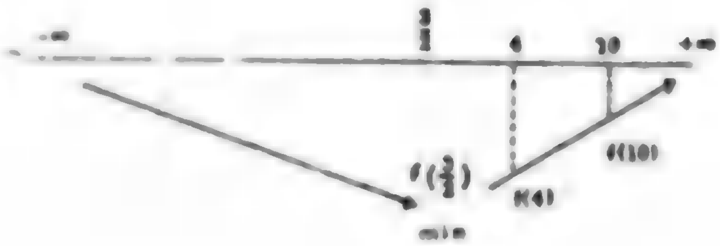
6. Όμοια είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ γιατί είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\varphi(x) = \eta\mu(5x)$ που είναι σύνθεση των $t(x) = 5x$, $h(x) = \eta\mu x$ και της

$g(x)$ = συνx που είναι συνεχείς συναρτήσεις. Άρα και η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

7. Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ σαν σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x)$ = ημx.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f: [4,10) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2-3x+2$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι ↓ στο διάστημα $(-\infty, \frac{3}{2}]$ και ↑ στο $[\frac{3}{2}, +\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ θα είναι και στο $[4,10) \in \mathbb{R}$. Επομένως



το διάστημα $[4,10)$ θα απεικονίζεται στο διάστημα $[f(4),f(10)) = [6,72)$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $\mathcal{R}(f) = [6,72)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 1-\sqrt{|x|}-ημ^2x$.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Λύση: **1ος τρόπος.** Η f γράφεται $f(x) = συν^2x-\sqrt{|x|}$ και είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Ακόμη αν $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \xrightarrow{συν\downarrow}$

$συν0 \ge συνx \ge συν\frac{\pi}{2} \leftrightarrow 1 \ge συνx \ge 0 \to 1 \ge συν^2x \ge 0$ (1).

Επίσης αν $0 \ge x \le \frac{\pi}{2} \to 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2} \to 0 \le |x| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \leftrightarrow 0 \ge -\sqrt{|x|} \ge -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (2)

Οι (1) και (2) με πρόσθεση δίνουν: $1 \ge συν^2x-\sqrt{|x|} \ge -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \to 1 \ge y \ge -\frac{\pi}{2}$

Επομένως $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \to y \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1]$ άρα $\mathcal{R}(f) = [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1]$.

2ος τρόπος. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ τότε $f([0, \frac{\pi}{2}]) = \mathcal{R}(f)$

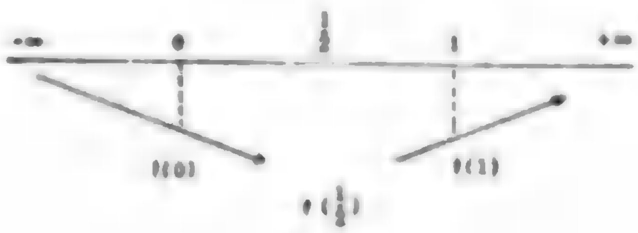
Άρα $\mathcal{R}(f) = [f(\frac{\pi}{2}), f(0)] = [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1]$.

32. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2-x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 4x-3, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Λύση: Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0,1]$, $(1,+3]$ μένει να μελετήσουμε την συνέχεια της f στη θέση $x = 1$.
Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-x+1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(4x-3) = 1$ και $f(1) = 1$.

'Αρα η f είναι συνεχής στο $[0,3]$. Ο πίνακας μεταβολών της $f(x) = x^2-x+1$ είναι, και $f(0) = f(1) = 1$ ακόμη είναι $\min f = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$



'Αρα $\mathscr{R}_1(f) = [\frac{3}{4}, 1]$.
Επίσης η $f(x) = 4x-3$ είναι ↑ στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(1,3]$ $\mathscr{R}_2(f) =$
$= (f(1), f(3)] = (1,9]$.
Επομένως $\mathscr{R}(f) = \mathscr{R}_1(f) \cup \mathscr{R}_2(f) = [\frac{3}{4}, 9]$.

33. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ημ\frac{x}{2} - |συνx|$. **Να βρεθούν τα ακρότατα της f όταν** $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Λύση: Η f είναι συνεχής σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επειδή δε με
$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \to 0 \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{4} \xrightarrow{ημ\uparrow} ημ0 \le ημ\frac{x}{2} \le ημ\frac{\pi}{4} \to 0 \le ημ\frac{x}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

και $0 \ge -|συνx| \ge -1 \ \forall \ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (2).

Με πρόσθεση των (1) και (2) παίρνουμε: $-1 \le ημ\frac{x}{2} - |συνx| \le \frac{\sqrt{2}}{2} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow -1 \le f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} \to \mathscr{R}(f) = [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Επομένως $\max f = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\min f = -1$.

Ακόμη θα μπορούσαμε να πούμε ότι η f είναι ↑ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ επομένως $\max f = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\min f = f(0) = -1$.

34. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^4+5x^3-x^2+x-1 = 0$ **έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο διάστημα** $(0,1)$.

Λύση: Θέτουμε $f(x) = x^4+5x^3-x^2+x-1$ τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα και στο $(0,1)$.
Επειδή δε $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 5 > 0$ δηλαδή $f(0)f(1) < 0$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει ο (Bolzano) και επομένως υπάρχει ένας τουλάχιστο πραγματικός αριθμός $\xi \in (0,1)$: $f(\xi) = 0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο $(0,1)$.

35. Εάν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$, τότε η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^8+1}{x-\beta} = 0$ έχει μια τουλάχιστο λύση μεταξύ α και β.

Λύση: Θεωρούμε το πολυώνυμο το οποίο προκύπτει μετά την απαλειφή των παρανομαστών, δηλαδή το $f(x) = (x-\beta)(x^2+1)+(x-\alpha)(x^6+1)$. Προφανώς το $f(x)$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Είναι όμως $f(\alpha) = (\alpha-\beta)(\alpha^2+1) < 0$ και $f(\beta) = (\beta-\alpha)(\beta^8+1) > 0$, άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha < x < \beta$ έτσι ώστε $f(x) = 0$.
Επομένως η εξίσωση έχει μια τουλάχιστο πραγματική λύση μεταξύ α και β.

36. Δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+20x+2 = 0$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Λύση: Αν θέσουμε $f(x) = x^3+20x+2$ τότε η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα και το $(-1,1)$ επειδή δε $f(-1)f(1) = -19.23 < 0$ υπάρχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $(-1,1)$.
Για να δείξουμε ότι είναι μια μόνο θα πρέπει να δείξουμε ότι η f είναι γνήσια μονότονη στο $(-1,1)$.

$$\text{Είναι } \lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{x_1^3+20x_1+2-x_2^3-20x_2-2}{x_1-x_2} =$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+20(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = x_1^2+x_1x_2+x_2^2+20 =$$

$$= x_1^2+2\,\frac{1}{2}\,x_1x_2+\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}+\frac{4x_2^2}{4}+20 = \left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}+20 > 0.$$

Επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα και στο $(-1,1) \in \mathbb{R}$.
Συνεπώς η $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(-1,1)$.

37. Αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = (\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)+2\kappa\lambda\mu-\kappa^2(\alpha-x)-\lambda^2(\beta-x)-\mu^2(\gamma-x) = 0$ ($\alpha,\beta,\gamma,\kappa,\lambda,\mu \in \mathbb{R}$) έχει τρείς ρίζες πραγματικές.

Λύση: α) Εάν κ,λ,μ είναι όλοι μηδενικοί, τότε προφανώς η εξίσωση έχει σαν ρίζες τους α,β,γ.

β) Εάν $\kappa \neq 0$ και $\lambda = \mu = 0$, τότε η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:
$(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)-\kappa^2(\alpha-x) = 0 \leftrightarrow (\alpha-x)\left[(\beta-x)(\gamma-x)-\kappa^2\right] = 0$.
Το τριώνυμο $\varphi(x) = (\beta-x)(\gamma-x)-\kappa^2$ επειδή $\varphi(\beta) = -\kappa^2$ και ο πρώτος συντελεστής θετικός, έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, έστω τις ξ_1,ξ_2 και είναι $\xi_1 < \beta < \xi_2$.
Άρα και πάλι η $f(x) = 0$ έχει τρείς πραγματικές και άνισες ρίζες.

γ) Εάν $\kappa\lambda\mu \neq 0$ και γράψουμε το $f(x)$ ως εξής: $f(x) = (\alpha-x)\left[(\beta-x)(\gamma-x)-\kappa^2\right]-$
$-\left[(\beta-x)\lambda^2-2\kappa\lambda\mu+(\gamma-x)\mu^2\right] = (\alpha-x)\varphi(x)-\left[(\beta-x)\lambda^2-2\kappa\lambda\mu+(\gamma-x)\mu^2\right]$ θα έχουμε:
$(\beta-x)f(x) = (\alpha-x)(\beta-x)\varphi(x)-\left[(\beta-x)^2\lambda^2-2\kappa\lambda\mu(\beta-x)+(\beta-x)(\gamma-x)\mu^2\right] =$
$= (\alpha-x)(\beta-x)\varphi(x)-\left[((\beta-x)\lambda-\kappa\mu)^2+\mu^2\varphi(x)\right]$.
Παρατηρούμε τώρα ότι: $(\beta-\xi_1)f(\xi_1) = -\left[(\beta-\xi_1)\lambda-\kappa\mu^2\right]$ και $(\beta-\xi_2)f(\xi_2) =$
$= -\left[(\beta-\xi_2)\lambda-\kappa\mu^2\right]$.
Αν $f(\xi_1) \neq 0$ και $f(\xi_2) \neq 0$, τότε από τον πίνακα των προσήμων:

x	$-\infty$		ξ_1		ξ_2		$+\infty$
$f(x)$		+		-		+	-

παίρνουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει τρείς ρίζες μια μικρότερη του ξ_1, μια μεταξύ ξ_1 και ξ_2 και μια μεγαλύτερη του ξ_2.
Εάν $f(\xi_1) = 0$ και $f(\xi_2) \neq 0$, τότε μια ρίζα είναι η ξ_1, και η άλλη μεγαλύτερη της ξ_2 και επομένως και πάλι τρείς ρίζες πραγματικές αφού είναι τριτοβάθμια.
Όμοια αν $f(\xi_1) \neq 0$ και $f(\xi_2) = 0$ ή και αν $f(\xi_1) = 0$ και $f(\xi_2) = 0$.

38. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[0,1]$ και $g(0) = f(1), g(1) = f(0)$.
Δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)-g(x)$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Γι' αυτήν ισχύουν:
$\varphi(0) = f(0)-g(0)$ και $\varphi(1) = f(1)-g(1) \Rightarrow \varphi(0)\varphi(1) = (f(0)-g(0))(f(1)-$
$-g(1)) = -(f(0)-f(1))(f(1)-f(0)) = -(f(0)-f(1))^2 < 0$.
Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0,1)$: $\varphi(\xi) = 0$ που σημαίνει ότι $f(\xi)-g(\xi) = 0 \leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$.

39. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Αποδείξετε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ έτσι ώστε $\varepsilon\varphi x = \frac{\pi}{4}$.

Υπάρχει και άλλος αριθμός $x_1 \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ έτσι ώστε εφ$x_1 = \frac{\pi}{4}$;

Λύση: Η συνάρτηση f με f(x) = εφx είναι συνεχής στο διάστημα $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Επί πλέον εφ($\frac{-\pi}{4}$) = -1 και εφ $\frac{\pi}{4}$ = 1 και είναι $-1 < \frac{\pi}{4} < 1$.

Αλλά τότε υπάρχει $x \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ έτσι ώστε εφx = $\frac{\pi}{4}$.

Η συνάρτηση όμως f(x) = εφx είναι ↑ στο $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ και επομένως υπάρχει ένας και μόνο ένας αριθμός του παραπάνω διαστήματος για τον οποίο εφx = $\frac{\pi}{4}$. Με βάση αυτό συμπεραίνουμε ακόμη ότι τα maxf και minf, για το εν λόγω διάστημα, είναι αντίστοιχα 1 και -1.

40. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $(x+1)2^{x+1} = 1$, έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο διάστημα (-1,0).

Λύση: Θέτουμε $f(x) = (x+1)2^{x+1}-1$ που είναι συνεχής στο (-1,0) και είναι $f(-1) = -1$, $f(0) = 1 \rightarrow f(-1)f(0) = -1 < 0$.
Επομένως με βάση την πρόταση Bolzano έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,0)$: $f(\xi) = 0 \rightarrow (\xi+1)2^{\xi+1} = 1$, που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστο ρίζα το (-1,0).

41. Έστω οι εξισώσεις $x^2+\kappa x+\lambda = 0$, $-x^2+\kappa x+\lambda = 0$, (1) $\lambda \neq 0$, με ρίζες τις α,β αντίστοιχα.

Δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{2}x^2+\kappa x+\lambda = 0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα μεταξύ των α,β.

Λύση: Θέτουμε $f(x) = \frac{x^2}{2}+\kappa x+\lambda$ οπότε η f είναι συνεχής στο (α,β), είναι δε $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}+\kappa\alpha+\lambda$ (1) και $f(\beta) = \frac{\beta^2}{2}+\kappa\beta+\lambda$ (2).

Επειδή όμως τα α,β είναι ρίζες των εξισώσεων (i) ισχύουν οι σχέσεις $\alpha^2+\kappa\alpha+\lambda = 0$, $-\beta^2+\kappa\beta+\lambda = 0$ από τις οποίες παίρνουμε: $\kappa\alpha+\lambda = -\alpha^2$, $\kappa\beta+\lambda = \beta^2$ και οι (1) και (2) γίνονται $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}-\alpha^2 = -\frac{\alpha^2}{2} < 0$

και $f(\beta) = \frac{\beta^2}{2}+b^2 = \frac{3\beta^2}{3} > 0$

Άρα $f(\alpha)f(\beta) < 0$ οπότε υπάρχει (πρόταση Bolzano) ένας τουλάχιστο πραγματικός αριθμός $\xi \in (\alpha,\beta)$: $f(\xi) = 0 \leftrightarrow \frac{\xi^2}{2}+\kappa\xi+\lambda = 0$. Δηλαδή μια τουλάχιστο

ρίζα της εξίσωσης $\frac{x^2}{2}+\kappa x+\lambda = 0$ βρίσκεται μεταξύ των α,β.

42. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $[0,2\alpha]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = f(2\alpha) \neq 0$.
Δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,\alpha)$: $f(\xi) = f(\xi+\alpha)$, $\alpha>0$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)-f(x+\alpha)$ που είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0,\alpha]\subset[0,2\alpha]$, γιατί και η $f(x+\alpha)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0,\alpha]$ επειδή με $0\le x\le\alpha \to 0<\alpha\le x+\alpha\le 2\alpha \Rightarrow (x+\alpha)\in(0,2\alpha]$.
Επειδή δε $\varphi(0) = f(0)-f(\alpha)$, $\varphi(\alpha) = f(\alpha)-f(2\alpha) = f(\alpha)-f(0)$, έχουμε $\varphi(0)\varphi(\alpha) = -(f(\alpha)-f(0))^2<0$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(0,\alpha)$: $\varphi(\xi) = 0 \leftrightarrow f(\xi)-f(\xi+\alpha) = 0 \leftrightarrow f(\xi+\alpha) = f(\xi)$.

43. Δείξετε ότι η εξίσωση $3^x+4^x+5^x = 6^x$ (1), έχει μοναδική πραγματική λύση στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Αν τα μέλη της (1) τα διαιρέσουμε με 6^x παίρνουμε την εξίσωση:
$\left(\frac{3}{6}\right)^x+\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x = 1$ και αν θέσουμε $f(x) = \left(\frac{3}{6}\right)^x+\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x-1$,
τότε η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
Επειδή $\lim_{x\to 0} f(x) = 2>0$ και $\lim_{+\infty} f(x) = -1<0$, τότε $f(0)f(+\infty)<0$.
Άρα ύπάρχει ένας τουλάχιστο πραγματικός $\xi\in(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=0$
Για να δείξουμε ότι είναι μοναδικός αρκεί να μελετήσουμε ως προς το μονότονο την f.
Επειδή οι συναρτήσεις $\left(\frac{3}{6}\right)^x$, $\left(\frac{4}{6}\right)^x$, $\left(\frac{5}{6}\right)^x$ είναι γνήσια φθίνουσες στο $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,+\infty)$
Επομένως ο πραγματικός αριθμός ξ είναι μοναδικός.

44. Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $[0,1]\to[0,1]$ που είναι συνεχής σ'αυτό. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ για το οποίο να ισχύει $f(\xi) = \xi$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)-x$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(0) = f(0)$, $g(1) = f(1)-1$,
Επειδή δε ισχύει $0\le f(0)\le 1$ και $0\le f(1)\le 1$ είναι $g(0)\ge 0$, $g(1)\le 0$.
Άρα $g(0)g(1)\le 0$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in[0,1]$:
$g(\xi) = 0 \leftrightarrow f(\xi)-\xi = 0 \leftrightarrow \xi = f(\xi)$.

45. Κάθε θετικός αριθμός έχει μια και μόνο μια θετική ν-οστή ρίζα ($\nu \in \mathbb{N}$)

Λύση: Εάν $\nu \in \mathbb{N}$: $\nu > 1$ και $\theta \in \mathbb{R}^*$, θα δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}^*$ έτσι ώστε $\xi^\nu = \theta$.

Θεωρούμε σύμφωνα με αυτό την συνάρτηση f με $f(x) = x^\nu - \theta$. Είναι $f(0) = -\theta < 0$. Έστω τώρα και τυχαίος θετικός αριθμός $\mu > \theta$ και $\mu > 1$. Τότε $f(\mu) = \mu^\nu - \theta$ και επειδή $\mu > 1$ θα είναι και $\mu^\nu > \mu$ (αφού $\nu > 1$) και προφανώς και $\mu^\nu - \theta > \mu - \theta > 0$ αφού $\mu > \theta$. Ώστε $f(\mu) > 0$. Τότε όμως θα έχουμε: $f(0) < 0 < f(\mu)$, οπότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}^*$ με $0 < \xi < \mu$, έτσι ώστε $f(\xi) = 0$.
Άρα υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα: $\xi^\nu = \theta$.
Θα δείξουμε τώρα το μονοσήμαντο. Αν δεχτούμε ότι και $\xi_1 \in \mathbb{R}^*$ και $\xi_1^\nu = \theta$ και $\xi \neq \xi_1$, θα έχουμε προφανώς $\xi^\nu \neq \xi_1^\nu$, που είναι άτοπο, αφού $\xi^\nu - \xi_1^\nu = 0 \Leftrightarrow \xi = \xi_1$ (εφ' όσον $\xi_1, \xi \in \mathbb{R}^*$).

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με την μέθοδο "ε,δ" να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στις αντίστοιχες θέσεις
   i) $f(x) = 3x^2+2x+1$ στη θέση $\xi = 1$
   ii) $\varphi(x) = \frac{3x^2+x}{x}$ στη θέση $\xi = 0$
   iii) $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ στη θέση $\xi = 1$
   iv) $h(x) = |x-1|+|2x+1|$ στη θέση $\xi = 1, -\frac{1}{2}$
   v) $t(x) = \max(x-2, 2x)$ στη θέση $\xi = -2$
   vi) $\theta(x) = x + \frac{1}{\eta\mu x}$ στη θέση $\xi = 0$

2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f είναι συνεχείς:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \quad \text{στη θέση } \xi = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \text{στη θέση } \xi = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1 \le x < 4 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x \ge 4 \end{cases} \quad \text{στη θέση } \xi = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases} \quad \text{στη θέση } \xi = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{στη θέση } \xi = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|-|x+1|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{στη θέση } \xi = 0$$

3. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι συναρτήσεις f με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \min(x+2, 3x-1) + \max(x, 2x)$$

$$f(x) = \max\{|x-2|, |3x+2|\}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \max\{\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x\}$. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

5. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+\lambda, & x \geq 0 \\ 3\sqrt{x^2+2}+\mu, & x < 0 \end{cases}$, $\lambda, \mu\ \mathbb{R}$.

Να προσδιοριστούν τα λ,μ ώστε η f να είναι συνεχής στη θέση $\xi = 0$ αν είναι γνωστό ότι $\lambda+\mu = 0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -2\eta\mu x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu x+\beta, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα α,β ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$.
Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+\lambda, & x \geq 0 \\ 2\sqrt{x^2+1}+\kappa, & x < 0 \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα πραγματικά κ,λ έτσι ώστε να είναι συνεχής στη θέση $x = 0$, και αν είναι γνωστό ότι $f(1)-2 = 0$.

9. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g και h με:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\le x\le 1 \\ 2x+1, & 0<x\le 2 \\ 3, & x=3 \\ (x-3)^2, & 5\le x<6 \end{cases} \qquad g(x)=\frac{|4x-1|}{4x-3}, \quad h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x}, & x>0 \\ \lambda, & x=0 \end{cases}$$

Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια.

10. Όμοια να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι συναρτήσεις:

1. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<2 \\ x^2-1, & x\ge 2 \end{cases}$ 2. $g(x)=\begin{cases} -x, & x\le 1 \\ \dfrac{3}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

11. Στις παρακάτω συναρτήσεις να οριστεί η παράμετρος για να είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ορισμού των

1. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 3 \\ 3-\lambda x, & x>3 \end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\ne 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \alpha\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & x\in[0,\frac{\pi}{4}] \\ \sigma\varphi x+\alpha\varepsilon\varphi x, & x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}) \end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ \dfrac{x^2+\lambda x-1}{x^2+1}, & x>1 \end{cases}$

12. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

1. $f(x)+f(y)=f(xy)\ \forall\ x, y\in\mathbb{R}$.
2. Η f είναι συνεχής στο 1.

Δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\eta\mu x}{|x|}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Είναι ασυνεχής στο 0.

14. Να οριστεί η παράμετρος λ έτσι ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2^2}\cdots\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2^\nu}, & x\ne 0 \\ \lambda, & x=0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

15. Όμοια να οριστεί η παράμετρος λ έτσι ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} \lambda^{4x}, & x\in[0,1] \\ \lambda\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x^2+2x-3}, & x\in(1,\pi] \end{cases}$$ να είναι συνεχής $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

16. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x \in (0, \frac{π}{2}] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

17. Να προσδιοριστούν τα κ,λ έτσι ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} κx^2+λx+1, & x \leq 2 \\ (κ+1)x+3, & 2 < x \leq 4 \\ (λ-1)|x-6|+1, & x > 4 \end{cases}$$

Να είναι συνεχής $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

18. Δείξετε ότι οι εξισώσεις
i) $x^3+2x^2+3x+1 = 0$, ii) $x^3-2 = 0$
έχουν τουλάχιστο μια πραγματική ρίζα.

19. Δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x+1 = 0$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα στο διάστημα (1,2).

20. Δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x-1 = 0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα [1,2].

21. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = ημx-x+1$.
Δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα πραγματική.

22. Δείξετε ότι η εξίσωση $5x^3+25x-11 = 0$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο διάστημα [0,1] και να υπολογιστεί με προσέγγιση εκατοστού.

23. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: [-α,α] \to [-α,α]$.
Δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $ξ \in [-α,α]$: $f(ξ) = ξ$ και αριθμός $θ \in [-α,α]$: $f(θ) = -θ$.

24. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: [α,β] \to [α,β]$, $g: [α,β] \to [α,β]$ με $g(α) = α$, $g(β) = β$.
Δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ δέχεται μια τουλάχιστο ρίζα στο [α,β].

25. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [α,β] \to \mathbb{R}$ η οποία δεν μηδενίζεται για

καμμιά τιμή του $x\in[\alpha,\beta]$ δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

26. Δείξετε ότι η εξίσωση $3^x+4^x = 5^x$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

27. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής και $f(\alpha) \neq f(\beta)$
Αν $\xi,\theta \in \mathbb{R}_+^*$, δείξετε ότι υπάρχει $e\in(\alpha,\beta)$: $f(e) = \dfrac{\xi f(\alpha)+\theta f(\beta)}{\xi+\theta}$

κεφαλαιο 5

παραγωγοι συναρτησεων

5.1. Έννοια της παραγώγου.

Ορισμός 1. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το ανοιχτό διάστημα $\Delta = (\alpha,\beta)$ λέμε ότι παραγωγίζεται στο **εσωτερικό** σημείο x_0 του Δ, ή είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ ή έχει πρώτη παράγωγο στη θέση $x = x_0 \in \Delta$ όταν και μόνο όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας **πραγματικός αριθμός** λ.

Συμβολίζουμε: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$ και το διαβάζουμε

"η πρώτη παράγωγος της f στη θέση $x = x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0)$.

Παρατηρήσεις:

1. Η συνάρτηση σ με $\sigma(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ με $\mathcal{D}(\sigma) = \Delta-\{x_0\}$ ονομάζεται **συνάρτηση κλίσεως** της f στο σημείο $x = x_0 \in \Delta$.

2. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε η παράγωγος της f στη θέση $x = x_0 \in \Delta$ απειρίζεται θετικά αντίστοιχα αρνητικά και γράφουμε $f'(x_0) = +\infty$ ή $f'(x_0) = -\infty$

3. Η παράγωγος της f στη θέση $x = x_0 \in \Delta$ είναι πάντοτε ένας **πραγματικός αριθμός** (εφ'όσον υπάρχει) και **ποτέ μια συνάρτηση**.

4. Ο τύπος της παραγώγου της f στο σημείο $x_0 \in \Delta$ γίνεται αν θέσουμε $x-x_0 = h$ με $h \to 0$ και $x = x_0+h$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

5.2. Πλευρικές παράγωγοι της f.

Ορισμός 1. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = (\alpha, x_0]$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι υπάρχει η παράγωγος της f από τ'αριστερά στη θέση $x_0 \in \Delta$ ή ότι η f παραγωγίζεται από αριστερά στη θέση $x_0 \in \Delta$ και συμβολίζουμε το όριο αυτό με $f'(x_0^-)$.

Δηλαδή: $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ορισμός 2. Αν $\Delta = [x_0, \beta)$ τότε θα λέμε ότι η f παραγωγίζεται από δεξιά στην θέση $x = x_0 \in \Delta$ και θα την συμβολίζουμε με

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Παρατηρήσεις: 1. Αν το $x_0 \in (\alpha, \beta) = \Delta$ και υπάρχει η $f'(x_0^-)$ και η $f'(x_0^+)$ τότε αν $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ η f έχει παράγωγο στη θέση $x = x_0 \in \Delta$. Δηλαδή:

$$\exists f'(x_0) \leftrightarrow f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0).$$

2. Η παράγωγος μιας συνάρτησης ορίζεται μόνο στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της.

3. Αν το $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε στα σημεία α και β ορίζουμε τις πλευρικές παραγώγους της f.

4. Αν για κάποιο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$ δεν υπάρχει μια από τις πλευρικές παραγώγους ή υπάρχουν και οι δύο αλλά είναι διαφορετικές τότε δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0 \in \Delta$.

5. Στα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης η παράγωγος δεν ορίζεται αν και η f είναι συνεχής σε αυτά.

5.3. Συνάρτηση της πρώτης παραγώγου, παράγωγοι ανωτέρας τάξης.

Ορισμός. Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathcal{D}(f)$ τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση f', που ονομάζεται **συνάρτηση πρώτης παραγώγου** της f με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}f'(x_0) = \{x_0 \in \mathcal{D}(f)$ και υπάρχει το $f'(x_0)\}$.

Αν η συνάρτηση f' της πρώτης παραγωγου της f έχει στο σημείο $x_0 \in \Delta$ παράγωγο τότε η παράγωγος της f' εις το $x_0 \in \Delta$ λέγεται δεύτερη παράγωγος της f στο $x_0 \in \Delta$ και συμβολίζεται με $f''(x_0)$. Αν δε η $f''(x_0)$ υπάρχει $\forall x_0 \in \Delta$ τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση f'' στο Δ, που ονομάζεται **συνάρτηση δευτέρας παραγώγου** της f στο Δ.

Ανάλογα ορίζονται οι συναρτήσεις παράγωγοι τρίτης κ.ο.κ. τάξεως της f στο Δ. Η ν-οστή παράγωγος της f στη θέση $x = x_0 \in \Delta$ ορίζεται από την ισότητα $f^{(\nu)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(\nu-1)}(x) - f^{(\nu-1)}(x_0)}{x - x_0}$

5.4. Εξίσωση της εφαπτομένης.

Η εξίσωση της εφαπτομένης πάνω στο διάγραμμα της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Παρατήρηση: Η παράγωγος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της, ισούται με τον συντελεστή κλίσεως της εφαπτομένης που φέρνουμε σ'αυτό το σημείο.

5.5. Παράγωγος και συνέχεια.

Ισχύει το θεώρημα: **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο $x_0 \in \Delta$, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Το αντίστροφο δεν ισχύει.**

5.6. Κανόνες παραγώγισης.

Παράγωγος αθροίσματος: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Γενικά: $(f_1 + f_2 + \ldots + f_\nu)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_\nu'$

Παράγωγος διαφοράς: $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

Παράγωγος γινομένου: $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Γενικά: $(f_1.f_2.\ldots.f_\nu)' = f_1'(f_2\ldots f_\nu) + f_1 f_2' f_3 \ldots f_\nu + \ldots + (f_1 f_2 \ldots f_{\nu-1}) f_\nu'$

Παράγωγος σταθεράς επί συνάρτηση: $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

Παράγωγος πηλίκου: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) . g'(x_0)$ ή

$f_x' = f_g' . g_x'$ όπου $f'x$ = παράγωγος της f ως προς την μεταβλητή x.

f_g' = παράγωγος της f ως προς την μεταβλητή g και g_x' η παράγωγος της g ως προς την μεταβλητή x.

5.7. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων.

1. $(c)' = 0$, 2. $(x)' = 1$, 3. $(x^2)' = 2x$, 4. $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$,

5. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, 6. $(\sqrt[\nu]{x})' = (x^{\frac{1}{\nu}})' = \dfrac{1}{\nu} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}}$, 7. $(e^x)' = e^x$,

8. $(a^x)' = a^x \ln a$, 9. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$, 10. $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$,

11. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \neq 0$, 12. $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, 13. $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

14. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 15. $(\ln_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, 16. $[f(x)^{\nu}]' = \nu f^{\nu-1}(x) f'(x)$

17. $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$, 18. $[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} f'(x)$,

19. $[a^{f(x)}]' = a^{f(x)} \ln a f'(x)$, 20. $[\eta\mu f(x)]' = \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x)$,

21. $[\sigma\upsilon\nu f(x)]' = -\eta\mu f(x) f'(x)$, 22. $[\varepsilon\varphi f(x)]' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} f'(x)$

23. $[\sigma\varphi f(x)]' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} f'(x)$, 24. $[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

25. $[\ln_a f(x)]' = \frac{1}{f(x) \ln a} f'(x)$, 26. $[f_{(x)}^{g(x)}]' = [e^{g(x)\ln f(x)}]' =$
$= f_{(x)}^{g(x)} [g(x) \ln f(x)]'$.

Λ Υ Μ Ε Ν Ε Σ Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της f με $f(x) = 4x^2+2x$ στο $x = \xi \in \mathbb{R}$.

Λύση: Είναι $f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{4x^2+2x-4\xi^2-2\xi}{x-\xi} =$

$= \lim_{x\to\xi} \frac{4(x-\xi)(x+\xi)+2(x-\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}(4x+4\xi+2) = 8\xi+2$

2. Να βρεθεί η παράγωγος της f με $f(x) = x^2-4x-3$ στο σημείο $x = 1$.

Λύση: Είναι $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x-3-1^2+4.1+3}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)-4(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1-4) = -2$.

3. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ στο $x_0 = 2$, ii) $f(x) = x^{\nu}$ στο $x_0 = \xi \in \mathbb{R}$,

iii) $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $x_0 = 1$.

Λύση: i) Είναι $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2^2}}{x-2} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2^4})}{(x-2)(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2 2^2}+\sqrt[3]{2^4})} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^2}{(x-2)(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2 2^2}+\sqrt[3]{2^4})} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2 2^2}+\sqrt[3]{2^4})} = \frac{4}{6\sqrt[3]{2}}$.

ii) Είναι: $f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{x^{\nu}-\xi^{\nu}}{x-\xi} =$

$= \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{(x-\xi)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\xi+\ldots+\xi^{\nu-1})}{x-\xi} = \underbrace{\xi^{\nu-1}+\xi^{\nu-1}+\ldots+\xi^{\nu-1}}_{\nu} = \nu\xi^{\nu-1}$

iii) Είναι: $f'(1) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x}{x(x-1)} = -\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x} =$

$= -1.$

4. Να βρεθεί η παράγωγος της f με $f(x) = \sqrt{1+2x}$ στο σημείο $x_0 = \xi \neq -\frac{1}{2}$

Λύση: Είναι $f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2\xi+1}}{x-\xi} =$

$= \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2\xi+1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\xi+1})}{(x-\xi)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\xi+1})} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{(2x+1-2\xi-1)}{(x-\xi)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\xi+1})} =$

$= \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2\xi+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\xi+1}}.$

Και επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο του πεδίου ορισμού της f είναι:

$f'(x) = (\sqrt{2x+1})' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}.$

5. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων με τύπους:

i) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ στο σημείο $x_0 = \xi \neq -\dfrac{2}{3}$

ii) $f(x) = \dfrac{4x+1}{x^2+1}$ στο σημείο $x_0 = \xi$.

Λύση: Είναι $f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{\frac{1}{3x+2}-\frac{1}{3\xi+2}}{x-\xi} =$

$= \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{3\xi+2-3x-2}{(x-\xi)(3x+2)(3\xi+2)} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{-3(x-\xi)}{(x-\xi)(3x+2)(3\xi+2)} = -\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{3}{(3x+2)(3\xi+2)} =$

$= -\dfrac{3}{(3\xi+2)^2}$. Και επειδή το ξ είναι τυχαίο είναι:

$f'(x) = \left(\dfrac{1}{3x+2}\right)' = -\dfrac{3}{(3x+2)^2}$

ii) Έχουμε: $f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{\frac{4x+1}{x^2+1}-\frac{4\xi+1}{\xi^2+1}}{x-\xi} =$

$= \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{(4x+1)(\xi^2+1)-(4\xi+1)(x^2+1)}{(x^2+1)(\xi^2+1)(x-\xi)} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{4x\xi^2+4x+\xi^2-4\xi x^2-4\xi-x^2}{(x^2+1)(\xi^2+1)(x-\xi)} =$

$= \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{-4x\xi(x-\xi)+4(x-\xi)-(x-\xi)(x+\xi)}{(x^2+1)(\xi^2+1)(x-\xi)} = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{-4x\xi+4-(x+\xi)}{(x^2+1)(\xi^2+1)} = \dfrac{-4\xi^2-2\xi+4}{(\xi^2+1)^2}$

και επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο του $\mathcal{D}(f)$ είναι

$f'(x) = \left(\frac{4x+1}{x^2+1} \right)' = \frac{-4x^2-2x+4}{(x^2+1)^2}.$

6. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $f(x) = ημx$ στη θέση $x = ξ$

ii) $g(x) = ημ(4x+1)$ στη θέση $x = ξ$

iii) $h(x) = συν^2x$ στη θέση $x = ξ$

Λύση: i) Είναι $f'(ξ) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(ξ+h)-f(ξ)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{ημ(ξ+h)-ημξ}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{2συν(ξ+\frac{h}{2})ημ\frac{h}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}συν(ξ+\frac{h}{2})\lim\limits_{h\to 0}\frac{ημ\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$

$= συν\left[ξ+\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{2}\right]\lim\limits_{h\to 0}\frac{ημ\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = συνξ.$

Και επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο είναι: $f'(x) = (ημx)' = συνx.$

ii) Είναι $g'(ξ) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(ξ+h)-g(ξ)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{ημ(4ξ+4h+1)-ημ(4ξ+1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{2συν(4ξ+2h+1)ημ2h}{h} = 4\lim\limits_{h\to 0}συν(4ξ+2h+1)\lim\limits_{h\to 0}\frac{ημ2h}{2h} = 4συν(4ξ+1).$

Και επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο είναι:

$g'(x) = [ημ(4x+1)]' = 4συν(4x+1)$

iii) Έχουμε $h'(ξ) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{συν^2(h+ξ)-συν^2ξ}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1+συν(2h+2ξ)}{2} - \frac{1+συν2ξ}{2}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{συν(2h+2ξ)-συν2ξ}{2h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2ημ(h+2ξ)ημh}{2h} = -\lim\limits_{h\to 0}ημ(h+2ξ)\,\frac{ημh}{h} =$

$= -ημ2ξ = -2ημξσυνξ$ (γιατί $\lim\limits_{h\to 0}\frac{ημh}{h} = 1$).

Και επειδή το ξ είναι τυχαίο σημείο είναι:

$h'(x) = (συν^2x)' = 2συνx(συνx)' = -2συνxημx.$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ (1) $\forall$ x, y$\in$R με

$f(x)f(y) \neq 1$. Εάν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$. Δείξετε ότι: $f'(x) = 1+f^2(x)$.

Λύση: Είναι $f'(ξ) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(ξ+h)-f(ξ)}{h} \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$f'(ξ) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{f(ξ)+f(h)}{1-f(ξ)f(h)} - f(ξ)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(ξ)+f(h)-f(ξ)+f^2(ξ)f(h)}{h(1-f(ξ)f(h))} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)(1+f^2(\xi))}{h(1-f(\xi)f(h))} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1+f^2(\xi)}{1-f(\xi)f(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{1+f^2(\xi)}{1-f(\xi)f(h)} =$

(γιατί $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 1$) $= \frac{1+f^2(\xi)}{1-f(\xi)\cdot f(0)}$.

Είναι όμως $f(0) = \frac{f(0)+f(0)}{1-f^2(0)} \rightarrow f(0)-f^3(0) = 2f(0) \leftrightarrow f^3(0)+f(0) = 0$

$\leftrightarrow f(0)(1+f^2(0)) = 0 \leftrightarrow f(0) = 0$.

Οπότε έχουμε $f'(\xi) = 1+f^2(\xi)\ \forall\ \xi\in\mathbb{R}$. 'Αρα $f'(x) = 1+f^2(x)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4|x|$. Να εξετάσετε αν έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση: Η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} 4x, & x\geq 0\\ -4x, & x<0\end{cases}$

και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} = (-\infty,0)\cup[0,+\infty)$.

Επειδή στο 0 η f αλλάζει τύπο θα βρούμε τις πλευρικές παραγώγους σ'αυτό

Είναι $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4x-0}{x-0} = 4$

και $f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-4x-0}{x-0} = -4$

Επειδή οι πλευρικές παράγωγοι στο 0 είναι διαφορετικές δεν υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση $x = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = |x^2-3x+2|$. Να βρεθεί η παράγωγός της

Λύση: Η f γράφεται με πολλαπλό τύπο:

$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+2 & \text{αν } x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)\\ -x^2+3x-2 & \text{αν } x\in[1,2].\end{cases}$

i) 'Οταν το $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ η f έχει παράγωγο και είναι $f'(x) = 2x-3$

Πράγματι: 'Εστω $\xi\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ τότε:

$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{x^2-3x+2-\xi^2+3\xi-2}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{(x-\xi)(x+\xi)-3(x-\xi)}{x-\xi} =$

$= \lim_{x\to\xi}(x+\xi-3) = 2\xi-3\ \forall\ \xi\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$. 'Αρα $f'(x) = 2x-3$.

ii) 'Ομοια όταν το $x\in(1,2)$ η f έχει παράγωγο και είναι $f'(x) = -2x+3$.

'Αρα μένει να εξετάσουμε αν υπάρχει παράγωγος στα σημεία $x = 1$ και $x=2$.

'Αρα θα βρούμε τις πλευρικές παραγώγους σ'αυτά.

α) $f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+3x-2+1^2-3.1+2}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-(x-1)(x+1)+3(x-1)}{x-1} = 1.$

β) $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x-2+1^2-3.1+2}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x-2) = -1.$

Επομένως δεν υπάρχει η παράγωγος στην θέση $x = 1$.

'Ομοια εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι: $f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-3x+2-0}{x-2} = 1$ και

$f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-x^2+3x-2-0}{x-2} = -1.$

'Αρα δεν υπάρχει η παράγωγος στο 2.

Επομενως το ευρύτερο σύνολο στο οποίο η f παραγωγίζεται είναι $A = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty) \subset \mathcal{D}(f)$.

10. Να εξετάσετε αν η f με $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \leq 3 \\ x^2+1, & x > 3 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 3$.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = (-\infty,3] \cup (3,+\infty)$ και το σημείο 3 είναι σ.συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$. Επειδή η f στην περιοχή του 3 ορίζεται με διαφορετικούς τύπους θα βρούμε τις πλευρικές παραγώγους στη θέση $x_0 = 3$.

Είναι $f'(3^+) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+1-2.3^3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-53}{x-3} = +\infty$

και $f'(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^3-2.3^3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = 54$

Επειδή οι πλευρικές παράγωγοι στο 3 είναι διαφορετικές δεν υπάρχει η παράγωγος στη θέση $x_0 = 3$.

11. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} ημ\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x = 0$.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty) \cup \{0\}$ και το μηδέν είναι σ.συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$.

Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ\frac{1}{x}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} ημ\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$

Αλλά η συνάρτηση $ημ\frac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο 0 (βλέπετε άσκηση στα όρια).

Επομένως η f δεν έχει παράγωγο στη θέση $x_0 = 0$.

12. Δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^3 ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 0$.

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty) \cup \{0\}$ και το 0 είναι σ. συσσωρεύσεως του $\mathcal{D}(f)$.

Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 ημ\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$ γιατί

$|x^2 ημ\frac{1}{x}| = |x^2|\,|ημ\frac{1}{x}| \leq x^2 \to 0$.

Άρα υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση $x_0 = 0$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$. Δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν παραγωγίζεται στη θέση $x_0 = 0$.

Λύση: Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ τότε είναι $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi} \sqrt[5]{x^3} = \sqrt[5]{(\lim\limits_{x\to\xi} x)^3} = \sqrt[5]{\xi^3} = f(\xi)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(\xi) = (x^{\frac{3}{5}})' = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

και στη θέση $x_0 = 0$ δεν ορίζεται η $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στη θέση $x_0 = 0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3|x|+4x$. Δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

Λύση: Η f έχει τον πολλαπλό τύπο: $f(x) = \begin{cases} 7x, & x>0 \\ x, & x<0 \end{cases}$

στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχει παράγωγο και είναι $f'(x) = 7$.

Επίσης στο διάστημα $(-\infty,0)$ έχει παράγωγο και είναι $f'(x) = 1$.

Άρα η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}^*$.

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-5x+6}$.

Να βρεθεί η παράγωγος της στη θέση $x = 2$ και $x = -3$.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}: x-2 \geq 0,\ x^2-5x+6 \geq 0\} =$
$= \{x \geq 2,\ x \geq 3 \text{ ή } x \leq 2\} = \{2\} \cup [3,+\infty)$.

Επειδή το 2 είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{D}(f)$ δεν υπάρχει η παράγωγος

της f στη θέση x = 2.

Επειδή το $-3 \notin \mathcal{D}(f)$, επίσης δεν υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση $x = -3$.

16. **Θεωρούμε την συνάρτηση f με** $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \in [0,1] \\ x^5, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Να βρεθεί η συνάρτηση πρώτη παράγωγος και η συνάρτηση δεύτερη παράγωγος.

Λύση: Στο διάστημα (0,1) είναι $f'(x) = 4x^3 \ \forall\, x \in (0,1)$ και στο διάστημα $(1,+\infty)$ είναι $f'(x) = 5x^4 \ \forall\, x \in (1,+\infty)$.

Εξετάζομε αν υπάρχει η παράγωγος (δεξιά) στο μηδέν.

Είναι $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$.

Άρα $\forall\, x \in [0,1)$ είναι $f'(x) = 4x^3$.

Εξετάζουμε αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι στο 1.

Έχουμε $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x^4+x^3+x^2+x+1) = 5$ και $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1) = 4$. Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της f στη θέση $x = 1$

Συνεπώς η παράγωγος συνάρτησης ορίζεται στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,+\infty)$

και έχει τύπο: $f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in [0,1) \\ 5x^4, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Αν εργαστούμε όπως παραπάνω βρίσκουμε την συνάρτηση δεύτερης παραγώγου

που είναι $f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 20x^3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Σημείωση: Είναι $\mathcal{D}(f) = [0,+\infty)$ και $\mathcal{D}(f') = [0,+\infty)-\{1\}$.

17. **Θεωρούμε την συνάρτηση f με** $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Να βρείτε τα f'(0) και f''(0) αν υπάρχουν.

Λύση: Αν $x \neq 0$ είναι

$f'(\xi) = \lim\limits_{x\to \xi} \dfrac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - \xi^2 \eta\mu \frac{1}{\xi}}{x-\xi} =$

$= \lim\limits_{x\to \xi} \dfrac{x^2(\eta\mu \frac{1}{x} - \eta\mu \frac{1}{\xi})}{x-\xi} + \lim\limits_{x\to \xi} \dfrac{\eta\mu \frac{1}{\xi}(x^2-\xi^2)}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to \xi} \dfrac{x^2 2\sigma\upsilon\nu \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{\xi}}{2}\eta\mu \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}}{2}}{x-\xi} +$

$$+\lim_{x\to\xi}\eta\mu\frac{1}{\xi}(x+\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{x+\xi}{2x\xi}\,\eta\mu\frac{x-\xi}{2x\xi}}{\frac{x-\xi}{2x\xi}\,x\xi} + 2\xi\eta\mu\frac{1}{\xi} = -\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}+2\xi\eta\mu\frac{1}{\xi}$$

$\forall\ \xi\in\mathbb{R}^*$. Άρα $f'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ είναι η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου για $x \neq 0$.

και $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\frac{1}{x} = 0.$

Επομένως είναι $f'(0) = 0$ και η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου έχει τύπο

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0\end{cases}$$

Για την δεύτερη παράγωγο στο 0 έχουμε:

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0}2\eta\mu\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{x}$$

το οποίο δεν υπάρχει. Άρα η f δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Σε συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες Ox, Oy και από την (ε)

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ του διαγράμματος της f έχει εξίσωση: $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ (1) όπου $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ και $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Δηλαδή: $y-\frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$ (2) $\Longleftrightarrow y+\frac{1}{x_0^2}x-\frac{2}{x_0} = 0.$

Η (2) τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο A με τεταγμένη $y = 0$. Άρα στο σημείο $A(2x_0, 0)$, και τον άξονα Oy στο σημείο B με τετμημένη $x = 0$. Άρα στο $B(0, \frac{2}{x_0})$. Επομένως το εμβαδόν E του τριγώνου $O\hat{A}B$ είναι

$$E = \frac{2x_0\frac{2}{x_0}}{2} = 2 \text{ μονάδες μέτρησης..}$$

19. Έστω G η γραφική παράσταση της f με $f(x) = x^2+2$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της G στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ οι οποίες συμπίπτουν με την ευθεία $y = \lambda x+1$. Να δειχτεί ακόμη ότι οι εφαπτόμενες τέ-

μνονται σε ένα σημείο του άξονα y'y.

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \rightarrow y-x_0^2-2 = 2x_0(x-x_0)$ (1) γιατί είναι $f(x_0) = x_0^2+2$ και $f'(x_0) = 2x_0$. Για να ταυτίζεται η (1) και η $y = \lambda x+1$ πρέπει

$$\frac{2x_0}{\lambda} = 1 = \frac{-x_0^2+2}{1} \rightarrow \left.\begin{matrix}\lambda = 2x_0 \\ \wedge \\ x_0^2-2 = 1\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{matrix}\lambda = 2x_0 \\ \\ x_0^2 = -1\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \begin{matrix}\lambda = \pm 2 \\ \\ x_0 = \pm 1\end{matrix}$$

Άρα οι εξισώσεις είναι: $y = 2x+1$ και $y = -2x+1$ και τέμνουν τον άξονα y'y στο σημείο (0,1).

20. Εάν G η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο (1,1).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της f στο σημείο (1,1).

Λύση: i) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο (1,1) είναι $y-f(1) = f'(1)(x-1)$ όπου $f(1) = 1$ και $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x^2}-1)(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1} = \frac{2}{3}$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,1) είναι $y-1 = \frac{2}{3}(x-1)$.

i) Αν λ_κ ο συντελεστής διεύθυνσης της κάθετης στο σημείο (1,1) τότε ισχύει $\lambda_\kappa f'(1) = -1 \leftrightarrow \lambda_\kappa(\frac{2}{3}) = -1 \leftrightarrow \lambda_\kappa = -\frac{3}{2}$

Επομένως η εξίσωση της κάθετης στο σημείο (1,1) είναι $y-1 = -\frac{3}{2}(x-1)$

21. Εάν A(1,2) και B(3,10) είναι δύο σημεία της γραφικής παράστασης G της f με $f(x) = x^2+1$, να βρεθεί σημείο $M(x_0,y_0)$ της f τέτοιο ώστε η εφαπτομένη σ'αυτό να είναι παράλληλη με την AB.

Λύση: Θα πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο M να είναι ίσος με τον συντελεστή διεύθυνσης λ_{AB} της AB.

Είναι $f'(x_0) = 2x_0$ και $\lambda_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{10-2}{3-1} = 4$. Άρα $2x_0 = 4 \leftrightarrow x_0 = 2$

Επομένως το σημείο $M(x_0,y_0)$ είναι το M(2,[illegible]).

22. Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \alpha x^2+\beta x+2$ και $g(x) = \frac{x-1}{x}$. Να προσδιοριστούν τα α,β έτσι ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση: Θα πρέπει οι εφαπτόμενες των f και g να συμπίπτουν στο σημείο $x_0 = 1$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $x_0 = 1$ είναι (ε): $y-f(1) = f'(1)(x-1) \rightarrow y-(\alpha+\beta+2) = (2\alpha+\beta)(x-1) \leftrightarrow$ (ε): $(2\alpha+\beta)x-y-\alpha+2 = 0$.
Και η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο $x_0 = 1$ είναι:
(ε): $y-g(1) = g'(1)(x-1) \rightarrow y-0 = 1(x-1) \leftrightarrow (\varepsilon_1)$: $x-y-1 = 0$
(γιατί $g'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow g'(1) = 1$).
Άρα επειδή $(\varepsilon)\equiv(\varepsilon_1) \leftrightarrow \frac{2\alpha+\beta}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{2-\alpha}{-1} \leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta = 1 \\ \alpha-2 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \beta = -5 \\ \alpha = 3 \end{cases}$

23. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2$.

α) Να βρείτε σε ποιό σημείο του διαγράμματος της f η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

β) Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

γ) Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x'x υπό γωνία $\varphi = 30°$.

δ) Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x$

ε) Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $3x-2y+1 = 0$

στ) Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη περνά από το σημείο O(0,0).

ζ) Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη περνά από το σημείο M(1,1).

η) Σε ποιό σημείο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $M_1(0,-2)$.

Λύση: α) Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι $\lambda = f'(x_0)$.
Έχουμε: $f'(x) = 6x$ και στη θέση $x = x_0$ είναι $f'(x_0) = 6x_0$.
Ώστε $6x_0 = 1 \leftrightarrow x_0 = \frac{1}{6}$. Το ζητούμενο επομένως σημείο είναι
$(x_0,f(x_0)) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$.

β) Γνωρίζουμε ότι το σημείο x_0 στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα x'x θα έχει συντελεστή διεύθυνσης 0. Άρα $f'(x_0) = 0 \leftrightarrow 6x_0 = 0 \leftrightarrow x_0 = 0$ και επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το (0,0)

γ) Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x'x υπό γωνία ω τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \varepsilon\varphi 30° \leftrightarrow 6x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{3}}{18}$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $(\frac{\sqrt{3}}{18}, \frac{1}{36})$.

δ) Η εφαπτομένη στο $(x_0,f(x_0))$ και η ευθεία $y = 3x$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης αφού θα είναι παράλληλες. Άρα $f'(x_0) = 3 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 6x_0 = 3 \leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ και επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

ε) Η ευθεία $3x-2y+1 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{3}{2}$. Άρα πρέπει

$f'(x_0)\frac{3}{2} = -1 \leftrightarrow 6x_0\frac{3}{2} = -1 \leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{9}$ και το ζητούμενο σημείο είναι

$(-\frac{1}{9}, \frac{1}{27})$

στ) Για να διέρχεται η εφαπτομένη από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του σημείο (0,0) να επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης που είναι $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$.

Άρα έχουμε: $0-3x_0^2 = 6x_0(0-x_0) \leftrightarrow 3x_0^2-6x_0^2 = 0 \leftrightarrow -3x_0^2 = 0 \leftrightarrow x_0 = 0$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $(x_0,f(x_0)) = (0,0)$.

ζ) Για να περνά η εφαπτομένη από το σημείο M(1,1) πρέπει οι συντεταγμένες του M να επαληθεύουν την εξίσωση $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$. Δηλαδή:

$1-3x_0^2 = 6x_0(1-x_0) \leftrightarrow 3x_0^2-6x_0+1 = 0 \leftrightarrow x_0 = \frac{3+\sqrt{6}}{3}, x_0 = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$

Υπάρχουν επομένως δύο εφαπτομένες στα σημεία $A(\frac{3+\sqrt{6}}{3}, f(\frac{3+\sqrt{6}}{3}))$,

$B = (\frac{3-\sqrt{6}}{3}, f(\frac{3-\sqrt{6}}{3}))$

η) Για να τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα y'y στο σημείο $M_1(0,-2)$ πρέπει οι συντεταγμένες του M_1 να επαληθεύουν την εξίσωση

$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$. Δηλαδή: $-2-3x_0^2 = 6x_0(0-x_0) \rightarrow 3x_0^2-2 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x_0^2 = \frac{2}{3} \rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Άρα υπάρχουν δύο κοινά σημεία πάνω στο διάγραμμα της τα $A'(\sqrt{\frac{2}{3}}, f(\sqrt{\frac{2}{3}}))$, $B'(-\sqrt{\frac{2}{3}}, f(-\sqrt{\frac{2}{3}}))$.

24. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x \le 0 \\ x^2-x+1, & x > 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f έχει εφαπτομένη στην θέση $x_0 = 0$.

Λύση: Αν υπάρχει εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 0$ θα έχει εξίσωση $y-f(0) = f'(0)(x-0)$.

Είναι όμως: $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x+1-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{x} = -1$ και

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x} = 1$

και επειδή $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ η f δεν έχει παράγωγο στη θέση $x_0 = 0$, επομένως δεν έχει εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Αλλά επειδή οι πλευρικές παράγωγοι στο σημείο $x_0 = 0$ είναι πεπερασμένες η f έχει στο σημείο $x_0 = 0$ ημιεφαπτόμενες αριστερά και δεξιά και έχουν εξισώσεις αντίστοιχα:

$y-1 = (x-0) \Longleftrightarrow y-x = 1$ και $y-1 = -(x-0) \Longleftrightarrow y+x = 1$

25. Δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f με $f(x) = συν^2\sqrt{x}$ στο σημείο $x_0 = 0$ είναι $x+y = 1$.

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ του διαγράμματος της f είναι $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ ή $y-1 = f'(0)(x-0)$.

Αρκεί επομένως να υπολογίσουμε την παράγωγο $f'(0)$.

Είναι $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{συν^2\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-ημ^2\sqrt{x}}{x} =$

$= -\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημ\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = -1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 = 0$ είναι

$y-1 = -(x-0) \Longleftrightarrow x+y = 1$.

26. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 2 \\ αx+β, & x > 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα πραγματικά $α$ και $β$ έτσι ώστε η f να έχει παράγωγο στη θέση $x_0 = 2$.

Λύση: Επειδή η f έχει παράγωγο στη θέση $x_0 = 2$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Επομένως είναι: $\lim_{x\to 2^+}f(x) = \lim_{x\to 2^-}f(x) = f(2) \Longleftrightarrow \lim_{x\to 2^+}(αx+β) =$

$= \lim_{x\to 2^-}(x^2+1) = 2^2+1 \Longleftrightarrow 2α+β = 5$ (1).

Επίσης επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$ ισχύει:

$f'(2^+) = f'(2^-) \Longleftrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{αx+β-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1-5}{x-2} \Longrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{αx+β-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(x+2) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{αx+β-5}{x-2} = 4$ (2)

Η (2) λόγω της (1) γίνεται: $\lim_{x\to 2^+}\frac{αx+5-2α-5}{x-2} = 4 \Longrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{α(x-2)}{x-2} = 4 \Longrightarrow$

$\rightarrow \alpha = 4$ (3).

Η (1) λόγω της (3) δίνει $\beta = -3$. Άρα αν $\alpha = 4$ και $\beta = -3$ η f είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.

27. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2-x+2, & x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+\lambda x+3-\lambda}{x+1}, & x > 1 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει η παράγωγος της f στην θέση $x = 1$.

Λύση: Θα πρέπει $f'(1^-) = f'(1^+)$.

Αλλά $f'(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2-x+2-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1$

και $f'(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\frac{x^2+\lambda x+3-\lambda}{x+1}-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+\lambda x+3-\lambda-2x-2}{(x+1)(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x^2-1)+\lambda(x-1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1^+}\left(\dfrac{x+1+\lambda-2}{x+1}\right) = \dfrac{\lambda}{2}$

Επομένως θα είναι $\dfrac{\lambda}{2} = 1 \leftrightarrow \lambda = 2$. Και τότε θα έχουμε $f'(1) = 1$.

28. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = 5+x+x^\nu+\sqrt{x}+e^x-\alpha^x+\ln x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x$.
2. $h(x) = \eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x+\ln x$.
3. $g(x) = \alpha^x\beta^x / \alpha,\beta > 0$.

Λύση: 1. Η f είναι άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα είναι:

$f'(x) = (5)'+(x)'+(x^\nu)'+(\sqrt{x})'+(e^x)'-(\alpha^x)'+(\ln x)'+(\eta\mu x)'+(\sigma\upsilon\nu x)'+(\varepsilon\varphi x)'-$
$-(\sigma\varphi x)' = 0+1+\nu x^{\nu-1}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+e^x-\alpha^x\ln\alpha+\dfrac{1}{x}+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

2. Όμοια η h είναι άθροισμα συναρτήσεων που έχουν παραγώγους. Επομένως είναι: $h'(x) = (\eta\mu x)'+(x\sigma\upsilon\nu x)'+(\ln x)' = \sigma\upsilon\nu x+(x\sigma\upsilon\nu x)'+\dfrac{1}{x}$.

Η συνάρτηση $\varphi(x) = x\sigma\upsilon\nu x$ είναι γινόμενο επομένως είναι:

$\varphi'(x) = (x)'\sigma\upsilon\nu x+x(\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$.

Τελικά έχουμε: $h'(x) = \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+\dfrac{1}{x} = 2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+\dfrac{1}{x}$.

3. Η g είναι γινόμενο συναρτήσεων.

Οπότε: $g'(x) = (\alpha^x\beta^x)' = (\alpha^x)'\beta^x+\alpha^x(\beta^x)' = \alpha^x\ln\alpha\,\beta^x+\alpha^x\beta^x\ln\beta =$
$= \alpha^x\beta^x(\ln\alpha+\ln\beta) = \alpha^x\beta^x\ln\alpha\beta$.

29. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = e^x \ln x$, 2. $h(x) = x\ln(\text{συν}x)$, 3. $g(x) = \text{ημ}(\text{συν}x)$,
4. $\varphi(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Λύση: 1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_+^*$ και επειδή είναι γινόμενο συναρτήσεων έχουμε:

$$f'(x) = (e^x\ln x)' = (e^x)'\ln x + e^x(\ln x)' = e^x\ln x + e^x\frac{1}{x} = e^x(\ln x + \frac{1}{x}).$$

2. Όμοια είναι: $h'(x) = [x\ln(\text{συν}x)]' = \ln(\text{συν}x) + x[\ln(\text{συν}x)]' =$

$$= \ln(\text{συν}x) + x\frac{1}{\text{συν}x}(\text{συν}x)' = \ln(\text{συν}x) - \frac{x\text{ημ}x}{\text{συν}x} = \ln(\text{συν}x) - x\text{εφ}x.$$

3. Η g είναι σύνθετη συνάρτηση άρα έχουμε:

$$g'(x) = [\text{ημ}(\text{συν}x)]' = \text{συν}(\text{συν}x)(\text{συν}x)' = \text{συν}(\text{συν}x)(-\text{ημ}x) = -\text{ημ}x\,\text{συν}(\text{συν}x)$$

4. Όμοια η φ είναι σύνθετη συνάρτηση άρα έχουμε:

$$\varphi'(x) = (\sqrt{x+\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}((x)' + (\sqrt{x})') =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

30. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = \text{ημ}^4(\text{συν}x + e^x + \sqrt{x})$
2. $g(x) = \dfrac{x^2e^{x^2+1}}{1+\text{ημ}x}$
3. $h(x) = 3\text{ημ}^6(2x+1) + \text{συν}^5x + \text{εφ}(4x+1)$

Λύση: 1. Η f είναι σύνθετη συνάρτηση. Άρα:

$$f'(x) = [\text{ημ}^4(\text{συν}x+e^x+\sqrt{x})]' = 4\text{ημ}^3(\text{συν}x+e^x+\sqrt{x})(\text{ημ}(\text{συν}x+e^x+\sqrt{x}))' =$$

$$= 4\text{ημ}^3(\text{συν}x+e^x+\sqrt{x})\text{συν}(\text{συν}x+e^x+\sqrt{x})(\text{συν}x+e^x+\sqrt{x})' =$$

$$= 4\text{ημ}^3(\text{συν}x+e^x+\sqrt{x})\text{συν}(\text{συν}x+e^x+\sqrt{x})(-\text{ημ}x+e^x+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

2. Η g είναι πηλίκο συναρτήσεων άρα:

$$g'(x) = \frac{(x^2e^{x^2+1})'(1+\text{ημ}x) - x^2e^{x^2+1}(1+\text{ημ}x)'}{(1+\text{ημ}x)^2} =$$

$$= \frac{[(x^2)'e^{x^2+1} + x^2(e^{x^2+1})'](1+\text{ημ}x) - x^2e^{x^2+1}\text{συν}x}{(1+\text{ημ}x)^2} =$$

$$= \frac{[2x\,e^{x^2+1} + x^2e^{x^2+1}(x^2+1)'](1+\text{ημ}x) - x^2e^{x^2+1}\text{συν}x}{(1+\text{ημ}x)^2} =$$

$$= \frac{(2xe^{x^2-1}+x^2e^{x^2-1}2x)(1+\eta\mu x)-x^2e^{x^2-1}\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2} = \frac{e^{x^2-1}[(2x+2x^3)(1+\eta\mu x)-x^2\sigma\upsilon\nu x]}{(1+\eta\mu x)^2}$$

3. Έχουμε: $h'(x) = [3\eta\mu^4(2x+1)+\sigma\upsilon\nu^5 x+\varepsilon\varphi(4x+1)]' =$

$= [3\eta\mu^4(2x+1)]'+(\sigma\upsilon\nu^5 x)'+[\varepsilon\varphi(4x+1)]' =$

$= 3.4\eta\mu^3(2x+1)(\eta\mu(2x+1))'+5\sigma\upsilon\nu^4 x(\sigma\upsilon\nu x)'+ \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(4x+1)}(4x+1)' =$

$= 12\eta\mu^3(2x+1)\sigma\upsilon\nu(2x+1)2-5\sigma\upsilon\nu^4 x\eta\mu x+ \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2(4x+1)}$

31. Αν $F(x) = f(\eta\mu^2 x)+f(\sigma\upsilon\nu^2 x) \rightarrow F'(x) = \eta\mu 2x(f'(\eta\mu^2 x)-f'(\sigma\upsilon\nu^2 x))$

Λύση: Η F είναι άθροισμα σύνθετων συναρτήσεων και αν παραγωγίσουμε έχουμε: $F'(x) = [f(\eta\mu^2 x)]'+[f(\sigma\upsilon\nu^2 x)]' = f'(\eta\mu^2 x)(\eta\mu^2 x)'+f'(\sigma\upsilon\nu^2 x)(\sigma\upsilon\nu^2 x)' =$
$= f'(\eta\mu^2 x)2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+f'(\sigma\upsilon\nu^2 x)(-2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x) = \eta\mu 2x(f'(\eta\mu^2 x)-f'(\sigma\upsilon\nu^2 x))$.

32. Αν $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow xf'(x) = (1-x^2)f(x)$

Λύση: Είναι $f'(x) = (x)'e^{-\frac{x^2}{2}}+x(e^{-\frac{x^2}{2}})' = e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}(-\frac{x^2}{2})' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$

Άρα $xf'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$.

33. Αν $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\eta\mu^2 x}$, δείξετε ότι $f(\frac{\pi}{4})-3f'(\frac{\pi}{4}) = 3$.

Λύση:

Είναι: $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ και $f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu^2 x)'(1+\eta\mu^2 x)-\sigma\upsilon\nu^2 x(1+\eta\mu^2 x)'}{(1+\eta\mu^2 x)^2}$

$= \frac{-2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x(1+\eta\mu^2 x)-\sigma\upsilon\nu^2 x 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu^2 x)^2} = \frac{-\eta\mu 2x(1+\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)}{(1+\eta\mu^2 x)^2} = \frac{-2\eta\mu 2x}{(1+\eta\mu^2 x)^2} \rightarrow$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{8}{9}$.

Άρα $f(\frac{\pi}{4})-3f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}+\frac{24}{9} = \frac{27}{9} = 3$.

34. Αν $f(x) = \ln\frac{1}{1+x} \rightarrow xf'(x)+1 = e^{f(x)}$.

Λύση: Η παράγωγος συνάρτησης της f είναι: $f'(x) = (x+1)(\frac{1}{1+x})' =$

$= -\frac{1}{x+1}$ και η για απόδειξη γίνεται:

$x(-\frac{1}{x+1})+1 = \frac{-x}{x+1}+1 = \frac{1}{x+1} = e^{f(x)} \rightarrow \ln(\frac{1}{1+x}) = f(x)\ln e \rightarrow f(x) =$

$= \ln(\frac{1}{1+x})$ γιατί $\ln e = 1$.

35. Δείξετε ότι:

i) Αν $f(x) = f(-x) \rightarrow f'(x) = -f'(-x)$

ii) Αν $f(x) = -f(-x) \rightarrow f'(x) = f'(-x)$

iii) Αν $f(x) = f(x+\tau) \rightarrow f'(x) = f'(x+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Λύση: i. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη, και επειδή το δεύτερο μέλος είναι σύνθετη συνάρτηση έχουμε: $f'(x) = f'(-x)(-x)' \rightarrow f'(x) = -f'(-x)$

ii. Όμοια με παραγώγιση των μελών έχουμε:

$f'(x) = (-f(-x))' = -f'(-x)(-x)' \rightarrow f'(x) = f'(-x)$.

iii. Όμοια έχουμε αν παραγωγίσουμε τα μέλη:

$f'(x) = [f(x+\tau)]' \rightarrow f'(x) = f'(x+\tau)(x+\tau)' \rightarrow f'(x) = f'(x+\tau)$

36. Να βρεθεί η παράγωγος κάθε συνάρτησης

1. $f(x) = 5\text{ημ}x\ln x\text{εφ}x-(x+1)^3$
2. $h(x) = \text{ημ}(3x+1)+\text{συν}^3(4x^2)$
3. $g(x) = \text{ημ}(\text{συν}^2x)\text{συν}(\text{ημ}^2x)$
4. $\varphi(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Λύση: 1. Είναι $f'(x) = (5\text{ημ}x\ln x\text{εφ}x)'-[(x+1)^3]' = 5(\text{ημ}x)'\ln x\text{εφ}x+$

$+5\text{ημ}x(\ln x)'\text{εφ}x+5\text{ημ}x\ln x(\text{εφ}x)'-3(x+1)^2(x+1)' = 5\text{συν}x\ln x\text{εφ}x+5\text{ημ}x\frac{1}{x}\text{εφ}x+$

$+5\text{ημ}x\ln x\frac{1}{\text{συν}^2x}-3(x+1)^2$

2. $h'(x) = [\text{ημ}(3x+1)]'+[\text{συν}^3(4x^2)]' = \text{συν}(3x+1)(3x+1)'+3\text{συν}^2(4x^2)$
$(\text{συν}(4x^2))' = \text{συν}(3x+1)3+3\text{συν}^2(4x^2)(-\text{ημ}(4x^2))(4x^2)' =$
$= 3\text{συν}(3x+1)-24x\text{συν}^2(4x^2)\text{ημ}(4x^2)$.

3. Είναι $g'(x) = [\text{ημ}(\text{συν}^2x)]'\text{συν}(\text{ημ}^2x)+\text{ημ}(\text{συν}^2x)[\text{συν}(\text{ημ}^2x)]' =$
$= \text{συν}(\text{συν}^2x)(\text{συν}^2x)'\text{συν}(\text{ημ}^2x)+\text{ημ}(\text{συν}^2x)(-\text{ημ}(\text{ημ}^2x))(\text{ημ}^2x)' =$
$= \text{συν}(\text{συν}^2x)(-2\text{συν}x\text{ημ}x)\text{συν}(\text{ημ}^2x)+\text{ημ}(\text{συν}^2x)(-\text{ημ}(\text{ημ}^2x))(2\text{ημ}x\text{συν}x) =$
$= -2\text{ημ}x\text{συν}x(\text{συν}(\text{συν}^2x)\text{συν}(\text{ημ}^2x)-\text{ημ}(\text{συν}^2x)\text{ημ}(\text{ημ}^2x)) =$
$= -\text{ημ}2x(\text{συν}(\text{συν}^2x-\text{ημ}^2x)) = -\text{ημ}2x\text{συν}(\text{συν}2x)$.

4. Έχουμε παράγωγο πηλίκου και είναι:

$$\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \rightarrow \varphi'(x) = \frac{(e^{2x}-1)'(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x}(2x)'(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)e^{2x}(2x)'}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

37. Αν $f(x) = x^2 \ln x \rightarrow 2f(x)+x^2 = xf'(x)$.

Λύση: Βρίσκουμε την παράγωγο συνάρτηση της f και αντικαθιστούμε στην προς απόδειξη, έχουμε:

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x\ln x + x$$

Και η για απόδειξη γίνεται:

$2f(x)+x^2 = x(2x\ln x + x) = 2x^2\ln x + x^2$, που είναι αληθινή.

38. Να βρεθεί η παράγωγος κάθε μιας από τις συναρτήσεις.

1. $f(x) = x^x$
2. $h(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$
3. $g(x) = (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$
4. $\varphi(x) = (x^2+1)^{x^2}$

Λύση: 1ος τρόπος. Η f γράφεται $f(x) = e^{x\ln x} \rightarrow f'(x) = (e^{x\ln x})' =$

$$= e^{x\ln x}(x\ln x)' = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

2ος τρόπος. Επειδή πρέπει $x > 0$ αν λογαριθμίσουμε τα μέλη έχουμε:

$$\ln f(x) = x\ln x \rightarrow (\ln f(x))' = (x\ln x)' \rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \rightarrow f'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

2. Είναι $h(x) = e^{\sigma\upsilon\nu x \ln(\eta\mu x)} \rightarrow h'(x) = e^{\sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x)}(\sigma\upsilon\nu x \ln(\eta\mu x))' =$

$$= (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\left(-\eta\mu x\ln(\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\right).$$

2ος τρόπος. Είναι $\eta\mu x > 0$ οπότε με λογαρίθμιση των μελών έχουμε

$$\ln(h(x)) = \sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x) \rightarrow [\ln(h(x))]' = [\sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x)]' \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = -\eta\mu x\ln(\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x \rightarrow$$

$$\rightarrow h'(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\left(-\eta\mu x\ln(\eta\mu x) + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x}\right).$$

3. Η g γράφεται: $g(x) = e^{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})} \rightarrow g'(x) = e^{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})}(\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x}))' =$

$$= (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+\sqrt{x}) + \sqrt{x}\frac{1}{1+\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})'\right) =$$

$$= (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{x})}\right).$$

4. Η φ γράφεται: $\varphi(x) = e^{x^3\ln(x^2+1)} \rightarrow \varphi'(x) = e^{x^3\ln(x^2+1)}\,(x^3\ln(x^2+1))' =$

$= (x^2+1)^{x^3}(3x^2\ln(x^2+1)+x^3\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)') =$

$= (x^2+1)^{x^3}(3x^2\ln(x^2+1)+\frac{2x^4}{x^2+1})$.

39. Αν είναι γνωστό ότι $1+x+x^2+\ldots+x^\nu = \frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}$, $x \neq 1$ (1).

Τότε να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

$S_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1}$

$S_2 = 1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+\nu^2x^{\nu-1}$

Λύση: Η (1) αληθεύει ∀ $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και αν παραγωγίσουμε τα μέλη της βρίσκουμε: $x'+(x^2)'+\ldots+(x^\nu)' = (\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1})' \rightarrow$

$S_1 = 1+2x+3x^2+\ldots+\nu x^{\nu-1} = \frac{(\nu+1)x^\nu(x-1)-(x^{\nu+1}-1)}{(x-1)^2}$ (2)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (2) επί x και παραγωγίζουμε οπότε έχουμε

$x+2x^2+3x^3+\ldots+\nu x^\nu = \frac{\nu x^{\nu+2}-(\nu+1)x^{\nu+1}+x}{(x-1)^2} \rightarrow$

$S_2 = 1+2^2x+3^2x^2+\ldots+\nu^2x^{\nu-1} = \frac{1+x-(\nu+1)^2x^\nu+(2\nu^2+2\nu-1)x^{\nu+1}-\nu^2x^{\nu+2}}{(1-x)^3}$

40. Έστω $1,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu-1}$ οι ρίζες της εξίσωσης $x^\nu-1 = 0$

Δείξετε ότι: $(1-\rho_1)(1-\rho_2)\ldots(1-\rho_{\nu-1}) = \nu$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι αν μια εξίσωση έχει ρίζες τις $1,\rho_1,\ldots,\rho_{\nu-1}$ τότε αναλύεται σε γινόμενο $x^\nu-1 = (x-1)(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})$ (1)

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη της (1) έχουμε:

$\nu x^{\nu-1} = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})+(x-1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})+(x-1)(x-\rho_1)\ldots$
$(x-\rho_{\nu-1})+(x-1)(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_{\nu-2})$ (2)

Η (2) για x = 1 δίνει: $\nu = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\ldots(1-\rho_\nu)$.

41. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

Να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αν $f(0) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(2) = 2$, $f'''(3) = 3$

Λύση: Είναι $f(0) = \delta = 0$, $f'(x) = 3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ (1),

$f''(x) = 6\alpha x+2\beta$ (2), $f'''(x) = 6\alpha$ (3).

Οι (1),(2), (3) με βάση τις δοσμένες σχέσεις δίνουν το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 6\alpha = 3 \\ 12\alpha+2\beta = 2 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -2 \\ \gamma = \frac{7}{2} \end{array}$$

και το ζητούμενο πολυώνυμο είναι: $f(x) = \frac{1}{2}x^3-2x^2+\frac{7}{2}x$.

42. Αν η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη $\forall\ x\in\mathbb{R}^*_+$ ισχύει δε $f(x^2) = x^7$ δείξετε ότι $f'(4) = 112$.

Λύση: Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της $f(x^2) = x^7$ και επειδή το πρώτο μέλος είναι σύνθετη συνάρτηση έχουμε:

$f'(x^2)(x^2)' = 7x^6 \rightarrow f'(x^2)2x = 7x^6 \rightarrow 2f'(x^2) = 7x^5$ (1)

Αν στην (1) θέσουμε $x = 2$ παίρνουμε $2f'(4) = 7.2^5 \rightarrow$

$\rightarrow f'(4) = 7.2^4 = 112$.

43. Δείξετε ότι αν η πραγματική ρίζα ρ του πολυωνύμου f(x) είναι πολλαπλότητας $\kappa\in\mathbb{N}$ τότε η ρ είναι ρίζα της παραγώγου με πολλαπλότητα κ-1. Με βάση το παραπάνω δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^\nu+1$ $\nu\in\mathbb{N}$ διαιρείται ακριβώς με το $(x-1)^2$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι αν ο αριθμός $x = \rho$ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με πολλαπλότητα κ τότε το $(x-\rho)^\kappa$ διαιρεί το πολυώνυμο.

Άρα $f(x) = (x-\rho)^\kappa\Pi(x)$, ($\Pi(x)$ το πηλίκο που είναι ακέραιο πολυώνυμο του x).

Αν παραγωγίσουμε τα μέλη έχουμε:

$f'(x) = \kappa(x-\rho)^{\kappa-1}\Pi(x)+(x-\rho)^\kappa\,\Pi'(x) = (x-\rho)^{\kappa-1}[\kappa\Pi(x)+(x-\rho)\Pi'(x)] =$

$= (x-\rho)^{\kappa-1}\Pi_1(x)$ όπου $\Pi_1(x) = \kappa\Pi(x)+(x-\rho)\Pi_1(x)$.

Δηλαδή είναι $f'(x) = (x-\rho)^{\kappa-1}\Pi_1(x)$ που σημαίνει ότι το πολυώνυμο $f'(x)$ έχει τον αριθμό ρ ρίζα με πολλαπλότητα κ-1.

Είναι δε $\Pi_1(\rho) \neq 0$ γιατί αν ήταν $\Pi_1(\rho) = 0 \rightarrow \kappa\Pi(\rho) = 0 \rightarrow$ ο ρ ρίζα του $\Pi(x)$ οπότε $\Pi(x) = (x-\rho)A(x)$ και τότε το $f(x) = (x-\rho)^{\kappa+1}A(x)$ δηλαδή ο ρ θα ήταν ρίζα του f(x) με πολλαπλότητα κ+1 που είναι άτοπο.

Για να δείξουμε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^\nu+1$ διαιρείται με το $(x-1)^2$ αρκεί να δείξουμε ότι το 1 είναι ρίζα του f(x) και το 1 είναι ρίζα του f'(x).

Δηλαδή: $f(1) = 0 \leftrightarrow \nu-\nu-1+1 = 0$ και $f'(x) = \nu(\nu+1)x^\nu-\nu(\nu+1)x^{\nu-1} \rightarrow$

$\to f'(1) = 0 \leftrightarrow \nu(\nu+1)-\nu(\nu+1) = 0$. Άρα το $(x-1)^2$ διαιρεί το $f(x)$.

44. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με διπλή ρίζα τον αριθμό ρ. Δείξετε ότι: $\alpha\rho^2+2\beta\rho+3\gamma = 0$

Λύση: Επειδή ο ρ είναι διπλή ρίζα ισχύει $f(\rho) = 0$ και $f'(\rho) = 0$.
Αλλά $f(\rho) = \rho^3+\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma = 0$ (1) και $f'(x) = 3x^2+2\alpha x+\beta \to$
$\to f'(\rho) = 3\rho^2+2\alpha\rho+\beta = 0$ (2).
Από τις (1) και (2) απαλοίφουμε το ρ^3. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με -3, την (2) με ρ και τις προσθέτουμε οπότε έχουμε:
$-3\rho^3-3\alpha\rho^2-3\beta\rho-3\gamma = 0 \wedge 3\rho^3+2\alpha\rho^2+\beta\rho = 0 \to -\alpha\rho^2-2\beta\rho-3\gamma = 0 \to \alpha\rho^2+2\beta\rho+3\gamma = 0$

45. Έστω οι συναρτήσεις f και g. Αν $f(x) = g(e^{4x})$ και η g έχει παράγωγο δεύτερης τάξης να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της f.

Λύση: Είναι: $f'(x) = g'(e^{4x})(e^{4x})' = 4e^{4x}g'(e^{4x})$ και αν παραγωγίσουμε άλλη μια φορά έχουμε:
$f''(x) = 4e^{4x}(4x)'g'(e^{4x})+4e^{4x}g''(e^{4x})(e^{4x})' =$
$= 16e^{4x}g'(e^{4x})+16e^{8x}g''(e^{4x}) = 16e^{4x}(g'(e^{4x})+e^{4x}g''(e^{4x}))$.

46. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\xi\in\mathbb{R}$ τότε δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{xf(\xi)-\xi f(x)}{x-\xi} = f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

Λύση: Είναι $\displaystyle\lim_{x\to\xi}\frac{xf(\xi)-\xi f(x)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{xf(\xi)-\xi f(x)+f(\xi)\xi-\xi f(\xi)}{x-\xi} =$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{f(\xi)(x-\xi)}{x-\xi} - \lim_{x\to\xi}\frac{\xi(f(x)-f(\xi))}{x-\xi} = f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

47. Αν ρ_1,ρ_2,ρ_3 ρίζες διαφορετικές της τριτοβάθμιας εξίσωσης $f(x) = 0$

Δείξετε ότι i) $\displaystyle\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}$,

ii) $\displaystyle\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{f'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = 0$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι το $f(x)$ γράφεται:
$f(x) = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$ (1) $\to f'(x) = \alpha(x-\rho_2)(x-\rho_3)+$
$+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_3)+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ (2).
Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}$$

ii. Η (2) με $x = \rho_1, \rho_2, \rho_3$ δίνει:

$f'(\rho_1) = \alpha(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)$, $f'(\rho_2) = \alpha(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)$,

$f'(\rho_3) = \alpha(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)$ και το πρώτο μέλος γίνεται:

$$\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} + \frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_3}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)} \right) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0.$$

48. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$ Δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει η παράγωγος της f και είναι μηδέν $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Η δοσμένη σχέση γράφεται: $0 \le \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le |x-y| \quad (x \ne y)$

οπότε αν πάρουμε όρια όταν $x \to y \Rightarrow x-y \to 0$ και επομένως είναι και

$\lim\limits_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(y) = 0 \;\forall\, y \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

49. Έστω οι συναρτήσεις f και g με παράγωγο στο $\rho \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ και $g(\rho) \ne 0$, $g'(\rho) \ne 0$.

Αν $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και $F'(\rho) = 0$ δείξετε ότι $F(\rho) = \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$

Λύση: Παραγωγίζουμε τη σχέση $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

και με $x = \rho$ παίρνουμε: $F'(\rho) = \frac{f'(\rho)g(\rho)-f(\rho)g'(\rho)}{g^2(\rho)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(\rho)g(\rho) = f(\rho)g'(\rho) \Rightarrow \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)} = \frac{f(\rho)}{g(\rho)} \quad (1)$

Η δοσμένη σχέση με $x = \rho$ δίνει $F(\rho) = \frac{f(\rho)}{g(\rho)} \quad (2)$

Από τις (1) και (2) έχουμε: $F(\rho) = \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τον ορισμό να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. f με $f(x) = x^2-x-3$ στο σημείο $x = -1$

2. g με $g(x) = \frac{1}{x^2+2}$ στο σημείο $x = 2$

3. h με $h(x) = x^3-3x+2$ στο σημείο $x = -1$

4. φ με $\varphi(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$ στο σημείο $x_0 = 0$

2. Όμοια των συναρτήσεων:

1. f με $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x > 0 \\ x^2+2x-1, & x \leq 0 \end{cases}$ στο $x = 0$

2. g με $g(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & x \leq 1 \\ 5x+6, & x > 1 \end{cases}$ στο σημείο $x = 1$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

1. f με $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha}\,\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

2. g με $g(x) = \begin{cases} x^3\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

3. h με $h(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3\pi|x|}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4. φ με $\varphi(x) = \begin{cases} -x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν έχουν παράγωγο στη θέση $x = 0$.

4. Να βρεθεί η παράγωγος της f με $f(x) = |x^2-x-2|$.

5. Όμοια να βρεθεί η παράγωγος της f με $f(x) = |x-1|(x^2+x+1)$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2-x+2, & x \geq 0 \\ x^2+x+2, & x < 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτομένη στο σημείο $x = 0$ της γραφικής παράστασής της.

7. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \in [0,1] \\ x^5, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Να βρεθεί η συνάρτηση πρώτης παραγώγου και η συνάρτηση δεύτερης παραγώγου.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Έχει η f παράγωγο στη θέση $x = 0$, είναι συνεχής η f στη θέση $x = 0$;

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x+y) = f(x)f(y)$ $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}$.
Αν υπάρχει η παράγωγος στη θέση $x = 0$ και ισχύει $f(0) = 1$.
Δείξετε ότι $f'(x) = f(x)f'(0)$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$.

10. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{4-x}+\sqrt{-x^2+9x-20}$ στη θέση $x = 4$ και $x = 5$.

11. Να βρεθεί αν υπάρχει η παράγωγος της f με $f(x) = e^{-2|x|+8}$ στο σημείο $x = 0$.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x|x|$. Έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στις θέσεις $x = 0$ και $x = 1$;

13. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα διαγράμματα των συναρτήσεων:
1. $f(x) = \sqrt{x}$ στο σημείο $x = \frac{1}{9}$
2. $h(x) = \sqrt{|x|}$ στο σημείο $x = 0$
3. $g(x) = -\sqrt{x+3}$ στο σημείο $x = -3$
4. $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2}$ στο σημείο $x = 0$

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2-4x+3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης στο σημείο $x = 2$ του διαγράμματός της.

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x$. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ώστε η εφαπτομένη στο διάγραμμα της f να είναι η ευθεία $y = x$.

16. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάγραμμα της f με $f(x) = \lambda x^3+2$ να τέμνει τον άξονα $x'x$ υπό γωνία $\varphi = \pi/4$.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+\lambda x+\mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να προσδιοριστούν

τα κ,λ ώστε η ευθεία $y = 4x$ να εφάπτεται του διαγράμματος της f στο σημείο $x = 1$.

18. Δείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη του διαγράμματος της f με $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ και τους άξονες είναι σταθερό.

19. Να βρεθούν τα α,β ώστε η ευθεία $y = 4x+1$ να εφάπτεται του διαγράμματος της f με $f(x) = x^2+2\alpha x+3\beta$ στο σημείο $(1,5)$.

20. Να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης $y^2 = 8x$ που διέρχονται από το σημείο $(0,-2)$.

21. Να βρείτε ένα σημείο πάνω στην καμπύλη $f(x) = x^2-2x+5$ στο οποίο η τεταγμένη να αυξάνει εξ φορές γρηγορότερα από την τετμημένη.

22. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = \sqrt{4x^2-5x-6}$
2. $h(x) = \sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$
3. $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3x+4}}$
4. $f_1(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$
5. $h_1(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+1}}$
6. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x+\sqrt{x}}$

23. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = \eta\mu^4(4x+1)$
2. $h(x) = 2\sigma\upsilon\nu x-x^3\eta\mu x$
3. $g(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$
4. $\varphi(x) = \eta\mu(\nu x)\sigma\upsilon\nu^\nu x$
5. $f_1(x) = x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2(x^3)$
6. $h_1(x) = x\ln(\sigma\upsilon\nu x)$
7. $g_1(x) = e^{2x}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$
8. $\varphi_1(x) = x^\nu\ln(x^\nu)$

24. Όμοια να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

1. $f(x) = (x+\sqrt{1+x^2})^3(x-\sqrt{1+x^2})^4$
2. $g(x) = \frac{\eta\mu^\nu x-\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$
3. $\varphi(x) = \frac{\eta\mu^2\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}}$
4. $f_1(x) = \sqrt{1+\eta\mu^2(2x)}+\sqrt{1-\eta\mu^2(2x)}$
5. $g_1(x) = \ln(\frac{e^x+1}{e^x-1})+\varepsilon\varphi(e^{-x})$
6. $\varphi_1(x) = \ln[\ln(\eta\mu x+e^{-x})]$

25. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $f(x) = (e^x)^x$
2. $h(x) = e^{x^2+3} + \ln(\eta\mu x)$
3. $g(x) = \sqrt{\ln(\eta\mu x)} + e^{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$
4. $\varphi(x) = x^{x^x}$
5. $f_1(x) = (\ln x)^{e^x}$
6. $h_1(x) = (x^2+x+1)^{x^2+2}$
7. $h_1(x) = (\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi x}$
8. $\varphi_1(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{e^{x^2+x+2}}$

26. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $f(x) = (\ln x)^{\eta\mu x}$
2. $h(x) = (3x^2+5x)^{x^2+1} + \ln(e^x+1)^{x^3+2}$
3. $g(x) = x^{x^3+2x} + 5^{\sqrt{x}}$
4. $f_1(x) = (1+\sqrt{x}+x)^{\sqrt{x}+2}$
5. $h_1(x) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^x$
6. $g_1(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{\ln x}$

27. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$
2. $h(x) = \sigma\upsilon\nu^4(\sqrt{x} + e^{x^2+1})$
3. $\varphi(x) = \eta\mu^\nu(\alpha x)\sigma\upsilon\nu^\mu(\beta x)$
4. $g(x) = \eta\mu(\eta\mu x^\nu)$
5. $f_1(x) = e^{e^x}e^x$
6. $h_1(x) = (\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\nu e^x$
7. $\varphi_1(x) = x^{x^2+1} + 2^{\sqrt{x+e^x}}$
8. $g_1(x) = 4\,\frac{\sigma\upsilon\nu(4x)}{\eta\mu(4x)}$

28. Αν $f(x) = \ln\frac{1}{1+x}$ δείξετε ότι $xf'(x)+1 = e^{f(x)}$

29. Αν $f(x) = (\ln)^{e^x}$, τότε $f'(e) = e^{e-1}$

30. Αν $f(x) = x^2\ln x$, τότε $2f(x)+x^2 = xf'(x)$

31. Αν $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, τότε $4(1+x^2)f''(x) = f(x)-4xf'(x)$

32. Αν $f(x) = \alpha e^{2x}+\beta xe^{2x}+e^x$, τότε $e^x = f''(x)-4f'(x)+4f(x)$

33. Αν $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ τότε $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = f(x)$.

34. Αν $f(x^3) = x^6$, τότε $f'(8) = 16$.

35. Αν $f(x) = x^2+x(1-\ln x)$, τότε $x^2f'''(x) = 1$

36. Αν $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, τότε $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu} \frac{\nu!}{x^{\nu+1}} (\ln x-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{\nu}))$

37. Να βρεθούν οι παράγωγοι 3ης τάξεως των συναρτήσεων

1. $f(x) = e^x \ln x$	4. $f_1(x) = x^2 ημ2x$
2. $h(x) = x^3 e^x$	5. $h_1(x) = \ln(x^2)$
3. $g(x) = e^x ημx$	6. $g_1(x) = x\ln x$

38. Δείξετε ότι η παράγωγος ν-οστής τάξεως της $f(x) = συνx$ είναι $f^{(\nu)}(x) = συν(x+\frac{\nu\pi}{2})$

39. Όμοια δείξετε ότι η ν-οστή παράγωγος της $f(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ είναι $f^{(\nu)}(x) = \lambda^{\nu+1} e^{\lambda x}$

40. Αν $f(x) = e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$, τότε $4xf''(x)+2f'(x) = f(x)$

41. Αν $f(x) = x^{\nu}/\nu \in \mathbb{N}$, τότε $f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+...+\frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} = 2^{\nu}$

42. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = x^4-4(\alpha-\beta)x^3+(2\alpha-3\beta)x^2+4\alpha x-5\beta+8$. Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο να έχει τον αριθμός $x = 1$ διπλή ρίζα.

43. Να προσδιορίσετε όλα τα ακέραια πολυώνυμα για τα οποία είναι $[f'(x)]^2 = f(x)$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$.

44. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\gamma \neq 0$ έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\rho \in \mathbb{R}$ δείξετε ότι $\alpha\rho^2+2\beta\rho+3\gamma = 0$.

45. Αν $A,B,\Gamma,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ τότε να βρεθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες, ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}+\Gamma e^{\gamma x}$ να είναι μηδέν $\forall$ $x \in \mathbb{R}$.

46. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^4 συν\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Υπάρχει η δεύτερη παράγωγος στη θέση $x = 0$.

47. Δίνονται οι συναρτήσεις

1. $f(x) = x^3-2x^2+1$ 2. $h(x) = x-ημ2x$

3. $g(x) = \frac{1}{2}ημ^2x-\frac{1}{3}ημ^3 x,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

4. $φ(x) = \frac{ημx-συνx}{2e^x},\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

Να βρείτε την πρώτη παράγωγο τους και σε συνέχεια να λύσετε τις εξισώσεις $f'(x) = 0$, $h'(x) = 0$, $g'(x) = 0$, $φ'(x) = 0$.

48. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} λe^{μx} & αν\ x\le 0 \\ ημ2x+μσυν3x & αν\ x>0 \end{cases}$

Να βρεθούν τα $λ,μ\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει η $f'(0)$.

49. Αν f και g συναρτήσεις ορισμένες και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[0,2]$ και $2f^2(x)-g^3(x)+9 = 0\ \forall\ x\in[0,2]$.

Να βρεθούν τα $g(1), g'(1)$ αν $f(1) = 3$ και $f'(1) = -1$.

50. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στο σημείο (x_0,y_0) του διαγράμματος της εξίσωσης του κύκλου $x^2+y^2 = R^2$ της έλλειψης $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2} = 1$, της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2}-\frac{y^2}{β^2} = 1$ και της παραβολής $y^2 = 2Px$

51. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \max\{συνx, συν^3x\}$

Να εξετάσετε αν παραγωγίζεται στο διάστημα $[0,\pi]$.

52. Αν $y = ασυν(\ln x)+βημ(\ln x)$, τότε $x^2y''+xy'+y = 0$

53. Αν $y = x^ν\ln x$, τότε $y^{(ν+1)} = \frac{ν!}{x}$, $ν\in\mathbb{N}^*$.

Εφαρμογές των παραγώγων.

5.8. Ακρότατα συνάρτησης.

Ορισμός. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Δ παρουσιάζει ή έχει **τοπικό μέγιστο** αντίστοιχα **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $x_0 \in \Delta$ τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε
$\forall\, x \in \Delta$ με $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ αντίστοιχα $f(x) \geq f(x_0)$.

Πρόταση. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο ανοιχτό διάστημα (α,β). Είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις: 1. Ο πραγματικός αριθμός $f(x_0)$ λέγεται τοπικό μέγιστο αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο.
2. Ένα ολικό μέγιστο αντίστοιχα ελάχιστο είναι και τοπικό μέγιστο αντίστοιχα ελάχιστο όχι το αντίστροφο.
3. Το σημείο x_0 πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του (α,β) και όχι κάποιο από τα άκρα του (α,β) γιατί μπορεί η f να έχει ακρότατα σ'αυτό και η παράγωγος της f να μην είναι μηδέν.
4. Ο μηδενικός της παραγώγου στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι το x_0 είναι θέση ακροτάτου.
5. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο στο $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ και να μην υπάρχει η παράγωγος σ'αυτό.
6. Τα ακρότατα μιας συνάρτησης θα τα αναζητάμε:
 i) Στα σημεία που γίνεται μηδέν η πρώτη παράγωγος της f (δηλ. στις ρίζες της $f'(x) = 0$).
 ii) Στα σημεία που δεν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f.

Θεώρημα Rolle. Αν η συνάρτηση f είναι
 i) Συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
 ii) Παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β)
 iii) $f(\alpha) = f(\beta)$
Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Παρατηρήσεις: 1. Καμμιά από τις συνθήκες δεν μπορεί να παραληφθεί γιατί οδηγούμεθα σε λαθεμένα συμπεράσματα.

2. Οι υποθέσεις:

i) Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

ii) Η f παραγωγίσιμος στο (α,β)

iii) $f(\alpha) = f(\beta)$

ονομάζονται συνθήκες του Rolle.

Θεώρημα μέσης τιμής (Θ.Μ.Τ.). Αν μια συνάρτηση f είναι

i) συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

ii) Παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β)

Τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1)

Παρατήρηση: Αν $\beta = \alpha+\varepsilon$, $\varepsilon>0 \rightarrow \beta-\alpha = \varepsilon$ τότε αν $\alpha<\xi<\alpha+\varepsilon \rightarrow$
$\rightarrow 0<\xi-\alpha<\varepsilon \rightarrow 0 < \dfrac{\xi-\alpha}{\varepsilon} < 1 \rightarrow 0<\theta<1$ με $\theta = \dfrac{\xi-\alpha}{\varepsilon}$ θα έχουμε $\xi = \alpha+\theta\varepsilon$ και η σχέση (1) γίνεται: $f'(\alpha+\theta\varepsilon) = \dfrac{f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)}{\varepsilon} \leftrightarrow f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha) =$
$= \varepsilon f'(\alpha+\theta\varepsilon)$ με $0<\theta<1$.

Θεώρημα. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = c$.

Θεώρημα. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο Δ και $\forall\, x\in\Delta \rightarrow f'(x) = g'(x)$ τότε $f(x)-g(x) = c$.

Ορισμός. Ονομάζουμε **παράγουσα (ή αρχική)** συνάρτηση της f κάθε συνάρτηση F ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ τέτοια ώστε

$$F'(x) = f(x)$$

Θεώρημα: Αν F μια παράγουσα της f τότε οι συναρτήσεις F+c είναι το σύνολο όλων των παραγουσών της f. Γιατί: $(F+c)' = F' = f$.

5.9. Μονοτονία συνάρτησης με παραγώγους.

Θεώρημα.

α) Αν $f'(x)\geq 0\ \forall\, x\in\Delta \leftrightarrow f\uparrow$ στο Δ

β) Αν $f'(x)\leq 0\ \forall\, x\in\Delta \leftrightarrow f\downarrow$ στο Δ

γ) Αν $f'(x)>0\ \forall\, x\in\Delta \leftrightarrow f\uparrow$ στο Δ

δ) Αν $f'(x) < 0 \ \forall x \in \Delta \to f\downarrow$ στο Δ

ε) Αν $f'(x) = 0 \ \forall x \in \Delta \leftrightarrow f$ = σταθερή στο Δ.

5.10. Ακρότατα με παραγώγους.

Θεώρημα. Αν η f παραγωγίζεται στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f'(\xi) = 0$ τότε:

i) Αν $\forall x \in (\alpha,\xi]$ είναι $f'(x) \geq 0$ και $\forall x \in [\xi,\beta)$ είναι $f'(x) \leq 0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και είναι $\max f = f(\xi)$.

ii) Αν $\forall x \in (\alpha,\xi]$ είναι $f'(x) \leq 0$ και $\forall x \in [\xi,\beta)$ είναι $f'(x) \geq 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και είναι $\min f = f(\xi)$.

Θεώρημα. Αν η f είναι παραγωγίσιμη δύο φορές στο ανοιχτό διάστημα Δ και $\xi \in \Delta$ με $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) \neq 0$ τότε:

i) Αν $f''(\xi) > 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο και είναι το $f(\xi)$.

ii) Αν $f''(\xi) < 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο και είναι το $f(\xi)$.

Σημείωση: Αν η $f''(\xi) = 0$ και πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγος είναι $f^{(\nu)}(\xi) \neq 0$ τότε αν $\nu = 2\kappa+1$, $\kappa \in \mathbb{N}$ η f δεν έχει ακρότατο στη θέση $x = \xi$ ενώ αν $\nu = 2\kappa / \kappa \in \mathbb{N}$ τότε η f έχει ακρότατο στη θέση $x = \xi$ και αν $f^{(\nu)}(\xi) > 0$ είναι $\mathrm{Min} f = f(\xi)$ και αν $f^{(\nu)}(\xi) < 0$ είναι $\mathrm{Max} f = f(\xi)$.

5.11. Κοίλα και κυρτά συνάρτησης.

Ορισμός. Μια συνάρτηση f λέγεται κοίλη στο διάστημα Δ τότε και μόνο τότε όταν η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο (x_0,y_0) με $x_0 \in \Delta$ βρίσκεται πάνω από αυτό.

Ορισμός. Μια συνάρτηση f λέγεται **κυρτή** στο διάστημα Δ τότε και μόνο τότε όταν η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο (x_0,y_0) με $x_0 \in \Delta$ βρίσκεται κάτω από αυτό.

Σημείωση: Αν $(\xi, f(\xi))$ τυχαίο σημείο του διαγράμματος της f και $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ η εξίσωση της εφαπτομένης σ'αυτό τότε αν η f είναι κοίλη ισχύει $f(x) < f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$ και αν η f είναι κυρτή ισχύει: $f(x) > f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) \ \forall x \in \Delta - \{\xi\}$.

Θεώρημα. Αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f τότε:

i) Εάν $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in \Delta \rightarrow f$ κυρτή στο Δ

ii) Εάν $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in \Delta \rightarrow f$ κοίλη στο Δ

Σημείωση: Εάν η f'' της f είναι θετική τότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό και αν η f'' είναι αρνητική τότε η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

5.12. Σημεία καμπής της f.

Ορισμός. Μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα (α,β) θα λέμε ότι έχει σημείο καμπής το σημείο $(\xi,f(\xi))$ με $\xi \in (\alpha,\beta)$ του διαγράμματος της όταν και μόνο όταν είναι κοίλη, αντίστοιχα κυρτή στο (α,ξ) και κυρτή αντίστοιχα κοίλη στο διάστημα (ξ,β).

Σημείωση: 1. Αν η f παραγωγίζεται δύο φορές στο διάστημα (α,β) και $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f''(\xi) = 0$ τότε αν η f'' αλλάζει σημείο εκατέρωθεν του ξ τότε η f παρουσιάζει καμπή στο ξ.

2. Αν στη θέση $x = \xi \in (\alpha,\beta)$ είναι $f''(\xi) = 0$ και $f'''(\xi) \neq 0$ τότε στο σημείο $x = \xi$ η f έχει καμπή.

3. Αν δεν υπάρχει η f'' στη θέση $x = \xi \in (\alpha,\beta)$ τότε εξετάζουμε το πρόσημο της f'' στην περιοχή του ξ και αν $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (\xi-\varepsilon,\xi)$ και $f''(x) > 0 \ \forall x \in (\xi,\xi+\varepsilon)$ αντίστοιχα $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in (\xi-\varepsilon,\xi)$ και $f''(x) < 0$ $\forall \ x \in (\xi,\xi+\varepsilon)$ τότε στο σημείο $x = \xi$ η f έχει καμπή.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2-4x-3$.
Δείξετε ότι στο σημείο $x_0 = 2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Λύση: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για να έχει η f στο σημείο $x_0 = 2$ ολικό ελάχιστο πρέπει $\forall \ x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) \geq f(2) \longleftrightarrow$
$x^2-4x-3 \geq 4-8-3 \longleftrightarrow x^2-4x-3+7 \geq 0 \longleftrightarrow x^2-4x+4 \geq 0 \longleftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
Άρα η f έχει στο σημείο $x_0 = 2$ ολικό ελάχιστο.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\text{ημ}x-\text{συν}x}{e^x}$ και $x \in [0,2\pi]$.
Να βρεθούν τα πιθανά ακρότατα της f.

Λύση: Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f.

Είναι: $f'(x) = \frac{(ημx-συνx)'e^x-e^x(ημx-συνx)}{e^{2x}} = \frac{2e^x συνx}{e^{2x}} = \frac{2συνx}{e^x}$

Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων θα είναι τα σημεία του διαστήματος $[0,2π]$ στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος.

Είναι $f'(x) = 0 \leftrightarrow συνx = 0 \leftrightarrow συνx = συν\frac{π}{2} \rightarrow x = 2κπ \pm \frac{π}{2}$, $κ \in Z$

Αλλά $x \in [0,2π] \rightarrow 0 \leq 2κπ + \frac{π}{2} \leq 2π \leftrightarrow -\frac{π}{2} \leq 2κπ \leq \frac{3π}{2} \leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq κ \leq \frac{3}{4}$,

$κ \in Z \rightarrow κ = 0$ οπότε το μοναδικό σημείο του $(0,2π)$ είναι το $x = \frac{π}{2}$

Επίσης $0 \leq 2κπ - \frac{π}{2} \leq 2π \rightarrow \frac{π}{2} \leq 2κπ \leq \frac{5π}{2} \rightarrow \frac{1}{4} \leq κ \leq \frac{5}{4}$, $κ \in Z \rightarrow κ = 1$

άρα υπάρχει και το σημείο $x = \frac{3π}{2}$.

Επομένως οι πιθανές θέσεις ακροτάτων στο διάστημα $[0,2π]$ είναι τα σημεία $x = \frac{π}{2}$ και $x = \frac{3π}{2}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x + 1$.

Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.

Λύση: Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f θα είναι στις ρίζες της πρώτης παραγώγου. Είναι $f'(x) = e^x - 1$ και $f'(x) = 0 \leftrightarrow e^x - 1 = 0 \leftrightarrow e^x = e^0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow x = 0$. Άρα πιθανή θέση ακρότατου είναι η $x = 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$

Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} = (-\infty,1] \cup (1,+\infty)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = \begin{cases} 4x, & x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$

και στη θέση $x = 1$ είναι $f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 4$

και $f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3-x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$.

Άρα η f δεν έχει παράγωγο στο σημείο $x = 1$.

Η πρώτη παραγωγος είναι μηδέν όταν $4x = 0 \leftrightarrow x = 0$ που είναι δεχτή γιατί $x < 1$. Άρα μια πιθανή θέση ακρότατου είναι η $x = 0$ στην οποία υπάρχει η πρώτη παράγωγος.

Εξετάζουμε τώρα μήπως η f έχει ακρότατο στο σημείο $x = 1$ που δεν υπάρ-

χει η πρώτη παράγωγος.

Παρατηρούμε ότι όταν $0<x<1$ είναι $f'(x)>0$ και όταν $x>1$ είναι $f'(x)<0$

Άρα η f παρουσιάζει και στη θέση $x=1$ ακρότατο γιατί αλλάζει σημείο η f' στην περιοχή του 1 και είναι το $f(1)=2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3-4x^2+3x$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Λύση: α) Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ σαν πολυωνυμική

β) Έχει παράγωγο $\forall\ x\in(0,1)$ και είναι $f'(x)=3x^2-8x+3$.

γ) Είναι $f(0)=f(1)=0$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

Πράγματι $f'(\xi)=0 \leftrightarrow 3\xi^2-8\xi+3=0 \leftrightarrow \xi_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-9}}{3}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3} \rightarrow$

$\xi=\frac{4-\sqrt{7}}{3}\in(0,1)$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις:

1. f με $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}-2, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$

2. g με $g(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ στο διάστημα $[-1,1]$.

3. h με $h(x)=2x^4$ στο διάστημα $[1,2]$

4. φ με $\varphi(x)=x^5$ στο διάστημα $[-1,1]$.

Να εξετάσετε ποιές από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ισχύουν και ποιές δεν ισχύουν, και συμπεράνετε ότι οι συνθήκες Rolle είναι αναγκαίες και όχι ικανές.

Λύση: 1. Η f είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{2}{x}-2)=+\infty$. Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x=0$.

Είναι $f(0)=f(1)=0$ και $f'(x)=-\frac{2}{x^2}\ \forall\ x\in(0,1)$

Άρα δεν ισχύουν και οι τρείς συνθήκες του Rolle, και συνεπώς δεν υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

2. Η g είναι συνεχής $\forall\ x\in(-1,1)$ γιατί $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{x^2}-1=\sqrt[3]{x_0^2}-1$ και $g(x_0)=\sqrt[3]{x_0^2}-1$. Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

Είναι $g(-1)=g(1)=0$ και $g'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ που υπάρχει $\forall\ x\in(-1,1)$

εκτός της τιμής $x = 0$. Επομένως η g δεν παραγωγίζεται $\forall x \in (-1,1)$.
Άρα δεν ισχύουν και οι τρεις συνθήκες του Rolle στο $[-1,1]$ επομένως δεν υπάρχει $\xi \in (-1,1)$: $g'(\xi) = 0$.

3. Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ γιατί με $x_0 \in [1,2] \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = h(x_0) = 2x_0^4$. Η h έχει παράγωγο $\forall x \in (1,2)$ και είναι $h'(x) = 8x^3$ και $h(1) = 2$, $h(2) = 32$ άρα $h(1) \neq h(2)$.
Επομένως δεν ισχύουν οι συνθήκες του Rolle στο $[1,2]$ και δεν υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$.

4. Η φ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και με $x_0 \in [-1,1]$ είναι $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = x_0^5$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και είναι $\varphi'(x) = 5x^4$ και $\varphi(-1) = -1 \neq \varphi(1) = 1$.
Όμως υπάρχει $\xi \in (-1,1)$: $\varphi'(\xi) = 0$. Πράγματι $\varphi'(\xi) = 0 \leftrightarrow 5\xi^4 = 0 \leftrightarrow \xi = 0 \in (-1,1)$.
Επομένως οι συνθήκες Rolle είναι αναγκαίες και όχι ικανές.

7. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με κ διακεκριμένες πραγματικές ρίζες. Δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει $\kappa-1$ τουλάχιστο πραγματικές ρίζες.

Λύση: Αν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{\kappa-1}, \rho_\kappa$ είναι οι πραγματικές ρίζες της f τότε αν τοποθετηθούν κατά σειράν μεγέθους πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών

$\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3 \qquad\qquad \rho_{\kappa-1} \quad \rho_\kappa$

ορίζουν $\kappa-1$ διαστήματα. Σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα ισχύουν οι συνθήκες του Rolle. Γιατί η f είναι συνεχής π.χ στο $[\rho_1, \rho_2]$ σαν πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) σαν άθροισμα συναρτήσεων που έχουν παραγώγους στο $\mathbb{R}$ άρα και στο (ρ_1, ρ_2). Είναι δε και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ γιατί τα ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες του $f(x)$.
Άρα στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ ισχύουν οι συνθήκες Rolle επομένως υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
Δηλαδή σε έκαστο διάστημα υπάρχει μια τουλάχιστο ρίζα της $f'(x)$ και επειδή τα διαστήματα είναι πλήθους $\kappa-1$ η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει $\kappa-1$ τουλάχιστο πραγματικές ρίζες.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-3x+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δείξετε ότι δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες στο διάστημα $[0,1)$.

Λύση: Έστω ότι η f έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $[0,1)$ τις ρ_1,ρ_2. Τότε στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]\subset[0,1)$ η f πληροί τις συνθήκες του Rolle γιατί είναι συνεχής σαν πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ γιατί ρ_1,ρ_2 ρίζες της $f(x) = 0$.
Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(0,1)$: $f'(\xi) = 0$.
Αλλά $f'(\xi) = 3\xi^2-3 = 0 \Longleftrightarrow \xi^2 = 1 \Longleftrightarrow \xi = \pm 1 \notin (0,1)$.
Άρα η f δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες στο $[0,1)$.

9. **Δίνεται το ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ για το οποίο ισχύει $f'(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x)<0$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$.**
Δείξετε ότι το $f(x)$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Λύση: Έστω ότι το $f(x)$ έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1\neq\rho_2$ τότε στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ ισχύει το θεώρημα Rolle επομένως θα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$: $f'(\xi) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ επομένως και για $x = \xi$ ισχύει $f'(\xi)>0$ ή $f'(\xi)<0$.

10. **Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^5+3x^3+2x+10$.**
Δείξετε ότι η $f(x)$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα.

Λύση: 1ος τρόπος. Επειδή η $f(x)$ είναι περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα ή και από Bolzano επειδή είναι συνεχής σαν πολυωνυμική στο $\widehat{\mathbb{R}}$ και $f(+\infty) = +\infty$, $f(-\infty) = -\infty$ δηλαδή $f(+\infty)f(-\infty) = -\infty<0$ υπάρχει ένας τουλάχιστο $\xi\in\mathbb{R}$: $f(\xi) = 0$. Η ρίζα ξ είναι και μοναδική γιατί είναι $f'(x) = 5x^4+9x^2+2>0$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως το διάγραμμα της τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο ξ.

2ος τρόπος. Αν η $f(x)$ είχε δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 τότε στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ η f πληροί τις συνθήκες Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
Αλλά $f'(\xi) = 5\xi^4+9\xi^2+2>0$ $\forall$ $\xi\in\mathbb{R}$.
Άρα η $f(x)$ δεν είναι δυνατόν να έχει δύο ρίζες πραγματικές.
Η f έχει μια μόνο πραγματική ρίζα γιατί είναι περιττού βαθμού.

11. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (\frac{4}{5})^x+(\frac{3}{5})^x-1$.**

Δείξετε ότι μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $(\frac{4}{5})^x, (\frac{3}{5})^x, -1$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = (\frac{4}{5})^x \ln(\frac{4}{5}) + (\frac{3}{5})^x \ln\frac{3}{5} < 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ (1)

και $f(+\infty) = -1$, $f(-\infty) = +\infty \rightarrow f(+\infty)f(-\infty) = -\infty < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστο πραγματικός αριθμός $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = 0$.

Λόγω δε της (1) ο ξ είναι μοναδικός γιατί η f είναι ↓ στο $\mathbb{R}$.

Επομένως το διάγραμμα της τέμνει τον άξονα x'x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη ξ.

12. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ και το $\varphi(x) = 4x^3-18x^2+22x-6$. Δείξετε ότι το $\varphi(x)$ έχει ρίζες θετικές και μικρότερες του 3.

Λύση: Οι ρίζες του $f(x)$ είναι 0,1,2,3 επομένως σε κάθε διάστημα $[0,1],[1,2],[2,3]$ ισχύει το Θ. Rolle και επομένως υπάρχει $\rho_1 \in (0,1)$: $f'(\rho_1) = 0$, $\exists \rho_2 \in (1,2)$: $f'(\rho_2) = 0$, $\exists \rho_3 \in (2,3)$: $f'(\rho_3) = 0$

Αν επομένως δείξουμε ότι $\varphi(x) = f'(x)$ τότε τα ρ_1, ρ_2, ρ_3 θα είναι οι ρίζες του $\varphi(x)$ και επειδή το $\varphi(x)$ είναι βαθμού 3ου θα είναι μόνο αυτές που είναι θετικές και μικρότερες του 3. Εύκολα αποδείχνουμε ότι $\varphi(x) = f'(x)$.

13. Δίνεται η εξίσωση $e^x-xe^x = 1$. Δείξετε ότι δεν έχει άλλη πραγματική ρίζα εκτός την $x = 0$.

Λύση: Θέτουμε $f(x) = e^x-xe^x-1$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι η $f(x)$ είχε και άλλη μια ρίζα $\rho \neq 0$ τότε στο διάστημα $[\rho,0]$ θα ίσχυε και $f(\rho) = f(0) = 0$ και επομένως η f θα ικανοποιούσε τις συνθήκες του Rolle άρα θα υπήρχε $\xi \in (\rho,0)$: $f'(\xi) = 0$.

Αλλά $f'(\xi) = e^\xi-e^\xi-\xi e^\xi = 0 \longleftrightarrow \xi e^\xi = 0 \longleftrightarrow \xi = 0$ που είναι άτοπο αφού $\xi \neq 0$. Ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x = 0$.

14. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+\kappa x+\lambda, & x \in [-2,0) \\ \mu x^2+x+1, & x \in [0,2] \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα κ,λ,μ έτσι ώστε η f να πληροί τις συνθήκες Rolle στο διάστημα $[-2,2]$.

Λύση: Η f έχει $\mathcal{D}(f) = [-2,0) \cup [0,2]$ και συνεχής σ'αυτό εφ'όσον είναι συνεχής και στο σημείο 0.

Γιαυτό πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \rightarrow \lambda = 1$ (1)

Η f επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,0) \cup (0,2)$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+\kappa, & x\in(-2,0) \\ 2\mu x+1, & x\in(0,2) \end{cases}$$

και επειδή η f θα πρέπει να είναι και παραγωγίσιμη στο 0 ισχύει

$$f'(0^+) = f'(0^-) \leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\mu x^2+x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+\kappa x+1-1}{x} \leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\mu x+1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+\kappa)}{x} \leftrightarrow 1 = \kappa \quad (2)$$

Ακόμη πρέπει να ισχύει $f(-2) = f(2) \leftrightarrow 4-2\kappa+\lambda = 4\mu+2+1 \overset{(1),(2)}{\leftrightarrow} 4-2+1 = 4\mu+3 \leftrightarrow \mu = 0$.

Άρα για να πληροί η f τις συνθήκες Rolle πρέπει $\kappa = \lambda = 1$ και $\mu = 0$.

15. Δείξετε ότι η εξίσωση ημx−(1−x)συνx = 0 έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση: Θέτουμε $f(x) =$ ημx−(1−x)συνx. Η f είναι παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = (x-1)$ημx η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ είναι δε $F(0) = F(1) = 0$ επομένως η F πληροί τις συνθήκες του Rolle στο (0,1) άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $F'(\xi) = 0$.

Αλλά $F'(x) = f(x) \rightarrow F'(\xi) = f(\xi) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα (0,1).

16. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (α,β). Θεωρούμε και την συνάρτηση:

$$\varphi(x) = f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)\,\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Λύση: Η συνάρτηση φ πληροί τις συνθήκες του Rolle στο διάστημα [α,β] γιατί είναι συνεχής σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (α,β) και είναι

$$\varphi'(x) = -f'(x)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (1)$$

και $\varphi(\alpha) = 0$, $\varphi(\beta) = f(\alpha)-f(\beta)+(\beta-\alpha)\,\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 0$.

'Αρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi) = 0$.

Δηλαδή: $\varphi'(\xi) = -f'(\xi) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 0 \leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-x^2-3x+2$ να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0,2]$ και αν ναι να βρείτε $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $[0,2] \subset \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$.

'Αρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$

Είναι όμως $f'(x) = 3x^2-2x-3 \ \forall \ x \in (0,2)$ οπότε με $x = \xi$ είναι:

$3\xi^2-2\xi-3 = \frac{8-4-6+2-2}{2} \leftrightarrow 3\xi^2-2\xi-3 = -1 \leftrightarrow 3\xi^2-2\xi-2 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \xi_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3} = \frac{1\pm2}{3} \rightarrow \xi_1 = 1,\ \xi_2 = -\frac{1}{3}$.

Δεχτή ρίζα είναι η $\xi_1 = 1 \in (0,2)$

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 4x-1, & x \in [1,2] \\ x^2+3, & x \in (2,3] \end{cases}$

Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1,3]$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ γιατί είναι συνεχής στην θέση $x = 2$.

Πράγματι $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 7 = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(2)$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ γιατί $f'(2^-) = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{4x-1-7}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{4(x-2)}{x-2} = 4$

και $f'(2^+) = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2+3-7}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}(x+2) = 4$

Δηλαδή $f'(2^+) = f'(2^-) = 4$

Επομένως στο διάστημα $(1,3)$ ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \leftrightarrow f'(\xi) = \frac{9}{2}$ και επειδή $f'(\xi) = 2\xi$ είναι

$2\xi = \frac{9}{2} \leftrightarrow \xi = \frac{9}{4} \in (1,3)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη σ'αυτό με $f(0) = c$ και ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f'(x) \le \lambda \ \forall \ x \in (0,+\infty)$. Δείξετε ότι: $f(x) \le c+\lambda x$.

Λύση: Η f στο διάστημα $[0,+\infty)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ επομέ-

μένως θα τις ικανοποιεί και στο διάστημα $[0,x] \subset [0,+\infty)$. Άρα θα υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (1)

Επειδή δε $f'(x) \leq \lambda$ $\forall$ $x \in (0,+\infty)$ θα ισχύει και για $x = \xi$ οπότε $f'(\xi) \leq \lambda$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{f(x)-c}{x} \leq \lambda \leftrightarrow f(x) \leq \lambda x + c$ (επειδή $x > 0$).

20. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x) = 0$ $\forall$ $x \in (\alpha,\beta)$. Δείξετε ότι $f(x) = f(\alpha)$ $\forall$ $x \in [\alpha,\beta]$.

Λύση: Η f ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\beta]$ επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1) και αν στην (1) θέσουμε $\beta = x$ θα έχουμε $f'(\xi)(x-\alpha) = f(x)-f(\alpha)$ με $\alpha < \xi < x$ και επειδή $f'(x) = 0$ $\forall$ $x \in (\alpha,x)$ θα είναι και $f'(\xi) = 0$ οπότε:

$0 = f(x)-f(\alpha) \leftrightarrow f(x) = f(\alpha)$

21. $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ δείξετε ότι: $e^x \geq 1+x$

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι $e^x-x-1 \geq 0$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$. Όταν $x = 0$ είναι φανερή. Επομένως θα αποδείξουμε την ανισότητα όταν $x \neq 0$.

Θέτουμε $f(x) = e^x-x-1$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Άρα στο διάστημα $[x,0]$ ή $[0,x]$ ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ και επομένως υπάρχει $\xi \in (x,0)$ ή $\xi \in (0,x)$ ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(0)-f(x)}{0-x}$ ή $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Αλλά είναι $f'(x) = e^x-1$ και για $x = \xi \rightarrow f'(\xi) = e^\xi-1$. Αν τώρα είναι $\xi \in (x,0)$ τότε $e^\xi-1 < 0$ οπότε $\frac{f(0)-f(x)}{-x} < 0 \leftrightarrow f(0)-f(x) < 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow f(0) < f(x) \leftrightarrow 0 < e^x-x-1 \leftrightarrow e^x > x+1$.

Αν $\xi \in (0,x)$ τότε $e^\xi-1 > 0 \rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} > 0 \leftrightarrow f(x)-f(0) > 0 \leftrightarrow f(x) > f(0)$

$\leftrightarrow e^x-x-1 > 0 \leftrightarrow e^x > x+1$. Άρα $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$.

22. Δείξετε ότι $\forall$ $x \in \mathbb{R}^*_+$ ισχύει $\ln x \geq -\frac{1}{x}+1$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε την ανισότητα $\ln x+\frac{1}{x}-1 \geq 0$. Θέτουμε $f(x) = \ln x+\frac{1}{x}-1$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα και σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$. Αν επομένως θεωρήσουμε το

διάστημα $[x,1)\subset(0,1)$ και $(1,x]\subset(1,+\infty)$ τότε θα ισχύει σ'αυτό το Θ.Μ.Τ και επομένως θα υπάρχει $\xi\in(x,1)$ αντίστοιχα $\xi_1\in(1,x)$ έτσι ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ αντίστοιχα $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Αλλά με $x<\xi<1$ είναι $1-x>0$ και $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}=\frac{\xi-1}{\xi^2}<0$

Άρα $\frac{f(1)-f(x)}{1-x}<0 \Leftrightarrow f(1)-f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1>0$

$\Leftrightarrow \ln x>-\frac{1}{x}+1.$

Με $1<\xi_1<x$ είναι $x-1>0$ και $f'(\xi_1)=\frac{1}{\xi_1}-\frac{1}{\xi_1^2}=\frac{\xi_1-1}{\xi_1^2}>0.$

Άρα $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}>0 \Leftrightarrow f(x)-f(1)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow \ln x-1+\frac{1}{x}>0$

$\Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{x}+1$. Για $x=1$ είναι προφανής και ισχύει με το ίσο.

23. Να δείξετε ότι $\forall\ \alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ ισχύει: $(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta\le\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha\le(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1).

Λύση: Αν $\alpha=\beta$ είναι προφανής. Έστω $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ τότε $\beta-\alpha>0$ και η (1) γίνεται: $\sigma\upsilon\nu\beta<\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (2).

Από την (2) το μεσαίο σκέλος βοηθά να θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) οπότε γιαυτήν ισχύει το Θ.Μ.Τ.

Άρα $\exists\,\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}$

Είναι αρκετό επομένως να δείξουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\beta<f'(\xi)<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (3).

Επειδή δε $f'(\xi)=\sigma\upsilon\nu\xi$. Αρκεί να δείξουμε ότι: $\sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (4).

Επειδή όμως $\alpha<\xi<\beta$ και η συνάρτηση συν είναι φθίνουσα στο διάστημα (α,β) έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\alpha>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu\beta$ (5) που είναι η (4).

Άρα η (1) αληθεύει $\forall\ \alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

24. Δείξτε ότι $\forall\ \nu\in\mathbb{N}^*$ και $\alpha\ge\beta>0$ ισχύει $\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)\ge\alpha^\nu-\beta^\nu\ge\nu\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta)$ (1).

Λύση: Με $\alpha=\beta$ ισχύει με το ίσο. Έστω $\alpha>\beta>0$ τότε $\alpha-\beta>0$ και η (1) γράφεται $\nu\alpha^{\nu-1}>\frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha-\beta}>\nu\beta^{\nu-1}$ (2). Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^\nu$ που εί-

ναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(β,α)$, άρα σ'αυτό ισχύει το Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει $ξ \in (β,α)$ ώστε $f'(ξ) = νξ^{ν-1} = \frac{f(α)-f(β)}{α-β} = \frac{α^ν-β^ν}{α-β}$
και τότε για την απόδειξη της (2) αρκεί να δείξουμε ότι
$να^{ν-1} > νξ^{ν-1} > νβ^{ν-1}$ (3) $\Longleftrightarrow α^{ν-1} > ξ^{ν-1} > β^{ν-1} \Longleftrightarrow α > ξ > β$ που ισχύει.

25. Να υπολογιστούν οι παράγουσες των συναρτήσεων

1. $f(x) = x^8+x^5-x^4$
2. $g(x) = x^{-3}+x^{-2}$
3. $h(x) = 3ημx$
4. $φ(x) = 5συνx+x^2$
5. $f_1(x) = \frac{4}{x^4}$
6. $g_1(x) = \frac{2}{x}+e^x$
7. $h_1(x) = ημx+e^{2x}$

Λύση: 1. Είναι $F(x) = \frac{x^9}{9} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + c$.

Πράγματι έχουμε $F'(x) = \frac{9x^8}{9} + \frac{6x^5}{6} - \frac{5x^4}{5} = x^8+x^5-x^4$

2. Όμοια είναι: $G(x) = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1} + c$.

Πράγματι έχουμε $G'(x) = \frac{-2x^{-3}}{-2} + \frac{(-1)x^{-2}}{-1} = x^{-3}+x^{-2}$

3. Είναι $H(x) = -3συνx+c$.

4. Είναι $Φ(x) = 5ημx+\frac{x^3}{3}+c$.

5. Είναι $f_1(x) = 4x^{-4}$ οπότε η παράγουσα της είναι $F_1(x) = 4\frac{x^{-3}}{-3}+c$

6. Είναι $G_1(x) = 2\ln x+e^x+c$. Πράγματι είναι $G_1'(x) = 2\frac{1}{x}+e^x = g_1(x)$.

7. Είναι $H_1(x) = -συνx+\frac{1}{2}e^{2x}+c$. Πράγματι έχουμε:

$H_1'(x) = (-συνx)'+(\frac{1}{2}e^{2x})' = ημx+\frac{1}{2}e^{2x}(2x)' = ημx+e^{2x}$

26. Όμοια να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων

1. $f(x) = 5x^4-3x^3+6x^2-4x+2$
2. $g(x) = x^2-\frac{3}{x}$
3. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
4. $f_1(x) = 5e^{4x+2}$
5. $g_1(x) = e^x+xe^x$
6. $h_1(x) = \frac{xσυνx-ημx}{x^2}$

Λύση: 1. Είναι $F(x) = 5\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x + c$.

2. $G(x) = \frac{x^3}{3} - 3\ln x + c$.

3. $H(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + c$.

4. Είναι $F_1(x) = \frac{5}{4}e^{4x+2} + c$.

5. Είναι $G_1(x) = x'e^x + x(e^x)' = xe^x + c$.

6. Είναι $H_1(x) = \frac{\eta\mu x}{x} + c$. Πράγματι έχουμε: $H_1'(x) = \frac{(\eta\mu x)'x - \eta\mu x x'}{x^2} =$

$= \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} = h_1(x)$

27. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την σχέση $f'(x) = f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Η δοσμένη σχέση γράφεται $f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f'(x) - (e^x)'f(x) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{e^x f'(x) - (e^x)'f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^x}\right]' = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ (1).

Άρα με βάση γνωστή πρόταση είναι $\frac{f(x)}{e^x} = c \Rightarrow f(x) = ce^x$.

28. Να βρείτε την οικογένεια των καμπύλων των οποίων η εφαπτομένη σε κάθε σημείο τους έχει συντελεστή διεύθυνσης 2x. Ποιά από αυτές τις καμπύλες διέρχεται από το σημείο $(\sqrt{3},0)$;.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης σ'ένα σημείο (x_0,y_0) του διαγτάμματος της f είναι $f'(x_0)$ και στο τυχαίο $f'(x)$. Άρα είναι $f'(x) = 2x$. Επομένως η συνάρτηση $F(x) = 2x$ είναι μια παράγουσα της f. Άρα η f είναι $f(x) = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$ (1).

Επειδή η (1) διέρχεται από το σημείο $(\sqrt{3},0)$ ισχύει: $0 = (\sqrt{3})^2 + c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c = -3$. Συνεπώς η καμπύλη της οικογένειας που διέρχεται από το σημείο $(\sqrt{3},0)$ είναι η $f(x) = x^2 - 3$.

29. Εάν $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ και ισχύει $\frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{4} = 0$.
Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση: Επειδή θέλουμε να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο f(x) έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο (0 1) θα πρέπει το f(x) να είναι μια παράγωγος κάποιου πολυωνύμου F(x).

Μια παράγουσα του f(x) είναι $F(x) = \frac{\alpha x}{1} + \frac{\beta x^2}{2} + \frac{\gamma x^3}{3} + \frac{\delta x^4}{4}$

Για το πολυώνυμο F(x) στη διάστημα (0,1) ισχύουν οι συνθήκες του Rolle επειδή F(0) = F(1) = 0, άρα υπάρχει πραγματικός αριθμός τουλάχιστο ένας στο (0,1), έτσι ώστε F'(e) = 0. Αλλά F'(x) = f(x) ∀ x∈(0,1).

Επομένως για το πολυώνυμο f(x) υπάρχει e ∈ (0,1) έτσι ώστε f(e) = 0 και επομένως το f(x) έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.

30. Να βρείτε μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+10}$

Λύση: Είναι: $f(x) = \frac{(x^2+3x+10)'}{x^2+3x+10}$ επομένως μια παράγουσα της f(x) είναι

$F(x) = \ln(x^2+3x+10)+c$. Πράγματι έχουμε: $F'(x) = (\ln(x^2+3x+10)+c)' =$

$= \frac{1}{x^2+3x+10}(x^2+3x+10)' = \frac{2x+3}{x^2+3x+10}$

30. Μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις ακόλουθες βασικές συναρτήσεις:

α) $f(x) = \alpha x+\beta / \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma / \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$.

γ) $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} / \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0,\ \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$.

Λύση: α) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = \alpha$, οπότε:

1. $\alpha > 0 \to f'(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \to$ f γνησίως αύξουσα ∀ x∈ℝ.
2. $\alpha < 0 \to f'(x) < 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \to$ f γνησίως φθίνουσα ∀ x∈ℝ.
3. $\alpha = 0 \to f'(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \to$ f σταθερή ∀ x ∈ ℝ.

β) Έχουμε: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2\alpha x+\beta$, οπότε:

1. $\alpha > 0$ και $f'(x) > 0 \leftrightarrow 2\alpha x+\beta > 0 \leftrightarrow x > -\frac{\beta}{2\alpha} \to$ f γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$ και αν $f'(x) < 0 \leftrightarrow x < -\frac{\beta}{2\alpha} \to$ f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$.

2. $\alpha < 0$ και $f'(x) > 0 \leftrightarrow x < -\frac{\beta}{2\alpha} \to$ f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$ και αν $f'(x) < 0 \leftrightarrow x > -\frac{\beta}{2\alpha} \to$ f γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$

3) Επειδή $f'(-\frac{\beta}{2\alpha}) = 0$, το σημείο $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι σημείο στασιμότητας της f.

γ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$ και επειδή: $f(x) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{c}{x+\frac{\delta}{\gamma}}$, όπου

$c = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2} \neq 0$, θα έχουμε: $f'(x) = \frac{-c}{(x+\frac{\delta}{\gamma})^2}$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(f)$.

Θα μελετήσουμε αυτήν σε κάθε ένα από τα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της δηλ. στα υποσύνολα $(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma})$ και $(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$ αφού $\mathcal{D}(f) =$

$= (-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}) \cup (-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$.

1. Εάν $c > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f$ γνησ. φθίν. στο $(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma})$ και f γνήσ. φθίν. στο $(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$

2. Εάν $c < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f$ γνήσ. αύξ. στο $(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma})$ και f γνήσ. αύξ. στο $(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty)$.

31. Μελετήσετε τις ακόλουθες συναρτήσεις ως προς την μονοτονία

α) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2$, β) $f(x) = \sqrt{x^2+2} - 3|x|$

Λύση: α) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 12x^3 - 10x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) > 0$ $\leftrightarrow 12x^3 - 10x > 0 \leftrightarrow x(6x^2-5) > 0 \leftrightarrow x(x-\sqrt{\frac{5}{6}})(x+\sqrt{\frac{5}{6}}) > 0$.

$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{6}}$		0		$+\sqrt{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$		$+$	

Άρα $f'(x) > 0$ $\forall\, x \in (-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty)$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0)$, $(\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty)$ και προφανώς $f'(x) < 0$ $\forall\, x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}) \cup (0, \sqrt{\frac{5}{6}})$ και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}})$, $(0, \sqrt{\frac{5}{6}})$.

Τα σημεία $0, -\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}$ είναι σημεία στασιμότητας.

β) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - 3 & \text{αν } x > 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + 3 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και για $x = 0$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f.

Είναι $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}_-$ και $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^+$ και επομένως f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Σημεία στασιμότητας, δεν υπάρχουν.

32. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)^5(2x+1)^4$. Να εξετάσετε σε ποιά διαστήματα είναι μονότονη.

Λύση: Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και η παράγωγός της είναι:

$f'(x) = 5(x-2)^4(2x+1)^4 + 8(x-2)^5(2x+1)^3 = (x-2)^4(2x+1)^2[5(2x+1)^2 + 8(x-2)(2x+1)]$, $\forall \ x \in \mathcal{D}(f)$. Επειδή οι δύο πρώτοι παράγοντες είναι μη αρνητικοί και ο τρίτος είναι $(2x+1)(18x-11)$, θα έχουμε:

$f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{11}{18}, +\infty) - \{2\}$ και

$f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{11}{18})$, ενώ για $x = -\frac{1}{2}, \frac{11}{18}, 2$ η $f'(x) = 0$

Μετά από αυτά η f είναι γνησίως αύξουσα $\forall \ x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ και

$\forall \ x \in (\frac{11}{18}, 2) \cup (2, +\infty)$ και f είναι γνησίως φθίνουσα $\forall \ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{11}{18})$.

Επειδή για $x \to \frac{-1}{2} - 0$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x \to -\frac{1}{2} + 0$ είναι $f'(x) < 0$ έπεται ότι στην θέση $x = -\frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι το $f(-\frac{1}{2}) = 0$. Επίσης επειδή για $x \to \frac{11}{18} - 0$ είναι $f'(x) < 0$ και για $x \to \frac{11}{18} + 0$ είναι $f'(x) > 0$ έπεται ότι η f στη θέση $x = \frac{11}{18}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι το $f(\frac{11}{18}) = -\frac{2^3 \cdot 5^{14}}{3^{18}}$

Τέλος για $x \to 2-0$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x \to 2+0$ είναι $f'(x) > 0$, δηλαδή η f' δεν αλλάζει πρόσημο, δεν έχουμε εδώ ακρότατο. Χρειαζόμαστε την δεύτερη παράγωγο.

33. Να αποδειχτούν οι ανισότητες:

1. $e^x - x > 0$ 　　4. $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$

2. $e^x \geq x + 1$ 　　5. $(x+1)^{x+1} > e^x$, $x > 0$

3. $\ln x \leq x - 1$ 　　6. $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$, $x > -1$.

Λύση: 1. Θέτουμε: $f(x) = e^x - x$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Είναι δε $f'(x) = e^x - 1$. Ρίζα της παραγώγου είναι η $x = 0$.

i. Αν $x > 0 \rightarrow e^x > 1 \rightarrow e^x - 1 > 0 \rightarrow f'(x) > 0$ και η f είναι γνήσια αύξουσα επομένως ισχύει με $x > 0 \rightarrow f(x) > f(0) \leftrightarrow e^x - x > 1 \leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0 \rightarrow e^x - x > 0$

ii. Αν $x < 0 \rightarrow e^x < 1 \rightarrow e^x - 1 < 0 \rightarrow f'(x) = e^x - 1 < 0 \rightarrow$ ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα επομένως με $x < 0 \rightarrow f(x) > f(0) \leftrightarrow e^x - x > 1 \leftrightarrow e^x - x > 1 > 0 \rightarrow$
$\rightarrow e^x - x > 0$.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι: $e^x - x - 1 \geq 0$. Θέτουμε $f(x) = e^x - x - 1$ όπου η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι δε $f'(x) = e^x - 1$ με μοναδική ρίζα την $x = 0$, τότε για $x > 0 \rightarrow e^x - 1 > 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$ f γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε με $x > 0 \rightarrow f(x) > f(0) \leftrightarrow e^x - x - 1 > 0 \leftrightarrow e^x > x + 1$.
Με $x < 0 \rightarrow e^x - 1 < 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow$ η f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ οπότε με $x < 0 \rightarrow f(x) > f(0) \leftrightarrow e^x - x - 1 > 0 \leftrightarrow e^x > x + 1$.
Με $x = 0$ ισχύει με το ίσο.

3. Θέτουμε $f(x) = \ln x - x + 1$ και αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \leq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^*_+$.
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*_+$ και είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$
με μοναδική ρίζα την $x = 1$.
Αν $0 < x < 1 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$ ότι η f είναι γνησίως αύξουσα επομένως ισχύει με $x < 1 \rightarrow f(x) < f(1) \leftrightarrow \ln x - x + 1 < 0 \leftrightarrow \ln x < x - 1$.

Αν $x > 1 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow$ ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα με $x > 1 \rightarrow$
$\rightarrow f(x) < f(1) \leftrightarrow \ln x - x + 1 < 0 \leftrightarrow \ln x < x - 1$.
Με $x = 1$ ισχύει η ισότητα.

4. Θέτουμε $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = f(x)$ και αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^*_+$.
Είναι όμως η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*_+$ με $f'(x) = e^x - 1 - x$ και επειδή από το ερώτημα (2) είναι $e^x \geq x + 1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*_+$ και επομένως με $x > 0 \rightarrow f(x) > f(0) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0 \leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

5. Η ανισότητα γράφεται: $e^{(x+1)\ln(x+1)} > e^x$ και επειδή η βάση e είναι μεγαλύτερη του 1 αρκεί να δείξουμε: $(x+1)\ln(x+1) > x \Longleftrightarrow (x+1)\ln(x+1)-x > 0$. Θέτουμε $f(x) = (x+1)\ln(x+1)-x$ και επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ είναι $f'(x) = \ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}-1= \ln(x+1) \quad > 0 \ \forall\ x\in\mathbb{R}_+^*$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε με $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x+1)\ln(x+1)-x > 0 \Longleftrightarrow (x+1)\ln(x+1) > x$.

6. Θέτουμε $f(x) = \ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ και αρκεί να δείξουμε ότι $\forall\ x\in\mathbb{R}: x > -1$ ισχύει $f(x) > 0$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη οπότε είναι
$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$ με μοναδική ρίζα την $x = 0$.
Άρα αν $-1 < x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα ισχύει
$f(x) > f(0) \Longleftrightarrow \ln(x+1)-\frac{x}{x+1} > 0$.
Αν $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα άρα ισχύει $f(x) > f(0)$
$\Longleftrightarrow \ln(x+1)-\frac{x}{x+1} > 0$.

34. Βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων (βασικών)

α) $f(x) = \alpha x+\beta / \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

β) $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma / \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

γ) $f(x) = \alpha x^4+\beta x^2+\gamma / \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

δ) $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} / \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R},\ \gamma \neq 0,\ \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$

Λύση: α) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = \alpha$ και άρα δεν υπάρχει ρίζα στο $\mathbb{R}$ της $f'(x) = 0$, επομένως η f δεν έχει ακρότατα. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right) = (+\infty)\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

και $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)\alpha = \begin{cases} -\infty & \text{αν } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

β) Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2\alpha x+\beta$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι: $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Εξετάζουμε το πρόσημο της f' στα διαστήματα $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}]$, $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$. Εάν $\alpha > 0$, τότε: $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ για } x > -\frac{\beta}{2\alpha} \\ f'(x) < 0 \text{ για } x < -\frac{\beta}{2\alpha} \end{cases}$, άρα το $f(-\frac{\beta}{2\alpha}) =$

$= \min f$, $\min f = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ για $\alpha > 0$ και $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Εάν $\alpha < 0$ τότε: $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ για } x < -\frac{\beta}{2\alpha} \\ f'(x) < 0 \text{ για } x > -\frac{\beta}{2\alpha} \end{cases}$, άρα το $f(-\frac{\beta}{2\alpha}) = \max f$, δηλαδή

$\max f = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ για $\alpha < 0$ και $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (\text{σημα})\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \begin{cases} \to +\infty & \text{αν } \alpha > 0 \\ \to -\infty & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

με τον ίδιο τρόπο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \to +\infty & \text{αν } \alpha > 0 \\ \to -\infty & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

Το ακρότατο που βρήκαμε σε κάθε περίπτωση $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$ είναι απόλυτο.

γ) Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 4\alpha x^3 + 2\beta x$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι:

$x_1 = 0$ και $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ εάν $-\frac{\beta}{2\alpha} \geq 0$. Εάν $-\frac{\beta}{2\alpha} < 0$ δεν υπάρχει άλλη ρίζα πραγματική εκτός της $x = 0$. Επομένως έχουμε:

1. Εάν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$ μια μόνο ρίζα, η $x = 0$
2. Εάν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_-^*$ μια μόνο ρίζα, η $x = 0$
3. Εάν $\alpha\beta < 0$ τρείς ρίζες οι $x = 0$ και $x = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$
4. Εάν $\beta = 0$ μία μόνο ρίζα η $x = 0$ (τριπλή).

Μελετούμε τώρα το πρόσημο της f' στα διαστήματα από τη μια μεριά και την άλλη των ριζών της για να καθορίσουμε το είδος ακροτάτων.

Αυτά συμπεραίνουμε αμέσως από τους ακόλουθους πίνακες

1

	x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\alpha > 0$, $\beta > 0$	f'		$-$	0	$+$	
	f	$+\infty$	↘	$f(0) = \gamma$ ολ.ελαχ.	↗	$+\infty$

2

	x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\alpha < 0$, $\beta < 0$	f'		$+$	0	$-$	
	f	$-\infty$	↗	ολ.μεγ $f(0)=\gamma$	↘	$-\infty$

	x	$-\infty$		$-\sqrt{[illegible]}$		0		$\sqrt{[illegible]}$		$+\infty$
$\alpha > 0$, $\beta < 0$	f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
	f	$+\infty$	↘	[illegible] τοπ.ελαχ	↗	τοπ.μεγ γ	↘	[illegible] τοπ.ελαχ	↗	$+\infty$

	x	$-\infty$		$-\sqrt{[illegible]}$		0		$\sqrt{[illegible]}$		$+\infty$
$\alpha < 0$, $\beta > 0$	f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	[illegible]	
	f	[illegible]	↗	τοπ.μεγ [illegible]	↘	[illegible]	↗	[illegible]	↘	[illegible]

Υπενθυμίζουμε ότι: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

Από τους πίνακες αυτούς συμπεραίνουμε:

1. Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει ολικό ελάχιστο το γ για $x = 0$
2. Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^-$ υπάρχει ολικό μέγιστο το γ για $x = 0$
3. Εάν $\alpha > 0$, $\beta < 0$ υπάρχουν τοπικά ακρότατα τα: $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοπικό ελάχιστο για $x = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ και γ τοπικό μέγιστο για $x = 0$
4. Εάν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ υπάρχουν τοπικά ακρότατα τα: $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοπικό μέγιστο για $x = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}}$ και γ τοπικό ελάχιστο για $x = 0$.
5. Εάν $\beta = 0$ και $\alpha > 0$ προφανώς υπάρχει ολικό ελάχιστο το γ για $x = 0$ και αν $\alpha < 0$ ολικό μέγιστο το γ για $x = 0$ (Πίνακες (1),(2)).

δ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\}$. Η $f'(x) = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2} \neq 0$ και επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

35. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ β) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$

γ) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{αν } x \le 1 \\ 3-x & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ δ) $f(x) = \frac{e^x}{x^\nu}$ με $x \in (0,+\infty)/\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση: α) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η παράγωγος είναι:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2}+(x-2)\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$$

Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = \frac{4}{5}$ και το σημείο $x = 0$ σημείο ασυνέχειας της πρώτης παραγώγου (δεν υπάρχει η $f'(x)$).

Ώστε κρίσιμα σημεία είναι τα: $x = \frac{4}{5}$ και $x = 0$.

Εξετάζουμε το πρόσημο της f' δεξιά και αριστερά του σημείου $x = \frac{4}{5}$

Έχουμε: $f'(x) > 0$ για $x > \frac{4}{5}$ και $f'(x) < 0$ για $0 < x < \frac{4}{5}$. Μετά απ' αυτά στη θέση $x = \frac{4}{5}$ υπάρχει ένα τοπικό ελάχιστο το:

$$f(\frac{4}{5}) = (\frac{4}{5}-2)\sqrt[3]{(\frac{4}{5})^2} = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}.$$

Επίσης στη θέση $x = 0$ παρατηρούμε ότι για $x < 0$ έχουμε $f'(x) > 0$ και για $x > 0$, αλλά $x < \frac{4}{5}$ έχουμε $f'(x) < 0$ δηλαδή στη θέση $x = 0$ έχουμε ένα τοπικό μέγιστο. Το μέγιστο είναι το $f(0) = 0$.

Προφανώς η f είναι συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και είναι αμέσως φανερό ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Είναι εύκολο να γίνει η γραφική παράστασή της.

β) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Για την απλούστευση του λογισμού θέτομε $\frac{x}{6} = \varphi$ και παίρνουμε: $\sigma(\varphi) = 2συν3\varphi + 3συν2\varphi$.

Επειδή η σ είναι περιοδική με περίοδο 2π θα την εξετάσουμε σε ένα διάστημα μιας περιόδου $[-\pi, \pi]$.

Για την συνάρτηση λοιπόν σ με $\sigma(\varphi) = 2συν3\varphi + 3συν2\varphi$ και $\mathcal{D}(\sigma) = [-\pi, \pi]$ έχουμε τα ακόλουθα:

α) Η σ είναι παντού συνεχής στο $\mathcal{D}(\sigma)$.

β) $\sigma(-\pi) = \sigma(\pi) = 1$

Βρίσκουμε την σ' η οποία είναι

$$\sigma'(\varphi) = -6ημ3\varphi - 6ημ2\varphi = -12ημ\frac{5\varphi}{2}συν\frac{\varphi}{2}$$

Οι ρίζες της $\sigma'(\varphi) = 0$ είναι μόνο οι ρίζες της $ημ\frac{5\varphi}{2} = 0$, αφού στο ανοικτό διάστημα $(-\pi, \pi)$ είναι πάντοτε $συν\frac{\varphi}{2} \neq 0$. Οι ρίζες της $ημ\frac{5\varphi}{2} = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(-\pi, \pi)$ είναι οι: $\varphi_1 = -\frac{4\pi}{5}$, $\varphi_2 = -\frac{2\pi}{5}$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = \frac{2\pi}{5}$ και $\varphi_5 = \frac{4\pi}{5}$. ((Αφού $\frac{5\varphi}{2} = \mu\pi \leftrightarrow \varphi = \frac{2\mu\pi}{5}$ και $-\pi < \frac{2\mu\pi}{5} < \pi$ για $\mu = -2, -1, 0, 1, 2$)).

Μετά τα παραπάνω και για να καθορίσομε το πρόσημο της σ' κι από τις δύο μεριές κάθε ρίζας της καταστρώνουμε τον ακόλουθο πίνακα.

φ	$-\pi$		$-\frac{4\pi}{5}$		$-\frac{2\pi}{5}$		0		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{4\pi}{5}$		π
σ'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	
σ	1	↗	$5συν\frac{2\pi}{5}$	↘	$-5συν\frac{\pi}{5}$	↗	5	↘	$-5συν\frac{\pi}{5}$	↗	$5συν\frac{2\pi}{5}$	↘	1

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Για $\varphi = \pm\pi + 2\kappa\pi / \kappa \in Z$ έχουμε τοπικό ελάχιστο το 1, δηλαδή για $x = 12\kappa\pi \pm 6\pi$
2. Για $\varphi = \pm\frac{4\pi}{5} + 2\kappa\pi / \kappa \in Z$ έχουμε τοπικό μέγιστο το $5συν\frac{2\pi}{5} = 5\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ δηλαδή για $x = 12\kappa\pi \pm \frac{24\pi}{5}$.

3. Για $\varphi = \pm\frac{2\pi}{5} + 2\kappa\pi/\kappa \in Z$ έχουμε ολικό ελάχιστο το $-5\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5} = -5\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (αφού $-5\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5} < 1$), δηλαδή για $x = 12\kappa\pi \pm \frac{12\pi}{5}$.

4. Για $\varphi = 0 + 2\kappa\pi/\kappa \in Z$ έχουμε ολικό μέγιστο το 5, δηλαδή για $x = 12\kappa\pi$.

γ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{αν } x < 1 \\ -1 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

και η παράγωγος στη θέση $x = 1$ αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει, γιατί

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} 2(x+1) = 4$$

ενώ $\lim_{x \to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{3-x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{1-x}{x-1} = -1$

Ώστε θα εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει στα κρίσιμα σημεία, δηλαδή εκείνα για τα οποία $f'(x) = 0$ και εκείνα για τα οποία δεν υπάρχει η f'. Αυτά είναι τα $x = 0$ και $x = 1$.

Παρατηρούμε ότι για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και επομένως για $x = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$. Για $x = 1$ θα έχουμε ένα τοπικό μέγιστο γιατί για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$. Το μέγιστο είναι το $f(1) = 2$.

δ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$. Επειδή $f'(x) = \frac{e^x x^\nu - \nu e^x x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = \frac{e^x x^{\nu-1}(x-\nu)}{x^{2\nu}} = \frac{e^x(x-\nu)}{x^{\nu+1}}$, οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = \nu$. Επειδή $f'(x) > 0$ για $x > \nu$ και $f'(x) < 0$ για $0 < x < \nu$, έπεται ότι υπάρχει ελάχιστο για $x = \nu$ και είναι το $f(\nu) = \frac{e^\nu}{\nu^\nu}$.

36. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}$. Υπάρχει παράγωγος στη θέση $x = 0$; Υπάρχει ακρότατο στη θέση αυτή;

Λύση: Πρέπει: $1-\sqrt[5]{x^2} \geq 0 \longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ και επομένως: $\mathcal{D}(f) = [-1, +1]$.

Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = -\frac{1}{5\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}\,\sqrt[5]{x^3}}$

Και προφανώς δεν υπάρχει στη θέση $x = 0$.

Επειδή όμως είναι: $\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}} < 1 \ \forall\, x \in [-1,1]-\{0\}$, έπεται ότι $f(x) < 1$ $\forall\, x \in [-1,1]-\{0\}$, ενώ για $x = 0$ λαμβάνει την τιμή $f(0) = 1$, η οποία αποτελεί προφανώς μέγιστο της f στη θέση $x = 0$.

37. Βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x^3-18x^2+48x-14$ δ) $f(x) = x\log x$

β) $f(x) = (x-1)^7$ ε) $f(x) = \frac{\log x}{x}$

γ) $f(x) = x^x$ στ) $f(x) = x^6$

Λύση: α) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Η παράγωγος είναι: $f'(x) = 6x^2-36x+48$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι: $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 12x-36$. Επειδή $f''(2) = -12 < 0$, η συνάρτηση στη θέση $x = 2$ παρουσιάζει μέγιστο, το οποίο είναι: $f(2) = 26$
Επειδή $f''(4) = 12 > 0$, η συνάρτηση στη θέση $x = 4$ παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι: $f(4) = 18$.
Επειδή του $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$ (αντιστοίχως), έπεται ότι τα ακρότατα που βρέθηκαν είναι τοπικά.

β) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Η παράγωγος είναι $f'(x) = 7(x-1)^6$. Ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι μόνο η $x = 1$

Επειδή όμως για $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x < 1$ είναι και πάλι $f'(x) > 0$, έπεται ότι η f δεν έχει ακρότατα
Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε αν λάβουμε τις παραγώγους μέχρι και της $f^{(7)}$ και βρίσκουμε ότι $f(x) = c \neq 0$ και επειδή ο 7 είναι περιττός, η f δεν έχει ακρότατα.
Εάν είχαμε την $f(x) = (x-1)^4$, τότε $f'(x) = 4(x-1)^3$, $f''(x) = 12(x-1)^2$, $f'''(x) = 24(x-1)$ και $f^{(4)}(x) = 24$ και είναι: $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$, ενώ $f^{(4)}(1) = 24 \neq 0$.
Επειδή εδώ είναι $f^{(4)}(1) = 24 > 0$ έχομε στη θέση $x = 1$ τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι το $f(1) = 0$.

γ) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^*_+$. Ο τύπος της f γράφεται και ως εξής: $f(x) = e^{x\log x}$
Η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x) = e^{x\log x}(x\log x)' = x^x(1+\log x)$.
Οι ρίζες της είναι οι ρίζες της $1+\log x = 0 \Leftrightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = (x^x)'(1+\log x)+x^x(1+\log x)' =$
$= x^x(1+\log x)^2+x^x \cdot \frac{1}{x}$
Έχουμε: $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} > 0$ και επομένως στην θέση $x = \frac{1}{e}$ η f παρου-

σιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι: $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

δ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^*_+$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathcal{D}(f)$. Η πρώτη παράγωγος είναι:
$f'(x) = 1 + \log x$
Οι ρίζες της είναι: $x = \frac{1}{e}$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι $f''(x) = \frac{1}{x}$ και επειδή $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$, έπεται ότι η f στην θέση $x = \frac{1}{e}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

ε) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^*_+$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}^*_+$. Η πρώτη παράγωγος είναι:
$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$ και οι ρίζες της είναι: $x = e$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = \frac{(1-\log x)'x^2-(x^2)'(1-\log x)}{x^4} =$

$= \frac{-x-2x+2x\log x}{x^4} = \frac{2\log x-3}{x^3}$.

Επειδή $f''(e) = \frac{-1}{e^3} < 0$ έπεται ότι η f στην θέση $x = e$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι: $f(e) = \frac{1}{e}$.

στ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και συνεχής $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) = 6x^5$ με ρίζα την $x = 0$.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 30x^4$ και επειδή $f''(0) = 0$ εφαρμόζουμε την πρώτη μέθοδο. Είναι $f'(x) > 0$ για $x > 0$ και $f'(x) < 0$ για $x < 0$ και επομένως στη θέση $x = 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι το $f(0) = 0$.
Ή και ως εξής: Έχουμε $f''(x) = 30x^4$, $f^{(3)}(x) = 120x^3$, $f^{(4)}(x) = 360x^2$, $f^{(5)}(x) = 720x$, $f^{(6)}(x) = 720 > 0$, άρα η f στην θέση $x = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

38. Ποιό από όλα τα ορθογώνια σταθεράς περιμέτρου 2α, έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Λύση: Εάν x, y οι διαστάσεις του ζητούμενου ορθογωνίου, θα έχουμε $2x+2y = 2\alpha \leftrightarrow x+y = \alpha$. Και επίσης $xy = E$.
Έχουμε $E = x(\alpha-x)$. Για την συνάρτηση E με $E(x) = x(\alpha-x)$ έχουμε: $\mathcal{D}(f) = (0, \alpha)$. Ζητάμε το μέγιστο E.

Επειδή $E'(x) = \alpha - 2x$, οι ρίζες της $E'(x) = 0$ είναι: $x = \frac{\alpha}{2}$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $E''(x) = -2 < 0$ και επομένως και $E''(\frac{\alpha}{2}) =$

$= -2 < 0$ και η συνάρτηση Ε στη θέση $x = \frac{\alpha}{2}$ παρουσιάζει μέγιστο προφανώς

απόλυτο. Το μέγιστο Ε είναι το $E(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}(\alpha - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha^2}{4}$ και αντιστοιχεί

στις διαστάσεις $x = y = \frac{\alpha}{2}$, δηλαδή στο τετράγωνο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$.

39. Ποιό απ'όλα τα τρίγωνα σταθερής περιμέτρου 2τ έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Λύση: 'Εστω x,y,z τα μήκη των πλευρών του τριγώνου με $x+y+z = 2\tau$.
Θεωρούμε κατ'αρχήν το $z = c$ σταθερό και ζητούμε να βρούμε το τρίγωνο το οποίο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό με $x+y = 2\tau - c$.
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι: $E = \sqrt{\tau(\tau-x)(\tau-y)(\tau-c)}$ και επειδή
$y = 2\tau - c - x$ θα έχουμε:
$E = \sqrt{\tau(\tau-x)(c+x-\tau)(\tau-c)} = \sqrt{\tau(\tau-c)}\sqrt{(\tau-x)(c+x-\tau)} = \lambda\sqrt{(\tau-x)(c+x-\tau)}$
($\lambda = \sqrt{\tau(\tau-c)}$ = σταθ.)
Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\varphi(x) = (\tau-x)(c+x-\tau)$.
Εάν βρεθεί το maxφ, τότε θα βρεθεί αντίστοιχα και το maxE, αφού
$E = \varphi^{\frac{1}{2}}(x)\lambda$. Η συνάρτηση $\varphi(x) = (\tau-x)(c+x-\tau)$ έχει πεδίο ορισμού
$\mathcal{D}(\varphi) = (0,\tau)$. Η παράγωγος είναι: $\varphi'(x) = -(c+x-\tau)+(\tau-x) = 2\tau-c-2x$.
Οι ρίζες της είναι: $x = \frac{2\tau-c}{2}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι: $\varphi''(x) = -2$.
Και επειδή $\varphi''(\frac{2\tau-c}{2}) = -2 < 0$, η φ στην θέση $x = \frac{2\tau-c}{2}$ παρουσιάζει μέγιστο.
'Ωστε το μέγιστο του Ε συμβαίνει όταν $x = \frac{2\tau-c}{2}$, οπότε $y = 2\tau - c -$
$- \frac{2\tau-c}{2} = \frac{2\tau-c}{2}$, δηλαδή όταν το με σταθερή πλευρά την $z = c$ τρίγωνο είναι ισοσκελές.
Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι σε κάθε μεταβολή του z, για τιμές $z = c$, $c_1, c_2, \ldots$ με $0 < z < \tau$ το εκάστοτε τρίγωνο το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδό θα είναι το αντίστοιχο ισοσκελές.
Ζητάμε τώρα ποιό από αυτά τα ισοσκελή τρίγωνα έχει το μεγαλύτερο εμβαδό
Αν θεωρήσουμε λοιπόν ένα από τα ισοσκελή αυτά τρίγωνα, του οποίου οι δύο πλευρές ας είναι οι $x = y$, η τρίτη η z με $0 < z < \tau$ και $x+y+z = 2\tau$.

Θα έχουμε: $2x+z = 2\tau \rightarrow z = 2\tau-2x$ και $E = \sqrt{\tau(\tau-x)^2(\tau-z)} =$

$= \sqrt{\tau(\tau-x)^2(2x-\tau)} = \sqrt{\tau}\sqrt{(\tau-x)^2(2x-\tau)}$ $(x > \frac{\tau}{2})$. Θέτουμε: $\sigma(x) = (x-\tau)^2(2x-\tau)$ με $\frac{\tau}{2} < x < \tau$.

Η πρώτη παράγωγος είναι: $\sigma'(x) = 2(x-\tau)(2x-\tau)+2(x-\tau)^2$, της οποίας οι ρίζες είναι $x = \frac{2\tau}{3}$ αφού $(x-\tau) < 0$ και $\frac{\tau}{2} < \frac{2\tau}{3} < \tau$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 12x-10\tau$ και $f''(\frac{2\tau}{3}) = 12.\frac{2\tau}{3}-10\tau =$

$= -2\tau < 0$ και επομένως στη θέση $x = \frac{2\tau}{3}$ η σ παρουσιάζει μένιστο. Τότε όμως θα έχουμε: $y = \frac{2\tau}{3}$ και $z = \frac{2\tau}{3}$.

Αυτό σημαίνει ότι μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το ισόπλευρο.

40. Βρείτε απ'όλους τους ορθούς κυλίνδρους οι οποίοι έχουν τον ίδιο όγκο V, ποιός έχει την ελάχιστη ολική επιφάνεια.

Λύση: Ας είναι x η ακτίνα της βάσης του και y το ύψος του ζητούμενου κυλίνδρου. Εάν E η ολική επιφάνεια, θα έχουμε:

$E = 2\pi x^2+2\pi xy$ και $V = \pi x^2 y$.

Επειδή $y = \frac{V}{\pi x^2}$ θα έχουμε: $E = 2\pi x^2+2\pi x\frac{V}{\pi x^2} = 2(\pi x^2+\frac{V}{x})$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = 2\pi x^2+\frac{2V}{x}$ και $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^*_+$.

Η παράγωγος είναι: $\varphi'(x) = 4\pi x-\frac{2V}{x^2}$. Οι ρίζες της $\varphi'(x) = 0$ είναι:

$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $\varphi''(x) = 4(\pi+\frac{V}{x^3})$ και επειδή $\varphi''(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}) =$

$= 12\pi > 0$ έπεται, ότι η σ στη θέση $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Άρα το E_{min} λαμβάνει χώρα για $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ με αντίστοιχο ύψος το $y = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

41. Να βρεθεί το πολυώνυμο $f(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ αν $f(0) = 0$ και έχει τοπικά ακρότατα στις θέσεις $x = -\frac{7}{3}$ και $x = 1$, και να γίνει πίνακας μεταβολών της f.

Λύση: Επειδή $f(0) = 0 \longleftrightarrow \gamma = 0$ και επειδή η f έχει ακρότατα στις θέσεις

$x = \frac{-7}{3}$ και $x = 1$ σημαίνει ότι οι αριθμοί $-\frac{7}{3}$ και 1 είναι ρίζες της πρώτης παραγώγου. Είναι $f'(x) = 3x^2+2\alpha x+\beta$ και με $x = -\frac{7}{3}$ είναι

$f'(-\frac{7}{3}) = 0 \leftrightarrow \frac{49}{3} - \frac{14\alpha}{3} + \beta = 0$ (1) και με $x = 1$ είναι $f'(1) = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 3+2\alpha+\beta = 0$ (2).

Η λύση του συστήματος των (1) και (2) δίνει: $\alpha = 2$ και $\beta = -7$.

Επομένως το πολυώνυμο είναι $f(x) = x^3+2x^2-7x$

Καταστρώνουμε τον πίνακα:

	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		1		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		↗	T M	↘	TE	↗	

42. Εξετάσετε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε ποιά διαστήματα είναι κυρτές ή κοίλες;

α) $f(x) = 2x^3-4x^2$ γ) $f(x) = x+\frac{1}{x}$

β) $f(x) = \log x$ δ) $f(x) = e^x$

Λύση: α) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η πρώτη παράγωγος είναι: $f'(x) = 6x^2-8x$ και οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 12x-8 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι: $x = \frac{2}{3}$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα η f θα είναι κυρτή $\forall x \in \mathbb{R}$ για το οποίο $f''(x) > 0$, δηλ. για $x > \frac{2}{3}$ και f κοίλη για $\forall x \in \mathbb{R}$ για το οποίο $f''(x) < 0$, δηλ. για $x < \frac{2}{3}$

β) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^*_+$. Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{x}$ και $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \ \forall x \in \mathbb{R}^*_+$

Επειδή όμως $f''(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*_+$, έπεται ότι $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ η f είναι κοίλη.

γ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{0\}$. Έχουμε $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \ \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$ και

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$

Βρίσκουμε τώρα για ποιά $x \in \mathcal{D}(f)$ είναι $f''(x) > 0 \leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \leftrightarrow x > 0$.

Άρα η f είναι κυρτή $\forall x \in (0,+\infty)$.

Και επειδή $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (-\infty, 0)$ η f είναι κοίλη $\forall \ x \in (-\infty, 0)$.

δ) Προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Έχουμε $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ και επειδή $\forall \ x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$, έπεται ότι η f είναι κυρτή $\forall \ x \in \mathbb{R}$.

43. Βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 + \lambda x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ είναι κυρτή $\forall \ x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Είναι $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και $f''(x) = 12x^2 + 6\lambda x + 3$. Εάν τώρα είναι $f''(x) > 0$ $\forall \ x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι κυρτή $\forall \ x \in \mathbb{R}$.
Για να είναι όμως $12x^2 + 6\lambda x + 3 > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί $36\lambda^2 - 144 < 0$ $\Longleftrightarrow \lambda^2 < 4 \Longleftrightarrow -2 < \lambda < 2$.

44. Να βρείτε τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 3$ β) $f(x) = \log x$

γ) $f(x) = e^{-x^2}$ δ) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Λύση: α) Έχουμε: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) = 10x^4 - 12x^3$ $\forall \ x \in \mathbb{R}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι $f''(x) = 40x^3 - 36x^2$. Οι ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι οι $x_1 = 0$, $x_2 = 9/10$.
Ώστε πιθανά σημεία καμπής είναι τα $x = 0$ και $x = 9/10$.
Επειδή για $x = 0$ έχουμε $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -72 < 0$ η f για $x = 0$ παρουσιάζει μέγιστο. Για $x = \frac{9}{10}$ έχουμε σημείο καμπής, γιατί για $x > \frac{9}{10}$ είναι $f''(x) > 0$ και για $0 < x < \frac{9}{10}$ είναι $f''(x) < 0$.

Δηλαδή η f'' στην περιοχή του $\frac{9}{10}$ αλλάζει πρόσημο.

β) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^*_+$. Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$ και η δευτέρα $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ρίζες της $f''(x) = 0$ δεν υπάρχουν. Άρα ούτε σημεία καμπής.

γ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ και η δευτέρα $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.
Ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι οι $x_1 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, επειδή τόσο στη περιοχή του $\frac{\sqrt{2}}{2}$, όσο και του $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, η f'' αλλάζει πρόσημο, έπεται ότι σε κάθε μια από τις θέσεις αυτές έχουμε και σημείο καμπής.

δ) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ και η δεύτερη είναι: $f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$. Οι ρίζες της $f''(x) = 0$ είναι οι $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$.

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο από τη μια μεριά και την άλλη από αυτά, έπεται ότι η f σε κάθε μια θέση απ' αυτές παρουσιάζει και σημείο καμπής.

Τα σημεία αυτά είναι τα: $(0,0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ και $(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = x^2-3x-1$ και $g(x) = x^4+3x^2+2$ Δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 3/2$ και η g έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$, χωρίς τη χρήση της παραγώγου.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3-4x^2+2x$ δείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ ισχύει το Θ. Rolle και να βρεθεί ένα $x_0 \in (0,1)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x^2-1)e^x$. Δείξετε ότι στο διάστημα $[-1,1]$ ισχύει το Θ. Rolle και να βρείτε ένα $x_0 \in (-1,1)$.

4. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2-2x$ να εξετάσετε αν ισχύει το Θ. Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

5. Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3-4x+2$ δείξετε ότι στο διάστημα $(0,2)$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα.

6. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle για τη συνάρτηση f με $f(x) = e^{|x|}$ στο διάστημα $[-1,1]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3-3x-1$. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ δείξετε ότι έχει μια μόνο ρίζα $\rho \in (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

8. Στη συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x \in [-1,0) \\ \gamma x+4x+2, & x \in [0,1] \end{cases}$

   Να προσδιοριστούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln(\eta\mu x)$. Να βρεθεί η $x_0 \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$.

10. Εάν $a_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,\nu$ δείξετε ότι η εξίσωση $c_1^2(a_1-x)+c_2^2(a_2-x)+\dots+c_\nu^2(a_\nu -x) = x+x^3+\dots+x^{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχει μια μόνο πραγματική ρίζα.

11. Δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x+a = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες στο διάστημα $[0,1)$.

12. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ και $\varphi(x) = 4x^3-18x^2+22x-6$. Δείξετε ότι το $\varphi(x)$ έχει τρείς μόνο ρίζες θετικές και μικρότερες του 3.

13. Εάν για το πραγματικό πολυώνυμο $f(x)$ ισχύει $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε το $f(x)$ έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα.

14. Δείξετε ότι η εξίσωση $2x\eta\mu x+(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα $[-1,1]$.

15. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θ. Rolle στο $[-1,1]$ για την συνάρτηση f με $f(x) = 1-\sqrt[3]{x^2}$.

16. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θ.Μ.Τ για την συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in [-1,0] \\ 1-2x, & x \in [0,1] \end{cases} \quad \text{στο διάστημα } [-1,1].$$

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x\ln x$ στο $(0,+\infty)$ και $a,\beta \in \mathbb{R}_+^*$ με $a < \beta$. Να βρεθεί $\xi \in (a,\beta)$ ώστε να ισχύει το θ.Μ.Τ.

18. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2-6x$ να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θ.Μ.Τ στο διάστημα $[-1,1]$.

19. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2-5x+1$. Να βρεθεί $x_0 \in (0,2)$ έτσι ώστε να ισχύει το θ.Μ.Τ σ'αυτό.

20. Δίνεται η συνάρτηση f: $[0,3] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3-x+1$. Να βρεθεί $\xi \in (0,3)$ ώστε να ισχύει το θ.Μ.Τ και να διαπιστώσετε ότι η εφαπτομένη στο διάγραμμα της f στο σημείο ξ είναι παράλληλη με την χορδή που ορίζεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(3,25)$.

21. Δίνεται η συνάρτηση f: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη σ'αυτό με $f(0) = c$ και ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f'(x) \le \lambda$ $\forall x \in (0,+\infty)$. Δείξετε ό-

τι $f(x) \le c+\lambda x$.

22. Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχή και παραγωγίσιμη στο (α,β). Εάν $f(\alpha) = f(\beta)$ δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστο σημεία $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\rho_1)+f'(\rho_2) = 0$ με $\rho_1 \ne \rho_2$.

23. Δείξετε ότι στο $\mathbb{R}$ ισχύουν οι ταυτότητες

1. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha = \frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$
2. $\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$
3. $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
4. $\ln\frac{\alpha}{\beta} = \ln\alpha-\ln\beta \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*_+$

24. Αν $f(x) = f'(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ δείξετε ότι $f(x) = ce^x$, c = σταθερά.

25. Με το θ.Μ.Τ δείξετε την αλήθεια των ανισωτήτων.

1. $\eta\mu x \le x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
2. $\ln x \le x-1,\ x\in\mathbb{R}^*_+$
3. $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x,\ x\in\mathbb{R}^*_+$
4. $1-\frac{x}{y} \le \ln\frac{y}{x} \le \frac{y}{x}-1,\ 0 \le x \le y$
5. $|\eta\mu x-\eta\mu y| \le |x-y|,\ y < x$
6. $(\beta-\alpha)e^{\alpha} < e^{\beta}-e^{\alpha} < (\beta-\alpha)e^{\beta},\ \alpha<\beta$
7. $\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \le \varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha \le \frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta},\ 0<\alpha\le\beta<\frac{\pi}{2}$
8. $e^x \ge x+1$
9. $(1+x)^{\rho} \ge 1+\rho x,\ \rho\ge 1$ ή $\rho \le 0$
10. $\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu} < \frac{1}{2\theta},\ \nu>\theta^2,\ \nu,\theta\in\mathbb{N}$

26. Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων:

$f(x) = \alpha^x$ $\qquad$ $f_1(x) = e^{\alpha x}$

$g(x) = \frac{1}{x+5}$ $\qquad$ $g_1(x) = e^{\frac{x}{5}}$

$h(x) = \eta\mu(x+\alpha)$ $\qquad$ $h_1(x) = e^{\alpha x+\beta}$

$\varphi(x) = \eta\mu\frac{\alpha x}{\beta}$ $\qquad$ $\varphi_1(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$

27. Όμοια των συναρτήσεων

$f(x) = \ln x+1$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{1}{x}+e^x+\alpha^x\ln\alpha$

$h(x) = \varepsilon\varphi x+\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ $\qquad$ $\varphi(x) = \frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

28. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις

$f(x) = 3\lambda^3-2x^2+3x$ $\qquad$ $\varphi(x) = \ln x-x$

$g(x) = x^2e^x$ $\qquad$ $\theta(x) = x^4-3x^2+1$

$h(x) = e^x+3x$ $\qquad$ $t(x) = e^x-x$

29. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις στα αντίστοιχα διαστήματα:

$f: [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x) = συνx+x$

$g: [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x) = ημx-x$

$h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x) = e^x-x-1$

$\varphi(x) = (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \ln x-x+1$

30. Όμοια οι συναρτήσεις:

$f: \mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

$g: \mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$h: \mathbb{R}-\{2,-2\}\to\mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{2x+1}{4-x^2}$

$\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \frac{3x+1}{x^2+x+1}$

31. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις

με $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$

με $g(x) = \begin{cases} x^2+3x+1, & x \geq -\frac{3}{2} \\ -x-\frac{3}{2}, & x < -\frac{3}{2} \end{cases}$

32. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

1. f με $f(x) = 2x-3$
2. g με $g(x) = -x^2+3x-1$
3. h με $h(x) = x^2-2x-1$
4. φ με $\varphi(x) = x^4-4x^2+4$
5. t με $t(x) = x^4+2x^2+6$
6. θ με $\theta(x) = x^3-2x^2-7x+3$
7. ω με $\omega(x) = x^3+4x^2+5x+7$
8. f_1 με $f_1(x) = x^3$
9. g_1 με $g_1(x) = x+\sqrt{1-x}$
10. h_1 με $h_1(x) = 4|x|$
11. φ_1 με $\varphi_1(x) = x\ln x$
12. t_1 με $t_1(x) = \ln x-x+1, x\in\mathbb{R}_+^*$
13. θ_1 με $\theta_1(x) = |x|+2$
14. ω_1 με $\omega_1(x) = x^2 3^{-x}$

33. Όμοια των συναρτήσεων:

1. f με $f(x) = x(x+1)^3$
2. g με $g(x) = 2ημx+συν2x$
3. h με $h(x) = \sqrt{e^{x^2}-1}$
4. $φ$ με $φ(x) = x^x,\ x > 0$
5. $θ$ με $θ(x) = xημ2x$
6. f_1 με $f_1(x) = e^xημx,\ x \in [0,2π]$
7. g_1 με $g_1(x) = \sqrt{|x|}$
8. h_1 με $h_1(x) = ημ^2x, x \in [-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}]$
9. $φ_1$ με $φ_1(x) = \frac{\ln x}{x},\ x \in \mathbb{R}_+^*$
10. $θ_1$ με $θ_1(x) = x^α-αx, x \in \mathbb{R}_+\ 0 < α < 1$

34. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+κx+\frac{3}{x}+4$

Να προσδιοριστεί ο πραγματικός κ ώστε η f να έχει ακρότατο στη θέση $ξ = 1$, σε συνέχεια να καταστρώσετε πίνακα μεταβολών της f.

35. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3+κx+\frac{λ}{x}-2$.

Να προσδιορίσετε τα πραγματικά κ,λ ώστε η f νε έχει ακρότατα στις θέσεις $x = 1$ και $x = 2$, και σε συνέχεια να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

36. Σε ημικύκλιο ακτίνας $R = 2cm$. Να εγγραφεί τραπέζιο που να έχει το μέγιστο εμβαδό.

37. Να βρείτε ποιός από τους κυλίνδρους που είναι εγγεγραμμένοι σε κώνο έχει τη μεγαλύτερη κυρτή επιφάνεια.

38. Να βρεθεί κύλινδρος εγγεγραμμένος σε σφαίρα ακτίνας R που να έχει το μεγαλύτερο όγκο.

39. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $α$ = σταθ. Να βρείτε ποιό από τα εγγεγραμμένα σ'αυτό ισόπλευρα τρίγωνα έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

40. Να χωριστεί ο αριθμός 16 σε δύο μέρη έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

41. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με εμβαδό $κ^2$ ποιό έχει τη μικρότερη υποτείνουσα.

42. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 3+3x-x^2, & -1 \le x \le 2 \\ \frac{18}{x}+x-9, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$

Να βρεθούν τα ακρότατά της.

43. Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα τα κυρτά και τα σημεία καμπής οι συναρτήσεις:

1. f με $f(x) = x^3-4x^2+5$
2. h με $h(x) = e^x$
3. φ με $\varphi(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$
4. g με $g(x) = x+\sqrt[3]{x^5}$
5. f_1 με $f_1(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$
6. h_1 με $h_1(x) = \ln x+\frac{1}{x}-1$
7. φ_1 με $\varphi_1(x) = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$
8. g_1 με $g_1(x) = \frac{x}{1-x^2}$
9. θ_1 με $\theta_1(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{x}}$

44. Όμοια οι συναρτήσεις:

1. f με $f(x) = 10x^5-4x^4+4$
2. g με $g(x) = x^4-2x^3+8$
3. h με $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
4. φ με $\varphi(x) = 2-[x^5-1]$

45. Δείξετε ότι τα σημεία καμπής της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

46. Αν η συνάρτηση $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ τότε δείξετε ότι:

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

47. Αν η $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη δείξετε ότι: $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

48. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^\nu/\nu\in \mathbb{N}^*$, δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^\nu+\beta^\nu}{2} \geq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^\nu$$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu x$. Δείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2} \leq \eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

50. Δείξετε ότι $\forall\ \alpha,\beta\in \mathbb{R}_+^*$ ισχύει $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$.

51. Δείξετε ότι: $\frac{e^{\alpha}+e^{\beta}}{2} \geq e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$

52. Δείξετε ότι $\forall\ x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^8-x^5+x^2-x+1>0$

53. Αν $f(x)=x\eta\mu x$ τότε δείξετε ότι τα σημεία καμπής της βρίσκονται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $4+x^2=\left(\frac{2x}{y}\right)^2$

5.13.
Πλήρης μελέτη μιας συνάρτησης.

. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $\mathcal{D}(f)$.

. Εξετάζουμε αν είναι περιοδική οπότε την μελετούμε σε διάστημα μιας περιόδου $(\alpha,\alpha+\tau)$.

. Εξετάζουμε αν είναι άρτια ή περιττή οπότε το διάγραμμά της έχει άξονα συμμετρίας τον yy' αντίστοιχα κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

. Εντοπίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι συνεχής, ασυνεχής και παραγωγίσιμη.

. Βρίσκουμε την παράγωγο της f και από αυτήν εντοπίζουμε τα διαστήματα που είναι μονότονη και τις πιθανές θέσεις ακροτάτων που θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$.

. Βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο f'' της f απ'όπου εντοπίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή αντίστοιχα κοίλη και τα σημεία καμπής.

. Προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες της f.

. Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

. Τα παραπάνω στοιχεία συγκεντρώνουμε σε ένα πίνακα (πίνακας μεταβολών της f) που μας βοηθά στην χάραξη της γραφικής παράστασης της f.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^6+2x^4-7x^2+4$.

Λύση: α) Πεδίο ορισμού της f είναι $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις της μεταβλητής είναι άρτια,

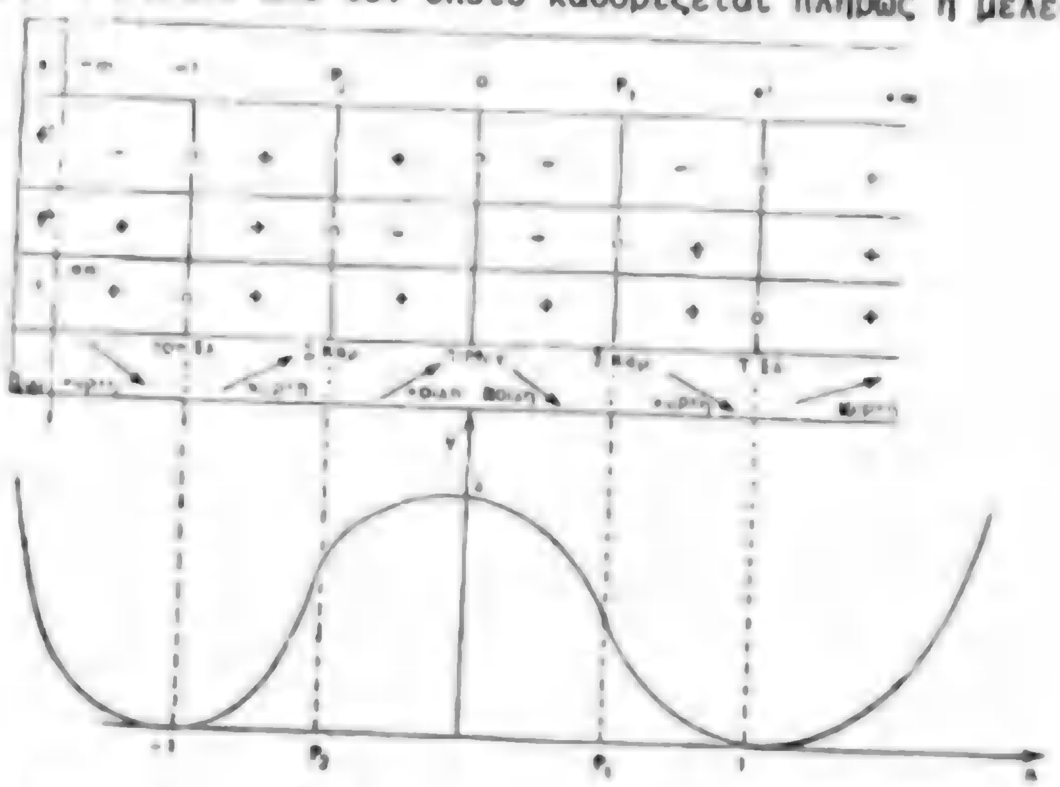
δηλαδή ισχύει $f(-x) = f(x)$. Ρίζες οι: ± 1 και $f(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$.

γ) Επειδή είναι συνεχής $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επειδή του $x \to +\infty$ και $f(x) \to +\infty$ δεν υπάρχουν ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες ούτε πλάγιες.

δ) Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = 6x^5+8x^3-14x$. Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(3x^4+4x^2-7) = 0$. Επομένως κρίσιμα σημεία είναι τα: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 30x^4+24x^2-14$ και οι ρίζες αυτής είναι: $\pm\sqrt{\frac{-6+\sqrt{141}}{15}}$, τις ονομάζουμε ρ_1, ρ_2.

ε) Καταστρώνουμε σχετικό πίνακα από τον οποίο καθορίζεται πλήρως η μελέτη της συνάρτησης.



2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = ημx+συνx$.

Λύση: Η f είναι περιοδική με περίοδο 2π γιατί είναι $f(x) = f(x+2\pi)$. Θα τη μελετήσουμε επομένως στο διάστημα $[0,2\pi]$.

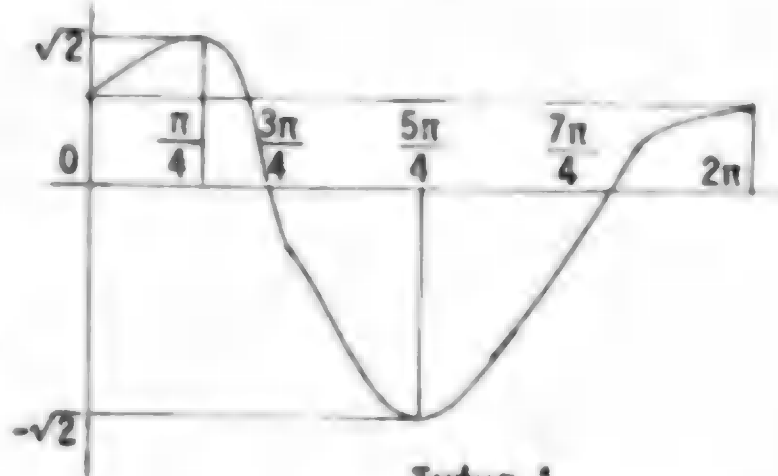
Η f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$ και τον άξονα $x'x$ στα σημεία για τα οποία είναι $ημx+συνx = 0 \rightarrow εφx = -1 = εφ(-\frac{\pi}{4}) \rightarrow x = κ\pi-\frac{\pi}{4}, κ\in Z$ $\rightarrow (\frac{3\pi}{4},0)$, $(\frac{7\pi}{4},0)$. Για την μονοτονία και τα ακρότατα της f βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο. Είναι $f'(x) = συνx-ημx \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow εφx = 1 =$ $= εφ\frac{\pi}{4} \rightarrow x = κ\pi+\frac{\pi}{4}, κ\in Z \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ (ρίζες της f' που βρίσκονται στο διάστημα $[0,2\pi]$). Για τα σημεία καμπής της f και τα κυρτά και κοίλα βρίσκουμε τις ρίζες της δεύτερης παραγώγου.

Είναι $f''(x) = -ημx - συνx \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow εφx = -1 = εφ(-\frac{π}{4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = κπ - \frac{π}{4}$, $κ \in Z \Rightarrow x_1 = \frac{3π}{4}$, $x_2 = \frac{7π}{4}$.

x	0		$\frac{π}{4}$		$\frac{3π}{4}$		$\frac{5π}{4}$		$\frac{7π}{4}$		2π
f'		+	0	-		-	0	+		+	
f''		-		-	0	+		+	0	-	
f		↗	T M	↘	ΣΚ	↘	T E	↗	ΣΚ	↗	

Ασύμπτωτες δεν υπάρχουν. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι, οπότε έχουμε ότι η f στο $[0, \frac{π}{4}]$ είναι αύξουσα και κοίλη στο $(\frac{π}{4}, \frac{3π}{4}]$ φθίνουσα και κοίλη στο $(\frac{3π}{4}, \frac{5π}{4}]$ φθίνουσα και κυρτή στο $(\frac{5π}{4}, \frac{7π}{4}]$ αύξουσα και κυρτή και στο $(\frac{7π}{4}, 2π]$ αύξουσα και κοίλη. Έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x = \frac{π}{4}$ το $f(\frac{π}{4}) = \sqrt{2}$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = \frac{5π}{4}$ το $f(\frac{5π}{4}) = -\sqrt{2}$, τα σημεία $x = \frac{3π}{4}$ και $\frac{7π}{4}$ είναι σημεία καμπής και συμπίπτουν με τα σημεία τομής της f με τον x'x. Γραφική παράσταση της f είναι: (Σχήμα 1)



Σχήμα 1

Σύνολο τιμών της f είναι το $\mathcal{R}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = αx^4 + βx^2 + γ$ με $α, β, γ \in \mathbb{R}$ και $α \neq 0$
Η μελέτη να γίνει στο συγκεκριμένο παράδειγμα $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2$.

Λύση: α) Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
Η συνάρτηση είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$. Ρίζες της $f(x) = 0$ είναι οι: $x = \pm 1$ και $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Δηλ. το διάγραμμα της f τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1$. Για $x = 0$ έχουμε $y = f(0) = 2$ και το διάγραμμα τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0,2).

β) Λόγω της συνέχειας της f δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Επίσης επειδή για $x \to \pm\infty$ θα έχουμε $f(x) \to +\infty$ έπεται ότι δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες, και επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ δεν υπάρχουν ούτε πλάγι-

ες ασύμπτωτες.

γ) Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = 12x^3-10x$ και οι ρίζες αυτής είναι: $0, -\sqrt{\frac{5}{6}}, +\sqrt{\frac{5}{6}}$.

Βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο η οποία είναι: $f''(x) = 36x^2-10$.

Παρατηρούμε ότι: $f''(0) = -10 < 0$, $f''(-\sqrt{\frac{5}{6}}) = f''(+\sqrt{\frac{5}{6}}) = 20 > 0$.

Επομένως στο σημείο 0 έχουμε τοπικό μέγιστο και στα σημεία $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ και $+\sqrt{\frac{5}{6}}$ έχουμε τοπικά ελάχιστα.

δ) Για να βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας παρατηρούμε, ότι είναι

$f'(x) > 0 \leftrightarrow 12x^3-10x > 0 \leftrightarrow x \in (-\sqrt{\frac{5}{6}},0) \cup (\sqrt{\frac{5}{6}},+\infty)$, ενώ

$f'(x) < 0$ $x \in (-\infty,-\sqrt{\frac{5}{6}}) \cup (0,+\sqrt{\frac{5}{6}})$.

Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο $(-\sqrt{\frac{5}{6}},0) \cup (\sqrt{\frac{5}{6}},+\infty)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{6}}) \cup (0,+\sqrt{\frac{5}{6}})$

ε) Τα σημεία καμπής θα βρεθούν μεταξύ των ριζών της δεύτερης παραγώγου, που είναι οι $\pm\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Έχουμε: $f''(x) > 0$ για $x \in (-\infty,-\sqrt{\frac{5}{18}}) \cup (+\sqrt{\frac{5}{18}},+\infty)$ και $f''(x) < 0$ για $x \in (-\sqrt{\frac{5}{18}},+\sqrt{\frac{5}{18}})$ και επομένως για $x = -\sqrt{\frac{5}{18}}$ και $x = +\sqrt{\frac{5}{18}}$ έχουμε σημεία καμπής.

στ) Τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη τα βρίσκουμε επίσης από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.

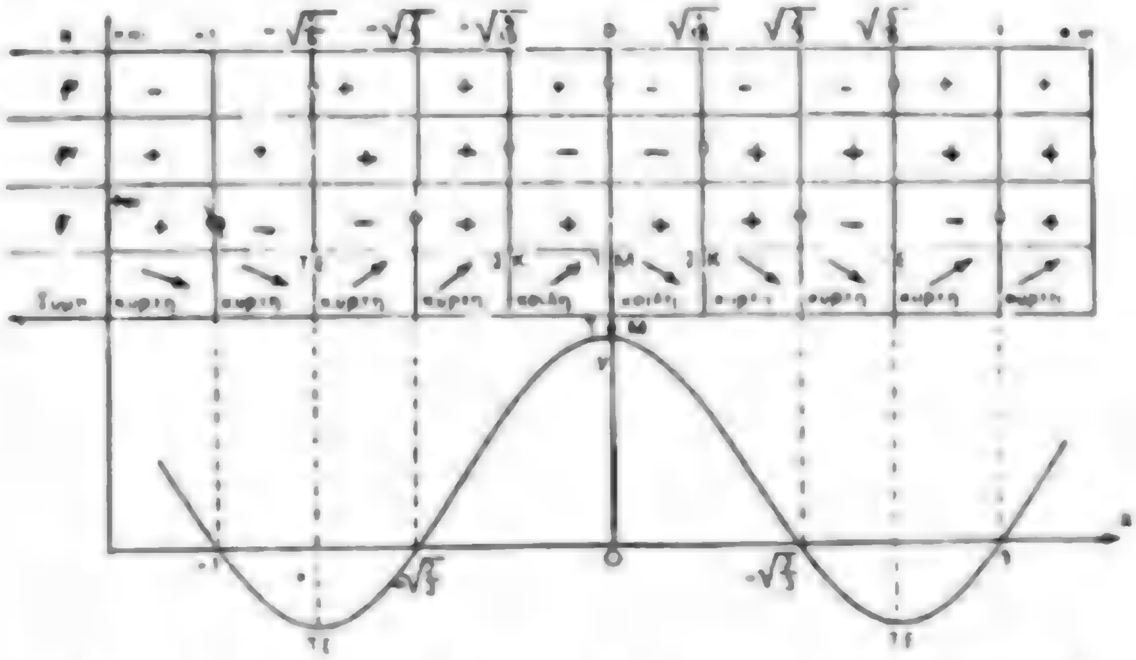
Προφανώς βάσει του προηγούμενου, στα διαστήματα $(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{18}})$ και $(+\sqrt{\frac{5}{18}},+\infty)$ η f είναι κυρτή ενώ στο διάστημα $(-\sqrt{\frac{5}{18}},+\sqrt{\frac{5}{18}})$ η f είναι κοίλη.

ζ) Βρίσκουμε τώρα τα διαστήματα στα οποία είναι $f(x) > 0$ και εκείνα στα οποία η $f(x) < 0$.

Είναι $f(x) > 0$ για $x \in (-\infty,-1) \cup (-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (1,+\infty)$ και $f(x) < 0$ για $x \in (-1,-\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}},1)$.

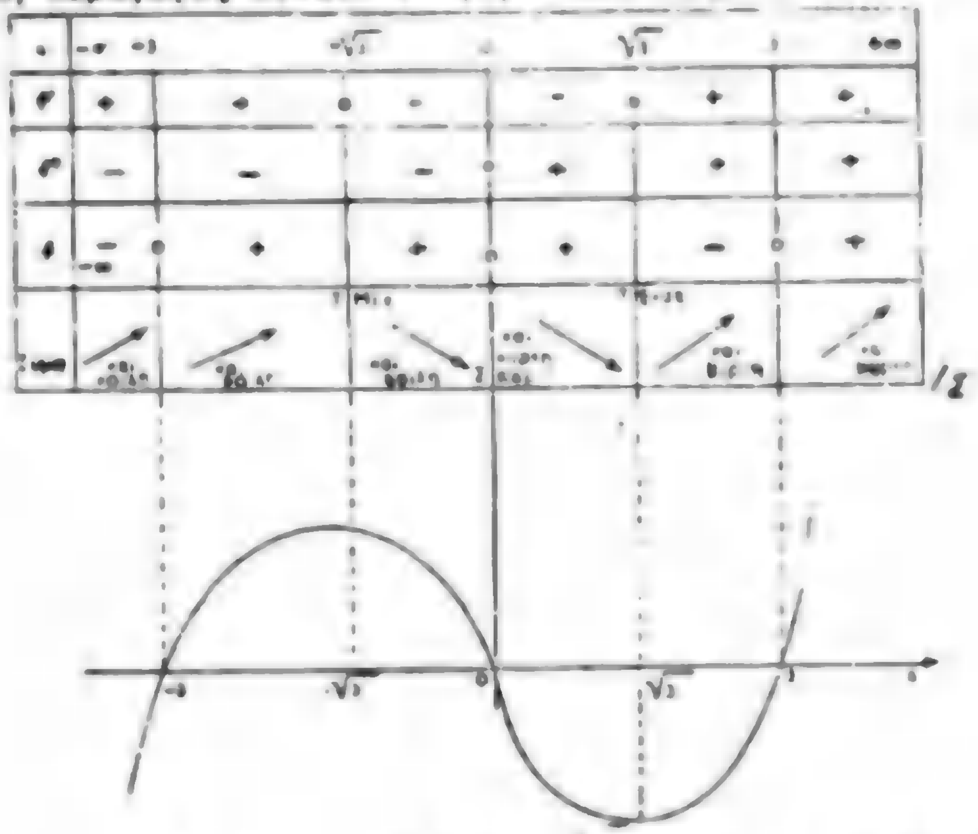
η) Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα των μεταβολών της συνάρτησης f και το διάγραμμα αυτής.

Σημείωση: Επειδή η f είναι άρτια, θα μπορούσαμε να την μελετήσουμε στο $[0,+\infty)$.



4. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-9x$ και να παρασταθεί γραφικά

Λύση: Έχουμε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ και ρίζες της $f(x) = 0$ οι $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Η παράγωγος είναι $f'(x) = 3x^2-9$. Ρίζες της $f'(x) = 0$, οι $-\sqrt{3}$ και $+\sqrt{3}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x) = 6x$. Ρίζα η 0. Ο πίνακας μεταβολών:



5. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$ και να γίνει το διάγραμμα αυτής.

Λύση: 1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

2. Δεν είναι συμμετρική ως προς τους άξονες ή την αρχή.

3. Τέμνει τον άξονα των x στα σημεία 0,1,2,3.

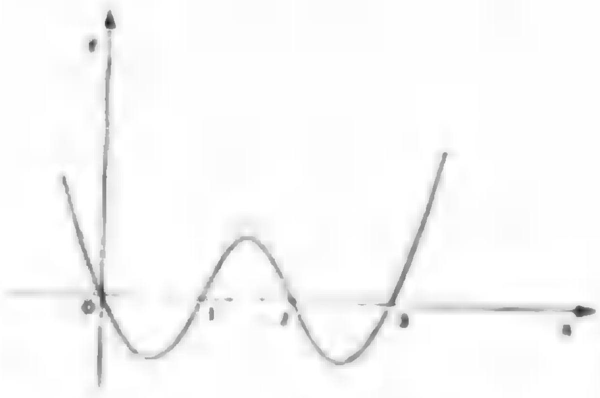
4. Δεν έχει ασύμπτωτες.

5. Είναι $f'(x) = \frac{1}{12}(2x^3-9x^2+11x-3)$

Ρίζες αυτής: $\frac{3}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

6. Είναι $f''(x) = \frac{1}{12}(6x^2-18x+11)$ Ρίζες αυτής: $\frac{9\pm\sqrt{15}}{6}$

7. Επειδή $f''(\frac{3}{2}) < 0$ στο σημείο $M(\frac{3}{2}, \frac{3}{128})$ παρουσιάζει μέγιστο ενώ στα σημεία $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ παρουσιάζει ελάχιστα.



8. Σημεία καμπής στις θέσεις $x_1 = \frac{9-\sqrt{15}}{6}$ και $x_2 = \frac{9+\sqrt{15}}{6}$

9. Για $x \to \pm\infty$, $f(x) \to +\infty$.

10. Γραφική παράσταση (πρόχειρη).

6. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ και να γίνει το διάγραμμα αυτής.

Λύση: 1. Έχουμε: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0,1,2\}$.

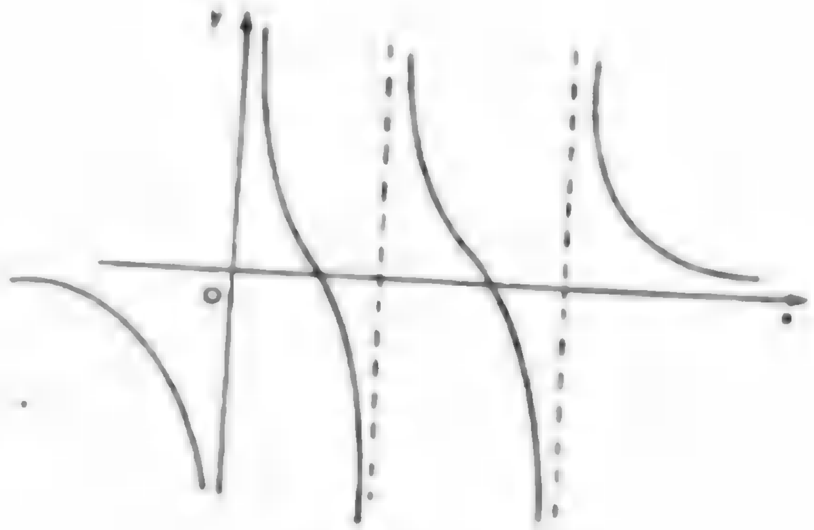
2. Οι ευθείες $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Και επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη (δηλ. ο άξονας των x).

3. Τομές του διαγράμματος της f με τον άξονα των x οι ρίζες της $f(x) = 0$ $\leftrightarrow 3x^2-6x+2 = 0$.

4. Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$ και επειδή $f'(x) < 0$ $\forall$ $x \in \mathcal{D}(f)$ είναι η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathcal{D}(f)$.

5. Είναι $f''(x) = 2(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^3})$ και η $f''(x) = 0$ είναι έκτου βαθμού.

Επειδή για $x > 2$ είναι $f''(x) > 0$ και για $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$ έπεται ότι μεταξύ 0 και 2 βρίσκονται όλες οι υπάρχουσες πραγματικές ρίζες της $f''(x) = 0$. Επειδή για $x \to 0+0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} \to +\infty$ είναι $f''(x) > 0$ και



για $x \to 1-0 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^3} \to -\infty$ είναι $f''(x) < 0$. Έπεται ότι μεταξύ 0 και 1 υπάρχει σημείο καμπής. Επίσης και μεταξύ 1 και 2 υπάρχει σημείο καμπής.

Γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

7. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x|x|}{|x+1|}$ και να παρασταθεί γραφικά

Λύση: α) Έχουμε προφανώς $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}-\{-1\}$.

β) Σημεία τομής με τον άξονα των x, οι ρίζες της $f(x) = 0$ δηλ. μόνο το σημείο 0.

γ) Ασύμπτωτη. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|x|}{|x+1|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1 = \alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)-x| =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$ και όμοια για $x \to -\infty$ έπεται ότι η ευθεία $y = x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη.

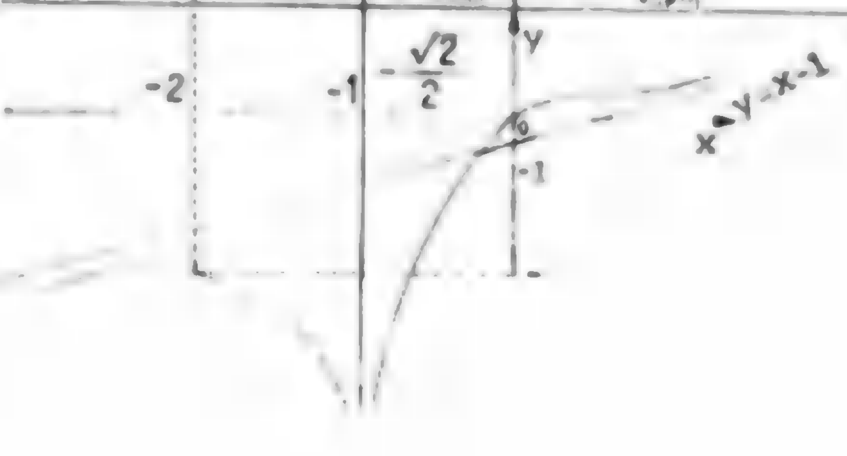
Ακόμη επειδή $f(x) > 0$ για $x > 0$ και $f(x) < 0$ για $x < 0$ $(x \neq 1)$, το διάγραμμα της f για $x > 0$ είναι πάνω από τον άξονα των x και για $x < 0$ $(x \neq -1)$ είναι κάτω του άξονα.

δ) Ακρότατα. Παρατηρούμε, ότι για $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ και για $x < -1$ είναι επίσης $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Επομένως $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ για $x \in (-\infty,-1) \cup [0,+\infty)$. Ενώ είναι $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$ για $x \in (-1,0]$.

Η παράγωγος είναι $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		+	0	−	‖	+		+	
f''		−		−	‖	−		+	
f		−		−	‖	−	0	+	
f		↗	Min	↘	‖	↗		↗	



Είναι $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $f'(x)<0$ για $x\in(-2,-1)$ και η από δεξιά παράγωγος στη θέση $x=0$ είναι $f'(0)=0$.

Στην δεύτερη περίπτωση η παράγωγος είναι:

$f'(x)=-\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $\forall$ $x\in(-1,0)$

Είναι $f'(x)>0$ για $x\in(-1,0)$ και $f'(x)<0$ για κάνένα x. Η αριστερή παράγωγος στη θέση $x=0$ είναι $f'(0)=0$.

Άρα έχουμε:

Η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2)$, f γνησίως φθίνουσα στο $(-2,-1)$ και f γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

Επομένως παρουσιάζει μόνο τοπικό μέγιστο στη θέση $x=-2$ και είναι το $f(-2)=-4$.

ε) Κυρτά - κοίλα - σημεία καμπής.

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $f''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$ $\forall$ $x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

και $f''(x)=-\dfrac{2}{(x+1)^3}$ $\forall$ $x\in(-1,0]$.

Είναι $f''(x)>0$ $\forall$ $x>0$ στη πρώτη περίπτωση και $f''(x)<0$ $\forall$ $x<-1$ και η δεξιά παράγωγος στη θέση $x=0$ είναι $f''(0)=2$.

Στη δεύτερη περίπτωση είναι $f''(x)<0$ $\forall$ $x\in(-1,0]$ και η αριστερή παράγωγος στην θέση $x=0$ είναι $f''(0)=-2$.

Επομένως η f κυρτή για $x>0$ και η f κοίλη για $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

Και επειδή στη μια περιοχή του μηδενός αλλάζει πρόσημο έχουμε εκεί σημείο καμπής.

στ) Καταστρώνουμε τώρα τον παραπάνω πίνακα και το διάγραμμα.

(Η ασύμπτωτη $y=x-1$ τέμνει το διάγραμμα της στο σημείο για το οποίο $\dfrac{x|x|}{|x+1|}=x-1$, η οποία έχει λύση για $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

Λ Λ Υ Τ Ε Σ   Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

   1. $f(x)=x^3$
   2. $g(x)=x^2-4x+6$
   3. $h(x)=x^3-12x-16$
   4. $\varphi(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$
   5. $f_1(x)=(x-1)(x+1)^2$
   6. $g_1(x)=\sqrt{x^2-x-2}$
   7. $h_1(x)=x^4-2x^2-6$
   8. $\varphi_1(x)=x^4+x^2-2$.

2. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις με τύπους:

   $f(x)=x^2-|2x+1|$ $\qquad$ $f_1(x)=x^x$, $x>0$

$g(x) = συν(π\sqrt{x})$ $\qquad$ $g_1(x) = εφx+σφx$

$h(x) = e^{-x^2+1}$ $\qquad$ $h_2(x) = ημx/2-συνx$

$φ(x) = ημx-1$ $\qquad$ $φ_1(x) = (1-συνx)συνx$

3. Όμοια να μελετηθούν οι συναρτήσεις και να παρασταθούν γραφικά.

1\. $f(x) = συν^2x+ημx+1$ $\qquad$ 2. $g(x) = \dfrac{ημ2x}{1+ημx}$

3\. $h(x) = x-\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ $\qquad$ 4. $φ(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

4. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις με τύπους:

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ $\qquad$ $f_1(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

$g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad$ $g_1(x) = \dfrac{(x+1)^2}{3x(x-1)}$

$h(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$ $\qquad$ $h_1(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

$φ(x) = \dfrac{2x^2+8x+7}{x^2+4x+3}$ $\qquad$ $φ_1(x) = 2^{x^2+x+1}$

$θ(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1}$ $\qquad$ $θ_1(x) = \dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$

5. Όμοια να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

1\. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x(x-1)}$ $\qquad$ 4. $φ(x) = \dfrac{2συν^2x}{2συνx-1}$ στο $[0, \frac{π}{3}) \cup [\frac{π}{3}, π]$

2\. $g(x) = \ln\sqrt{-x^2+4x-3}$ $\qquad$ 5. $θ(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$

3\. $h(x) = \dfrac{1+4\ln x}{x}$ $\qquad$ 6. $t(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x\ln^2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

7. Γραφικά να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\sqrt{1-x^2}-λx+2λ = 1$

8. Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{2}+α+\dfrac{β}{x^2}$

i. Να προσδιορίσετε τα α,β ώστε $f(-1) = 0$ και να διέρχεται η γραφική παράσταση της από σημείο με ελάχιστο $x = 2$.

ii. Να γίνει γραφική παράσταση της f.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Συνάρτησεις Σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Παραγωγος συνάρτησης

Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 1** **4ης δέσμης** .Πίνακες-Ορίζουσες .Γραμμικά συστήματα .Στατιστική .Συναρτήσεις	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 2** **.Μιγαδικοί** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 3** **.Ορίζουσες-Πίνακες** **.Γραμ. Συστήματα** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα-άλυτα θέμ.	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 4** **.Στατιστική** **.Συνδυασ.-Πιθαν.** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα-άλυτα θέμ.
Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 5** **. Δομές** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 6Α** **. Συναρτήσεις** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 6Β** **.΄Οριο-Συνέχεια** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 6Γ** **.Παράγωγοι-ολοκληρ.** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα
Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 7** **. Ακολουθίες** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 8** **.Ειδικά θέμ.1ης Δέσ.** Λυμένα θέματα Διανυσ. χώροι Γραμ. συνδυασμοί Διανύσματα κ.λ.π.	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 9** **.Δομές-Θ.Αριθμών** **.Πολυώνυμα-Μιγαδ.** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα-άλυτα θέμ.	Π.&Μ.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 10** **. Σειρές** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα
Ν.Αντωνόπουλος Π.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ β΄ ΛΥΚ.** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Ν.Αντωνόπουλος Π.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ α΄ ΛΥΚ.** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Α. Κουκλάδας Π.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 2** **.Πρόοδοι-Σειρές** **.Σύγκλιση-Συνέχεια** Θεωρία-Σχόλια Λυμένα-άλυτα θέμ.	Α. Κουκλάδας Π.Γεωργιακάκης **ΑΛΓΕΒΡΑ 3** **.Παράγωγοι** **.Ολοκληρώματα** Θεωρία-Σχόλια Λυμένα-άλυτα θέμ.
Μ.&Π.Γεωργιακάκης **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ** **.Διανυσματική** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Μ.&Π.Γεωργιακάκης **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ** **.Αναλυτική** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Μ.&Π.Γεωργιακάκης **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ** **β΄ Λυκείου** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα	Μ.&Π.Γεωργιακάκης **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ** **α΄ Λυκείου** Θεωρία-Σχόλια Μέθοδοι Λυμένα θέματα Αλυτα θέματα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΚΥΚΛΟΣ & ΑΡΚΑΔΙ" Μαυροκορδάτου 3 Τηλ. 36.36.063 10678 ΑΘΗΝΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΚΥΚΛΟΣ & ΑΡΚΑΔΙ"
Μαυροκορδάτου 3 τηλ. 36.36.063
10678 ΑΘΗΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ 86.

ΒΙΒΛΙΑ ΠΟΛ. & ΜΑΝ. ΓΕΩΡΓΙΑΚΑΚΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ . . .	1	Μαθηματικά **4ης Δέσμης** . . . .
"	2	Μιγαδικοί αριθμοί (Μεθοδολογία) . . . .
"	3	Ορίζουσες - Πίνακες - Γραμμικά συστήματα. . . .
"	4	Στατιστική - Συνδυαστική - Πιθανότητες. . . . .
"	5	Αλγεβρικές δομές (Μεθοδολογία). . . . .
"	6Α	Συναρτήσεις . . . .
"	6Β	Συναρτήσεις (Σύγκλιση - Συνέχεια) . . . .
"	6Γ	Παράγωγοι - Ολοκληρώματα . . . .
"	7	Ακολουθίες (Μεθοδολογία). . . . .
"	8	Ειδικά θέματα 1ης Δέσμης (Διαν. χώροι, κ.λ.π) .
"	9	Λυμ.Ασκήσεις (Δομές-Πολ/μα-Μιγαδικοί-Θ.Αριθμών)
"	10	Σειρές . . . .
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ		Διανυσματική Γ' Λυκείου . . . .
"		Αναλυτική Γ' Λυκείου. . . . .
"		Μεθοδολογία Β' Λυκείου. . . . .
"		Μεθοδολογία Α' Λυκείου (υπό έκδοση) . . . . . .
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ		**Ν.ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΥ-Π.ΓΕΩΡΓΙΑΚΑΚΗ** Β' **Λυκείου** . . . .
"		**Ν.ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΥ** Α' Λυκείου . . . .
ΑΛΓΕΒΡΑ	1	**ΚΟΥΚΛΑΔΑ-ΓΕΩΡΓΙΑΚΑΚΗ** (ακολουθίες) . . . .
"	2	" " (Πρόοδοι,Σειρές Σύγκλ.,Συνέχεια)
"	3	" " (Παράγωγοι-Ολοκληρώματα) . . . .
" ΜΕΘΟΔ.	2	" " (Απόλυτα-Μιγαδικοί). . . . . . .
ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΚΡΗΤΗΣ		**ΨΙΛΑΚΗ Μεταγλωτισμένη 4 Τόμοι** 9
ΕΚΘΕΣΕΙΣ		**ΤΖΑΝΟΥΔΑΚΗ-ΕΓΓΛΕΖΑΚΗ** Β'& Γ' Λυκείου . . . . . .
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ		**Χ. ΣΤΕΛΛΑ** Βοήθημα Α', Β', Γ' Γυμνασίου. . . από